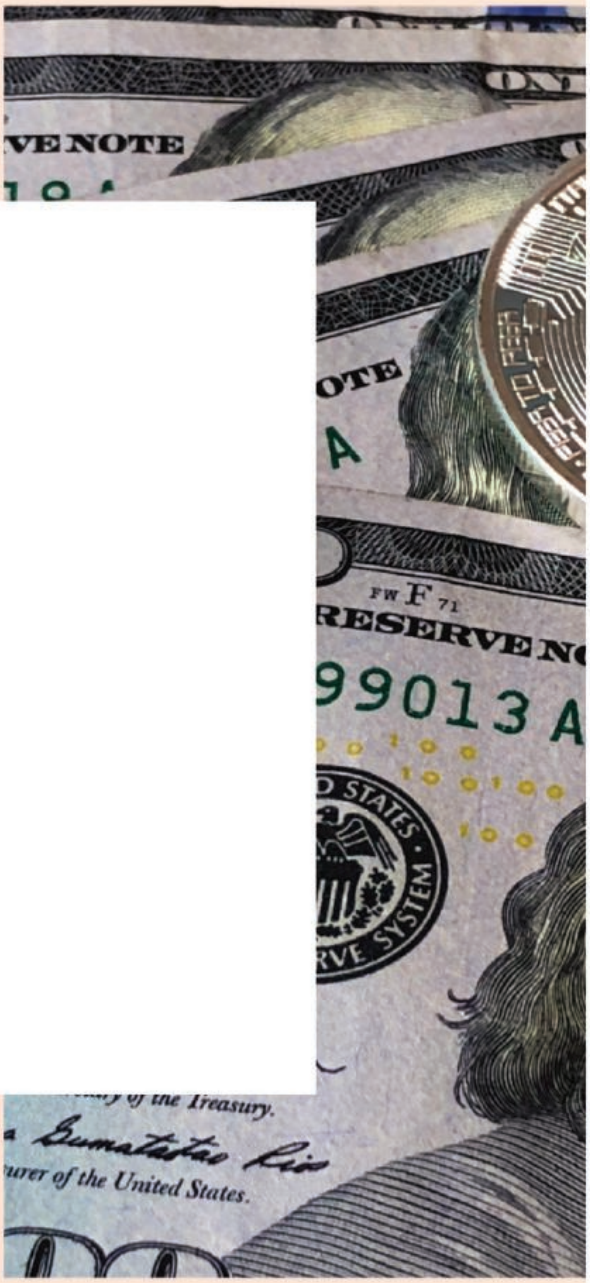
aglasem.com

कक्षा ११ अर्थशास्त्र नोट्स

परिक्षेपण के माप



Key Notes and Important Questions with Answers

इकाई–3

(ख) परिक्षेपण के माप

परिक्षेपण

केन्द्रीय मूल्यों से आँकड़ो के फैलाव को परिक्षेपण कहा जाता है । यह बताता है कि वितरण का मान उसके औसत मान से कितना भिन्न है।

परिक्षेपण मापन की विधियाँ

मूल्यों के विस्तार या विखराव के आधार पर परिक्षेपण के मापः इसमें निम्नलिखित तीन विधियाँ आती है :–	औसत के आधार पर परिक्षेपण के माप : इसमें दो विधियाँ आती है	रेखाचित्र विधि : लॉरेंज वक्र
अ) परास / विस्तार ब) अंतर – चतुर्थक परास (IQR) स) चतुर्थक विचलन (QD)	अ) माध्य / औसत विचलन (MD) ब) मानक विचलन (SD)	

प्रक्षेपण के माप

निरपेक्ष माप : प्रक्षेपण के वे मान जिन्हें श्रेणी की मूल इकाइयों के रूप में व्यक्त किया जाता है निरपेक्ष माप कहलाते हैं। निरक्षेप मापों को साकार इकाइयों में अभिव्यक्त किया जाता है। अर्थात् ऐसी इकाइयों से जिनमें आंकड़ों को प्रदर्शित किया जाता है जैसे रूपये, मीटर आदि। ऐसे माप दो वितरणों के विचरणों की तुलना करने में उपयुक्त नहीं होते हैं जिन्हें मापने की विभिन्न इकाइयों में अभिव्यक्त किया जाता है।

साक्षेप मापः प्रक्षेपण के वे माप जिन्हें औसत के प्रतिशत या अनुपात के रूप में मापा जाता है, सापेक्ष माप कहलाते हैं। सापेक्ष माप को कई बार परिक्षेपण के गुंणाक भी कहा जाता हैं क्योंकि गुणांक मापने की इकाई से स्वतंत्र होता है। दो या दो से अधिक श्रेणियों की तुलना भी साक्षेप माप की सहायता से की जाती है जबकि श्रेणियों की इकाइयां भी विभिन्न होती है।

