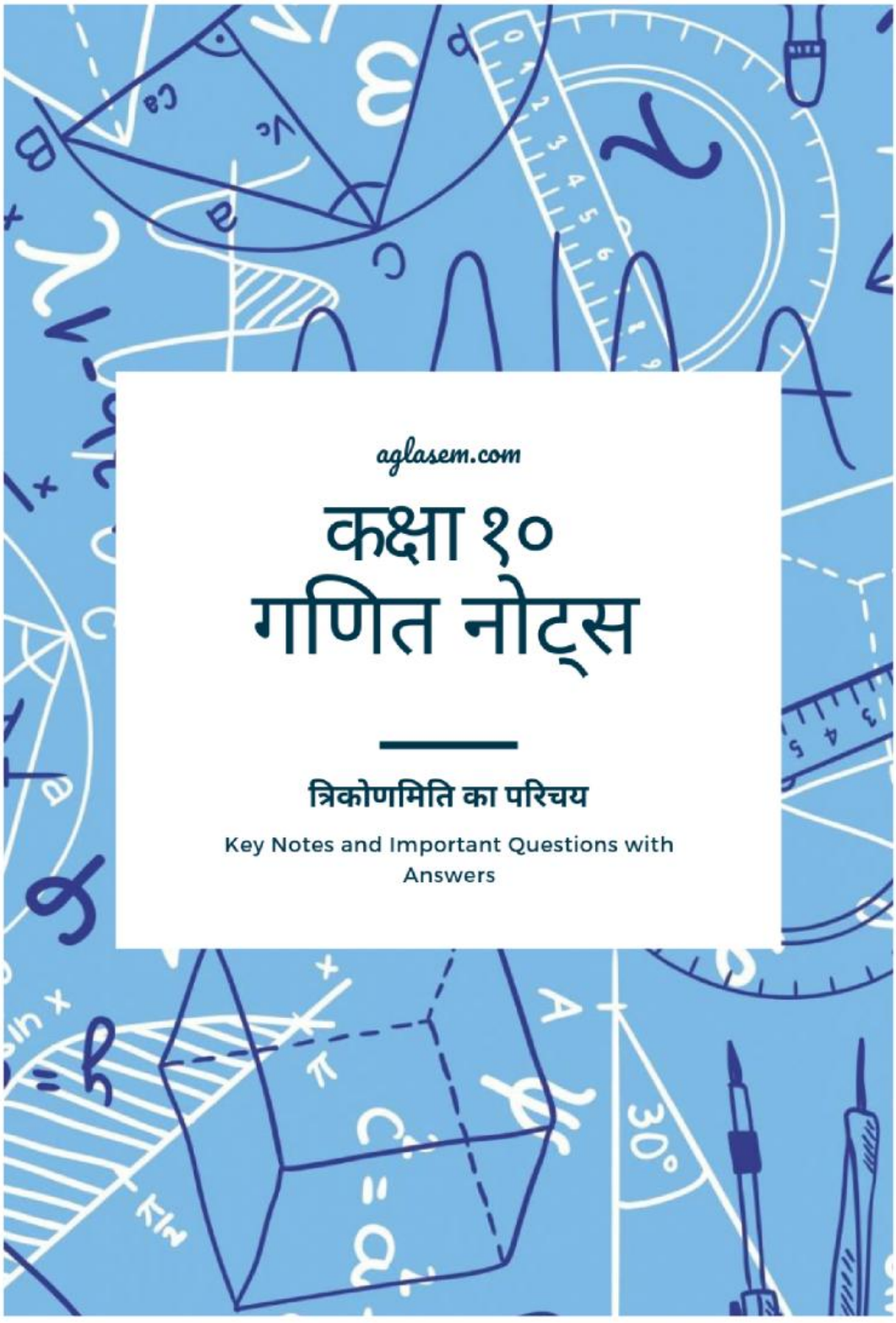


aglasem.com

कक्षा १०
गणित नोट्स

त्रिकोणमिति का परिचय

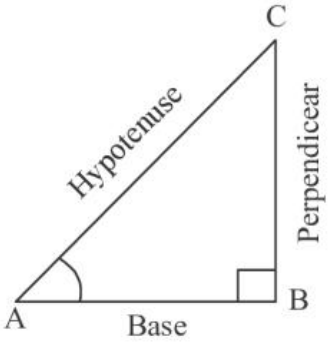
Key Notes and Important Questions with Answers