निरपेक्ष माप	सापेक्ष माप
(1) परास = L – S	(1) परास गुणांक = $\frac{L-S}{L+S}$
(2) चतुर्थक विचलन Q.D. = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$	(2) चतुर्थक विचलन गुणाक– = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
(3) माध्य विचलन $MD_{\bar{x}} = \frac{\Sigma\|dx\|}{N}$	(2) माध्य विचलन गुणांक = $\frac{MD_{\bar{x}}}{\bar{X}}$
(4) मानक विचलन S.D. or $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N}}$	(4) मानक विचलन गुणांक = $\frac{S.D.}{\bar{X}}$
	(5) विचरण गुणांक (C.V) = $\frac{S.D.}{\bar{X}}$ 100

मूल्यों के विस्तार के आधार पर परिक्षेपण के माप

1. **परास / विस्तार (R)** = अधिकतम मान – न्यूनतम मान $\boxed{R = L - S}$

   परास / विस्तार का गुणांक (CR) = $\frac{L-S}{L+S}$

   टिप्पणी : परास का अधिक मान अधिक परिक्षेपण को तथा कम मान निम्न परिक्षेपण को व्यक्त करता है ।

2. **अंतर – चतुर्थक विस्तार / परास (IQR)**

   $IQR = Q_3 - Q_1$

   जहाँ Q_3 = तृतीयक चतुर्थक

   Q_1 = प्रथम चतुर्थक

   टिप्पणी :

   1. यह किसी वितरण में माध्य के 50% मानों पर आधारित होता है ।
   2. यह चरम मानों के द्वारा प्रभावित नहीं होता है ।

3. **चतुर्थक – विचलन (QD) :-**

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

इसे अर्द्ध अंतर – चतुर्थक विस्तार भी कहते है।

चतुर्थक विचलन गुणांक (CQD) = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

चतुर्थक – ज्ञात करने की विधि इकाई–3 में दी गई है।

औसत के आधार पर परिक्षेपण की माप :

1. माध्य विचलन यह किसी केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (माध्य, माध्यिका या बहुलक) से विभिन्न मूल्यों के विचलनों के माध्य से निकाला जाता हैं। इसमें केवल निरपेक्ष मूल्य लिए जाते है। धनात्मक तथा ऋणात्मक चिह्नों की अवहेलना कर दी जाती है । इसके लिए दो समान्तर खड़ी रेखाएँ का प्रयोग करते है । इसमें केवल निरपेक्ष मूल्य ही लिए जाते है।

   श्रेणी के यह सभी मानों पर आधारित होता है। यदि इसे माध्य के बजाय माध्यिका से ज्ञात किया जाए तो यह निम्नतम होगा ।

1. **माध्य / औसत विचलन (MD)**

   माध्य से माध्य विचलन ज्ञात करना :–

व्यक्तिगत श्रेणी	खण्डित तथा अखण्डित श्रेणी
$MD_{\bar{x}} = \frac{\Sigma \lvert X - \bar{X} \rvert}{N} = \frac{\Sigma \lvert dx \rvert}{N}$	$MD_{\bar{x}} = \frac{\Sigma f \lvert X - \bar{X} \rvert}{\Sigma f} = \frac{\Sigma f \lvert dx \rvert}{\Sigma f}$
N = मदों की संख्या	Σf = आवृत्तियों का योग
$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$	f = आवृत्ति
	$\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

माध्य विचलन गुणांक = $\frac{MD_x}{\bar{X}}$ जहाँ $\bar{X}$ = समान्तर माध्य

2. माध्यिका से माध्य विचलन (MD_M)

व्यक्तिगत श्रेणी	खण्डित तथा अखण्डित श्रेणी
$MD_m = \frac{\Sigma \mid X - M \mid}{N}$ $= \frac{\Sigma \mid dm \mid}{N}$	$MD_m = \frac{\Sigma f \mid X - M \mid}{\Sigma f} = \frac{\Sigma f \mid dm \mid}{\Sigma f}$

	खण्डित	अखण्डित
$m = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वें मद का आकार M = माध्यिका	m = (N+1) वें मद का आकार $N = \Sigma f$	$m = L_1 + \frac{\frac{N}{2} - cf}{F} \times i$ $M = \frac{N}{2}$ वें मद का आकार

माध्य विचलन गुणांक $= \frac{MD_m}{M}$

2. मानक विचलन (S.D.)

मानक विचलन समान्तर माध्य से निकाले गए विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल कहलाता है । इसे ग्रीक अक्षर 'सिग्मा' (σ) से व्यक्त किया जाता है।

यह परिक्षेपण का सर्वश्रेष्ठ माप है। इसमें माध्य विचलन के गणितीय त्रुटियों का निराकरण हो जाता है। यह श्रृंखला की सभी इकाइयों पर आधारित रहता है तथा इसका मूल्य स्थिर रहता है।

मानक विचलन ज्ञात करने की विधियाँ :–

व्यक्तिगत श्रेणी

वास्तविक माध्य विधि	कल्पित माध्य विधि	पद विचलन विधि	प्रत्यक्ष विधि
$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$	$\bar{X} = A + \frac{\Sigma d}{N}$	$\bar{X} = A + \frac{\Sigma d'}{N} \times i$	$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$
$SD = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N}}$	$SD = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d}{N}\right)^2}$	$SD = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d'}{N}\right)^2} \times i$	$SD = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}$
या			या
$SD = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N}}$	$d = X - A$	$d' = \frac{X - A}{i}$	$SD = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - (\bar{X})^2}$
$x = X - \bar{X}$	d = कल्पित माध्य से विचलन	i = पद मूल्यों के बीच अंतर	
x = वास्तविक माध्य से विचलन	A = कल्पित माध्य		

खण्डित श्रेणी तथा अखण्डित श्रेणी

वास्तविक माध्य विधि	कल्पित माध्य विधि	पद विचलन विधि	प्रत्यक्ष विधि
$\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$	$\bar{X} = A + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$	$\bar{X} = A + \frac{\Sigma d'}{\Sigma f} \times i$	$\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$
$SD = \sqrt{\frac{\Sigma f(X-\bar{X})^2}{\Sigma f}}$	$SD = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2}$	$SD = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{\Sigma f} \times \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2} \times i$	$SD = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{\Sigma f} - (\bar{X})^2}$
or			or
$SD = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{\Sigma f}}$	$d = X - A$	$d' = \frac{X - A}{i}$	$SD = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2}{\Sigma f} - (\bar{X})^2}$

मानक विचलन का गुणांक = $\frac{SD}{\bar{X}}$

जहाँ X = खण्डित श्रेणी में पद मूल्यों के लिए जबकि अखण्डित श्रेणी मध्यमान के लिए प्रयोग किया गया है।

परिक्षेपण का सर्वाधिक प्रयुक्त होने वाला सापेक्षिक माप विचरण गुणांक है । जब मानक विचलन गुणांक को 100 से गुणा कर दिया जाए तो यह प्राप्त होता है ।

विचरण गुणांक (CV) $= \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100 = \frac{SD}{\bar{X}} \times 100$

जिन समूह श्रेणियों में विचरण गुणांक अधिक होता है उनमें विचरणशीलता अधिक होती है, इसके विपरीत जिन समूहों या श्रेणियों में विचरण गुणांक कम होता है उनमें स्थिरता, विश्वसनीयता, संलग्नता, एकरुपता आदि अधिक होता है ।

(लॉरेंज वक्र) :–

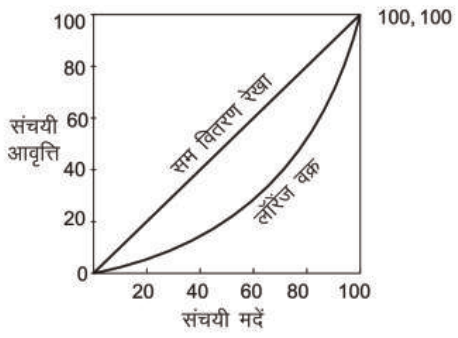
इस विधि का विकास डॉ. मैक्स ओं. लॉरेंज ने किया। इस विधि के द्वारा परिक्षेपण के विषय में एक अनुमान लगाया जाता है न कि संख्यात्मक मान । इस विधि का प्रयोग आय तथा धन के वितरण का अध्ययन करने के लिए किया जाता है । इन वितरणों की सूचनाओं को संचयी रुप में ज्ञात कर के उनका प्रतिशत निकाला जाता है । इन्हें बिन्दु रेखा द्वारा अंकित किया जाता है । प्राप्त लॉरेन्ज वक्र समान वितरण रेखा से दूर है तो विचरण अधिक और नजदीक है तो विचरण कम ।