8

अध्याय

त्रिकोणमिति का परिचय

1. त्रिकोण भितिय अनुपात : ΔABC में $\angle B = 90°$ कोण A के लिए–



$$\text{Sin A} = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$$\text{Cos A} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{सल्गन भुजा}}{\text{कर्ण}}$$

$$\text{Tan A} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संल्गन भुजा}}$$

$$\text{Cot A} = \frac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \frac{\text{संल्गन भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}}$$

$$\text{Sec A} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{संल्गन भुजा}}$$

$$\text{Cosec A} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}}$$

2. व्युत्क्रम

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{1}{\text{Cosec}\,\theta},\ \text{Cosec}\,\theta = \frac{1}{\text{Sin}\,\theta}$$

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{1}{\text{Sec}\,\theta},\ \text{Sec}\,\theta = \frac{1}{\text{Cos}\,\theta}$$

$$\text{Tan}\,\theta = \frac{1}{\text{Cot}\,\theta},\ \text{Cot}\,\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

3. आनुपातिक संबंध

$$\text{Tan}\,\theta = \frac{\text{Sin}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta},\ \text{Cot}\,\theta = \frac{\text{Cos}\,\theta}{\text{Sin}\,\theta}$$

4. सर्वसामिकाएं

$\text{Sin}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1 \Rightarrow \text{Sin}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta$ और $\text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sin}^2\theta$

$1 + \tan^2\theta = \text{Sec}^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = \text{Sec}^2\theta - 1$ और $\text{Sec}^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$1 + \text{Cot}^2\theta = \text{Cosec}^2\theta \Rightarrow \text{Cot}^2\theta = \text{Cosec}^2\theta - 1$ और $\text{Cosec}^2\theta - \text{Cot}^2\theta = 1$

5. कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमिति अनुपातः

$\angle A$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
Cot A	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाशित
Cosec A	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

6. पूरक कोणों के त्रिकोणमितिय अनुपात

$\text{Sin}(90° - \theta) = \text{Cos}\,\theta$

$\text{Cos}(90° - \theta) = \text{Sin}\,\theta$

$\text{Tan}(90° - \theta) = \text{Cot}\,\theta$

$\text{Cot}(90° - \theta) = \text{Tan}\,\theta$

$\text{Sec}(90° - \theta) = \text{Cosec}\,\theta$

$\text{Cosec}(90° - \theta) = \text{Sec}\,\theta$

Important Questions with Solutions

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. यदि $\text{Sin}\,\theta = \text{Cos}\,\theta$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\tan\theta = \text{Cot}\,(30° + \theta)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\text{Sin}\,\theta = \text{Cos}\,(\theta - 6°)$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\text{Cos}\,A = \frac{7}{25}$ तो $\tan A + \text{Cot}\,A$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\tan\theta = \frac{4}{3}$ तो $\frac{\text{Sin}\,\theta + \cos\theta}{\text{Sin}\,\theta - \text{Cos}\,\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $3x = \text{Cosec}\,\theta$ और $\frac{3}{x} = \text{Cot}\,\theta$ तो $3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ का मान बताइए।

7. यदि $x = a\,\text{Sin}\,\theta$ तथा $y = a\,\text{Cos}\,\theta$ तो $x^2 + y^2$ का मान ज्ञात कीजिए

8. $\text{Cosec}\,70° - \text{Sec}\,20°$ का मान बताइए।

9. यदि $5x = \text{Sec}\,\theta$ और $\frac{5}{x} = \tan\theta$ तो $5\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. $9\,\text{sec}^2\,A - 9\,\tan^2 A$ का मान बताइए।

11. $\text{Sec}\,\theta$ को $\text{Cot}\,\theta$ में व्यक्त कीजिए।

12. $\text{Cos}\,\theta\,\text{Cos}\,(90° - \theta) - \text{Sin}\,\theta\,(90° - \theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि $\text{Sin}\,(20° + \theta) = \text{Cos}\,30°$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

14. $\frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \cot^2\theta}$ का मान बताइए।

15. $\frac{\text{Sin}\,\theta}{\sqrt{1 - \text{Sin}^2\,\theta}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 1

सिद्ध कीजिए

16. $\text{Sec}^4\,\theta - \text{Sec}^2\,\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

17. $\sqrt{\frac{1 + \text{Sin}\,\theta}{1 - \text{Sin}\,\theta}} = \tan\theta + \text{Sec}\,\theta$

18. यदि $x = p\,\text{Sec}\,\theta + q\,\tan\theta$ और $y = p\,\tan\theta + q\,\text{Sec}\,\theta$ तो सिद्ध कीजिए $x^2 - y^2 = p^2 - q^2$

19. यदि $7 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta = 4$ तो दिखाइए $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

20. यदि $\sin (A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos (A + B) = \frac{1}{2}$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

21. $\frac{\cos^2 20° + \cos^2 70°}{\sin^2 59° + \sin^2 31°}$ का मान ज्ञात कीजिए

22. **सिद्ध कीजिए:** $\tan 1° \tan 11° \tan 21° \tan 69° \tan 79° \tan 89° = 1$

23. यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec} (A - 20°)$ तो A का मान ज्ञात कीजिए