लॉरेंज वक्र का उपयोग

- आय तथा धन का वितरण
- लाभ का वितरण
- मजदूरी का वितरण
- क्रय एवं विक्रय का वितरण
- उत्पादन का वितरण आदि

लॉरेंज वक्र के निर्माण की विधि

1. दिये हुए मूल्यों या वर्गों के मध्य मूल्य का संचयी योग निकालना । संचयी योग को 100 मानकर विभिन्न संचयी योगों का प्रतिशत निकाला जाता है।



2. आवृत्ति वितरण का भी संचयी योग निकाला जाता है। अंतिम संचयी योग को 100 मानकर अन्य संचयी योगों का प्रतिशत निकाला जाता है ।
3. सभी संचयी आवृत्तियों को (x–अक्ष) पर और संचयी मूल्यों को (y–अक्ष) पर प्रकट किया जाता है ।
4. दोनो अक्षों पर विभिन्न मूल्यों को 0–100 तक मापदण्ड दिया जाता है।
5. वक्र अक्ष के 0 मापदण्ड को वक्र अक्ष के मापदण्ड से मिलाने के लिए जो रेखा खींची जाती है उसे समान वितरण रेखा कहते है।
6. वास्तविक आंकड़ों को ग्राफ पेपर पर चिन्हित किया जाता है और इन विभिन्न बिन्दुओं को मिलाकर एक वक्र प्राप्त किया जाता है जिसे लॉरेंज वक्र कहते है ।

प्रश्नावली

- **एक अंक वाले प्रश्न**

1. अन्तर चतुर्थक विस्तार क्या है ?
2. विचरण गुणांक ज्ञात करने का सूत्र क्या है ?
3. लॉरेंज वक्र क्या है ?
4. विस्तार की गणना कीजिए । 22, 35, 32, 45, 42, 48, 39
5. परिक्षेपण को मापने के लिए किस ग्राफीय विधि का प्रयोग करते है ?
6. परिक्षेपण का क्या अर्थ है ?
7. माध्य विचलन गुणांक की गणना कैसे की जाती है ?
8. परिक्षेण का कौन–सा माप बीच के 50 प्रतिशत मूल्यों से संबंधित है ?
9. माध्य विचलन का कोई एक प्रमुख दोष बताईये ?
10. परिक्षेपण के माप की सापेक्षित माप क्या है ?
11. परास को परिभाषित कीजिए।
12. मानक विचलन को माध्य विचलन से अच्छा क्यों माना जाता है?

- **लघु उत्तरीय प्रश्न (3–4 अंक)**

1. परिक्षेपण के प्रमुख माप क्या है ?
2. माध्य विचलन के कोई दो गुण व दो दोष बताइऐ।
3. माध्य विचलन व प्रमाप विचलन के बीच अंतर बताइए ।
4. विस्तार गुणांक की गणना करो – 22,35, 32, 45, 42, 48, 39

5. परिक्षेपण के मापों के रुप में विस्तार, माध्य विचलन एवम् प्रमाप विचलन के सापेक्षित गुणों का विवेचन किजिए ।

6. निम्नलिखित आँकड़ों से विस्तार एवम् विस्तार गुणांक ज्ञात कीजिए ।

अंक	10	20	30	40	50	60	70
विधार्थियों की संख्या	8	12	7	30	10	5	2

(विस्तार – 60 अंक, विस्तार गुणांक – 0.75)

7. परिक्षेपण के माप के गुणांक की गणना क्यों जाती है? उदाहरण सहित समझाइये।

8. परिक्षेपण के माप के महत्व की व्याख्या कीजिए।

9. मानक विचलन को परिक्षेपण के माप की सर्वश्रेष्ठ माप क्यों माना जाता है?

10. चतुर्भज विचलन तथा इसका गुणांक ज्ञात कीजिए।

मजदूरी	50	55	58	60	70	90	95	110
आवृत्ति	5	7	12	10	8	6	2	2

11. सोने तथा चांदी की कीमत से ज्ञात कीजिए कि किसका मूल्य ज्यादा स्थिर है।

सोना	410	440	430	480	450	460	490	500	420	400
चांदी	910	930	960	920	900	970	990	940	980	950

12. खुले सिर वाले आवृत्ति वितरण से परास ज्ञात क्यों नहीं किए जाते?