24. यदि $3 \cot A = 4$, $\frac{\operatorname{cosec}^2 A + 1}{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

25. यदि $\tan (3x - 15°) = 1$ तो x का मान बताइए।

लघु उत्तरीय प्रश्न 2

सिद्ध कीजिए:

26. $\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}$

27. $\frac{1}{\sec x - \tan x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sec x + \tan x}$

28. $\frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta + 1$

29. $(\sin \theta + \operatorname{cosec} \theta)^2 + (\cos \theta + \sec \theta)^2 = 7 + \tan^2 \theta + \cot^2 \theta$

30. $\sec A (1 - \sin A) (\sec A + \tan A) = 1$

31. यदि $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos \theta$ तो दिखाइए कि $\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2} \sin \theta$

32. यदि $\tan \theta + \sin \theta = m$, $\tan \theta - \sin \theta = n$ तो दिखाइए कि $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

33. यदि $\sec \theta = x + \frac{1}{4x}$, तो सिद्ध करिए $\sec \theta + \tan \theta = 2x$ या $\frac{1}{2x}$

34. यदि $\text{Sin}\,\theta + \text{Sin}^2\,\theta = 1$ तो सिद्ध करिए $\text{Cos}^2\,\theta + \text{Cos}^4\,\theta = 1$

35. त्रिकोणमितिय सारणी को प्रयोगकिये बिना।

$\text{Cot}\,\theta \tan(90° - \theta) - \text{Sec}\,(90° - \theta)\,\text{Cosec}\,\theta + \text{Sin}^2\,65° + \text{Sin}^2\,25° + \sqrt{3}\,\tan 5° \tan 85°$ का मान ज्ञात करिए

36. सिद्ध करिए $\dfrac{\text{Cot}\,(90° - \theta)}{\tan\theta} + \dfrac{\text{Cosec}\,(90° - \theta)\,\text{Sin}\,\theta}{\tan\,(90° - \theta)} = \text{Sec}^2\,\theta$

37. $\dfrac{\text{Cos}^2\,20° + \text{Cos}^2\,70°}{\text{Sec}^2\,50° - \text{Cot}^2\,40} + 2\,\text{Cosec}^2\,58° - 2\,\text{Cot}\,58° \tan 32° - 4 \tan 13° \tan 37° \tan 77° \tan 45° \tan 53°.$ का मान ज्ञात कीजिए।

38. यदि A, B, C त्रिभुज ABC के अंत कोण है तो सिद्ध कीजिए $\text{Cosec}^2 = \text{cosec}^2\left(\dfrac{B+C}{2}\right) - \tan^2\dfrac{A}{2} = 1$

39. $\text{Sec}^2\,10° - \text{Cot}^2\,80° + \dfrac{\text{Sin}\,15°\,\text{Cos}\,75° + \text{Cos}\,15°\,\text{Sin}\,75°}{\text{Cos}\,\theta\,\text{Sin}\,(90° - \theta) + \text{Sin}\;\theta\,\text{Cos}\,(90° - \theta)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

40. सिद्ध कीजिए $\dfrac{\tan\theta - \text{Cot}\,\theta}{\text{Sin}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta} = \tan^2\,\theta - \text{Cot}^2\theta$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

सिद्ध कीजिएः

41. $\dfrac{\text{Sec}\,\theta + \tan\theta - 1}{\tan\theta - \text{Sec}\,\theta + 1} = \dfrac{\text{Cos}\,\theta}{1 - \text{Sin}\,\theta}$

42. $\left(1 + \dfrac{1}{\tan^2 A}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\text{Cot}^2 A}\right) = \dfrac{1}{\text{Sin}^2 A - \text{Sin}^4 A}$

43. $2\,(\sin^6\theta + \text{Cos}^6\,\theta) - 3\,(\text{Sin}^4\,\theta + \text{Cos}^4\,\theta) + 1 = 0$

44. $(1 + \text{Cot}\,A + \tan A)\,(\text{Sin}\,A - \text{Cos}\,A) = \text{Sin}\,A \tan A - \text{Cot}\,A \cos A$

45. यदि $\text{Sin}\,\theta + \text{Cos}\,\theta = m$ और $\text{Sec}\,\theta + \text{Cosec}\,\theta = n$ तो दिखाइए $n(m^2 - 1) = 2m$

© NCERT not to be republished

46. $\dfrac{\text{Cot}\,(90^\circ - \theta)\,\tan\theta - \text{Cosec}\,(90^\circ - \theta)\,\text{Sec}\,\theta}{\text{Sin}\,12^\circ\,\text{Cos}\,15^\circ\,\text{Sec}\,78^\circ\,\text{Cosec}75^\circ} + \dfrac{\text{Cos}^2\,(50^\circ + \theta)\,\tan^2\,(40^\circ - \theta)}{\tan 15^\circ\,\tan 37^\circ\,\tan 53^\circ\,\tan 75^\circ}$

का मान ज्ञात कीजिए।

47. सर्वसमिका सिद्ध कीजिए:

$$\frac{1}{\text{Cosec}\,\theta + \text{Cot}\,\theta} - \frac{1}{\text{Sin}\,\theta} = \frac{1}{\text{Sin}\,\theta} - \frac{1}{\text{Cosec}\,\theta - \text{Cot}\,\theta}$$

48. यदि $\dfrac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Cos}\,\beta} = m$ और $\dfrac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Sin}\,\beta} = n$ है तो सिद्ध कीजिए $(m^2 + n^2)\,\text{Cos}^2\,\beta = n^2$

49. यदि $\tan\theta + \text{Sin}\,\theta = m$. $\tan\theta - \sin\theta = n$, है, तो सिद्ध कीजिए $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

50. सिद्ध कीजिए:

$$\text{Sec}^2\,\theta - \frac{\text{Sin}^2\,\theta - 2\text{Sin}^4\,\theta}{2\text{Cos}^4\,\theta - \text{Cos}^2\,\theta} = 1$$

51. $\text{Cot}\,\theta\,\tan(90^\circ - \theta) - \text{Sec}\,(90^\circ - \theta)\,\text{Cosec}\,\theta + \sqrt{3}\,\tan 12^\circ\,\tan 60^\circ\,\tan 78^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

52. मान ज्ञात कीजिए:

$$\frac{\text{Sec}\,(90^\circ - \theta)\,\text{Cosec}\,\theta - \tan(90^\circ - \theta)\,\text{Cot}\,\theta + \text{Cos}^2\,25^\circ + \text{Cos}^2\,65^\circ}{3\,\tan 27^\circ\,\tan 63^\circ}$$

उत्तरमाला

1.	$45°$	**2.**	$30°$
3.	$24°$	**4.**	$\frac{625}{168}$
5.	7	**6.**	$\frac{1}{3}$
7.	a	**8.**	0
9.	$\frac{1}{5}$	**10.**	9
11.	$\frac{\sqrt{1+\text{Cos}^2\,\theta}}{\text{Cot}\,\theta}$	**12.**	$0°$
13.	$50°$	**14.**	$\tan^2\theta$
15.	$\tan\theta$	**16.**	
17.		**18.**	
19.		**20.**	$A = 45°, B = 15°$
21.	1	**22.**	
23.	$22°$	**24.**	$\frac{17}{8}$
25.	$20°$	**35.**	$\sqrt{3}$
37.	-1	**39.**	2
46.	0		
51.	2	**52.**	$\frac{2}{3}$

अभ्यास प्रश्न–प्रत्र

त्रिकोणमिति का परिचय

समय : 50 मिनट *अंक : 20*

खण्ड–अ

1. यदि $\text{Sin}\,\theta = \frac{4}{5}$ तो $\text{Cos}\,\theta$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

2. $\text{Sin}\,(45° + \theta) - \text{Cos}\,(45° - \theta)$ का मान बताइए। **1**

खण्ड–ब

3. यदि $5\,\tan\theta = 4$ तो $\frac{5\,\text{Sin}\,\theta - 3\text{Cos}\,\theta}{5\,\text{Sin}\,\theta + 2\text{Cos}\,\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

4. $\tan 35° \tan 40° \tan 45° \tan 50° \tan 55°$ का मान ज्ञात कीजिए। **2**

खण्ड–स

5. सिद्ध कीजिए : $\frac{\text{Sin}\,\theta}{1+\text{Cos}\,\theta} + \frac{1+\text{Cos}\,\theta}{\text{Sin}\,\theta} = 2\,\text{Cosec}\,\theta$ **3**

6. सिद्ध कीजिए : $\frac{\text{Cos A}}{1-\tan\text{A}} - \frac{\text{Sin}^2\,\text{A}}{\text{Cos A} - \text{Sin A}} = \text{Sin A} + \text{Cos A}$ **3**

खण्ड–द

7. यदि $\tan(\text{A}+\text{B}) = \sqrt{3}$ तथा $\tan(\text{A}-\text{B}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए। **4**

8. सिद्ध कीजिए : $\frac{\tan\theta + \text{Sec}\,\theta - 1}{\tan\theta - \text{Sec}\,\theta + 1} = \frac{\text{Cos}\,\theta}{1 - \text{Sin}\,\theta}$ **4**

□□□