13. लॉरेंज वक्र के दो गुण तथा दो दोष लिखिए।

14. माध्य से माध्य विचलन तथा माध्य विचलन का गुणांक ज्ञात कीजिए।

X	10 – 20	20 – 30	30 – 50	50 – 70	70 – 80
Y	5	8	16	8	3

15. प्रत्यक्ष विधि द्वारा मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

अंक	0 – 10	10 – 20	20 – 30	40 – 50	50 – 60
विद्यार्थी	5	10	25	20	10

- **छः अंको वाले प्रश्न**

1. दस मूल्यों का योग 100 है तथा उनके वर्गों का योग 1090 है तो विचरण गुणांक ज्ञात करो? उत्तर (30%)

2. माध्य विचलन की गणना करो तथा श्रंखला A तथा श्रंखला B के विचलन की तुलना करो –

श्रंखला A	:	10	12	16	20	25	27	30
श्रंखला B	:	10	20	22	25	27	31	40

उत्तर ($MD_A = 6.28\ MD_B = 6.57$)
($CMD_A = .31\ CMD_B = .26$)
A में अधिक विचलन है।

3. प्रमाप विचलन तथा इसका गुणांक ज्ञात कीजिए–

वर्ग अन्तराल	:	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
बारम्बारता	:	4	6	10	16	12	8	4

उत्तर ($\overline{X}$= 18, SD=7.89. CSD=.44)

4. अंतर चतुर्थक परास, चतुर्थक विचलन तथा चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना करो–

वर्ग अन्तराल	:	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
बारम्बारता	:	3	9	15	23	30	20

उत्तर (IQD=9.84, QD=4.92, CQD=.25)

5. लारेन्ज वक्र का निर्माण करो–

आय	:	200 से कम	200–500	500–1000	1000–2000	2000–3000
फैक्ट्री A	:	6	10	14	12	
फैक्ट्री B	:	7	12	15	10	6

- **एक अंक वाले प्रश्नों के उत्तर**

1. अन्तर चतुर्थक विस्तार तृतीय चतुर्थक एवम् प्रथम चतुर्थक का अन्तर होता है ।
2. विचरण गुणांक = $\frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$
3. लॉरेंज वक्र अपकिरण को प्रदर्शित करने वाली एक ग्राफीय विधि है ।
4. विस्तार = सबसे बड़ा मूल्य – सबसे छोटा मूल्य (48–22=26)
5. अपकिरण को मापने के लिए लॉरेंज वक्र विधि का प्रयोग किया जाता है।
6. किसी श्रेणी में केन्द्रीय माध्यों से समंको के विस्तार के माप को अपकिरण कहते हैं।

7. माध्य विचलन गुणांक $= \frac{MD_{\bar{x}}}{\bar{X}}$
8. अंतर चतुर्थक विस्तार
9. माध्य विचलन का प्रमुख दोष इसका (±) धनात्मक तथा ऋणात्मक चिन्हों को त्यागना है ।
10. अपकिरण के सापेक्ष माप को अनुपात या प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है।
11. श्रृंखला के उच्चतम तथा निम्नतम मूल्य के अन्तर का परास कहते हैं।
12. मानक विलचन का मान स्थिर रहता है तथा इसका अंकगणितीय व्यवहार संभव है।

बार बार पूछे जाने वाले प्रश्न :–

प्र. लॉरेंज वक्र क्या है ?

उ. लॉरेंज वक्र अपकिरण को प्रदर्शित करने की एक ग्राफीय विधि है, जो आय, संपत्ति, लाभ मजदूरी आदि के वितरण का अध्ययन करती है।

प्र. प्रसरण (विचरण मापांक) क्या है ?

उ. प्रमाण विचलन के वर्ग को प्रसरण (विचरण मापांक) कहते हैं ।

प्र. निम्न आंकड़ों से यह ज्ञात कीजिए कि कौन–सी फैक्ट्री अधिक समरुप है –

	श्रमिकों की संख्या	
मजदूरी रु. में	फैक्ट्री 'क'	फैक्ट्री 'ख'
20	30	45
60	25	35
100	30	25
140	45	40
180	25	25
220	13	20
260	24	5
300	8	3

उ. सर्वप्रथम दोनों फैक्ट्री का माध्य एवं प्रमाप विचलन की गणना करें। फिर निम्न सूत्र की सहायता से दोनो फैक्ट्री का विचरण गुणांक निकालें :–

विचरण गुणांक (C.V) $= \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$

जिस फैक्ट्री का (C.V) कम हो वह अधिक समरुप है।

फैक्ट्री 'क' – माध्य – 137, प्र. विचलन : 80.8, (C.V) = 52%

फैक्ट्री 'ख' – माध्य – 114, प्र. विचलन : 75.6, (C.V) = 66%

अतः फैक्ट्री 'क' अधिक समरुप है ।