

छत्तीसगढ़
माध्यमिक शिक्षा
मण्डल रायपुर
द्वारा निर्मित प्रश्न बैंक
2022-23

कक्षा 12



विषय – गणित

इकाई 1

संबंध एवं फलन

लघुउत्तरीय प्रश्न (4अंक)

प्रश्न:—1. यदि R प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर आधारित एक संबंध इस प्रकार हो कि

$$R = \{(x, y) : x \in N, y \in N, 2x + y = 4\}$$

तब इसका प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि यह स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।

प्रश्न:—2. माना $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा $R = \{(a, b) : |a - b|, 2 \text{ से विभाजित है}\}$ तो सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।

प्रश्न:—3. मान लीजिए कि xy -तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है और L में $R = \{(L_1, L_2) : L_1 \parallel L_2\}$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। रेखा $y = x + 4$ से संबंधित समस्त रेखाओं का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:—4. मान लीजिए कि समस्त $n \in N$ के लिए $f(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ is odd} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ is even} \end{cases}$

द्वारा परिभाषित एक फलन $f: N \rightarrow N$ है। बतलाइए कि क्या फलन f एकैकी, आच्छादी है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

प्रश्न:—5. $g \circ f$ तथा $f \circ g$ ज्ञात कीजिए यदि

$$(i) \quad f(x) = |x|; \quad g(x) = |5x - 2|$$

$$(ii) \quad f(x) = 8x^3; \quad g(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$(iii) \quad f(x) = \cos x; \quad g(x) = 3x^2$$

$$(iv) \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \forall x \in R; \quad g(x) = \frac{x}{1-|x|} \quad \forall x \in R$$



प्रश्न:-6. $f(x)=4x+3$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ पर विचार कीजिए । सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है, f का प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-7. $a*b=a^3+b^3$ प्रकार से परिभाषित $\mathbb{N}$ में एक द्वि-आधारी संक्रिया $*$ पर विचार कीजिए। संक्रिया की क्रमविनिमेयता एवं साहचर्यता की जांच कीजिए।

प्रश्न:-8. मान लीजिए कि $f: X \rightarrow Y$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है तब सिद्ध कीजिए कि f^{-1} का प्रतिलोम f है अर्थात् $(f^{-1})^{-1} = f$ है।



प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न (2 अंक)

प्रश्न:-1. $\tan^2(\sec^{-1}2) + \cot^2(\operatorname{cosec}^{-1}3)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-2. यदि $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$ तब x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-3. यदि $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$ तब $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-4. $y = \cos^{-1}(x^2 - 4)$ के लिए उसका प्रांत ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-5. $\cot(\sin^{-1}x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-6. $\cos^{-1}\frac{1}{2} + 2\sin^{-1}\frac{1}{2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-7. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\right)$; $x < \pi$ को सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न:-8. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-9. सिद्ध कीजिए कि $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

प्रश्न:-10. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।



दीर्घउत्तरीय प्रश्न (4 अंक)

प्रश्न:-1. यदि $\sin^{-1} \frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1} \frac{1-b^2}{1+b^2} = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$x = \frac{a-b}{1+ab}$$

प्रश्न:-2. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x$

प्रश्न:-3. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न:-4. सिद्ध कीजिए कि $\cos^{-1} \frac{4}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} = \cos^{-1} \frac{33}{65}$

प्रश्न:-5. यदि $\tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{k} \right) = \frac{\pi}{4}$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-6. यदि $\sin^{-1}(1-x) - 2 \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-7. $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, |x| < a$ को सरलतम रूप में लिखिए।

प्रश्न:-8. सिद्ध कीजिए कि $\cot^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right] = \frac{\pi}{2}, x \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$

इकाई- 2

आव्यूह

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न(1 अंक)

प्रश्न:-1 एक 3×4 आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होते हैं- (i) $a_{ij}=2i-j$ (ii) $a_{ij}=\frac{i}{j}$ (iii) $a_{ij}=|-2i + 3j|$

प्रश्न:-2. निम्नलिखित समीकरण में x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए-

$$(i) \begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{vmatrix} x+y+z & \\ x+z & \\ y+z & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{vmatrix}$$

प्रश्न:-3. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए-(i) $A-B$ (ii) $A+B$ (iii) AB (iv) BA

प्रश्न:-4. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ तो दर्शाइए कि

$$(i) (A')' = A \quad (ii) (AB)' = B'A' \quad (iii) (KA)' = kA'$$

प्रश्न:-5. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ हो तो दर्शाइए कि $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

प्रश्न:-6. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $x^2 = -1$ तो दर्शाइए कि

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2$$

प्रश्न:-7. यदि $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि

$$(i) (A+B)' = A' + B' \quad (ii) (A-B)' = A' - B'$$

प्रश्न:-8. (i) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।

(ii) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न:-9. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि

1. $(A+A')$ एक सममित आव्यूह है।
2. $(A-A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न:-10. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ तथा $A+A'=I$ हो, तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-11. यदि $x \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ 5 \end{vmatrix}$ हो, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-12. यदि $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $AA'=I$

दीर्घउत्तरीय प्रश्न(6 अंक)

प्रश्न:-1. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $A^2 = kA - 2I$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-2. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है तो $A^2 - 5A + 6I$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I$

प्रश्न:-4. यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 3A - 7I = 0$ तथा A^{-1} ज्ञात कीजिए।



प्रश्न:-5. यदि A तथा B कोई दो वर्ग आव्यूह हो तथा $AB=BA$ हो तो गणितीय आगमन से सिद्ध कीजिए कि $(AB)^n=A^nB^n$

प्रश्न:-6. प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूहों का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए—

$$\begin{aligned} \text{(i)} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{(ii)} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} & \text{(iii)} & \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} & \text{(iv)} & \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{(v)} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} & \text{(vi)} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

प्रश्न:-7. यदि $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-8. x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ समीकरण $A'A=I$ को संतुष्ट करता है।

सारणिक

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न(2 अंक)

प्रश्न:-1. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए कि $|2A| = 4|A|$

प्रश्न:-2. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(3,8), (-4,2)$ और $(5,1)$ हैं।

प्रश्न:-3. 4 वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाले किसी त्रिभुज के शीर्ष बिंदु $(k,0), (4,0), (0,2)$ हों, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न:-4. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ के सभी अवयवों के उपसारणिक एवं सहखंड ज्ञात कीजिए।

लघुउत्तरीय प्रश्न (4 अंक)

प्रश्न:-1. समीकरण निकाय $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+2y=7 \end{cases}$ को हल कीजिए।

प्रश्न:-2. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

प्रश्न:-3. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

प्रश्न:-4. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

प्रश्न:-5. यदि x, y, z विभिन्न हों और $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

तो दर्शाइए कि $1+xyz=0$



इकाई-3

अध्याय 5 — सांतव्य एवं अवकलनीयता

अति लघुत्तरीय प्रश्न (अंक - 2)

1. दर्शाइए कि फलन $f(x) = |\sin x + \cos x|$ बिंदु, $x = \pi$ पर संतत है।
2. दर्शाइए कि फलन $f(x) = |x - 5|$ बिंदु, $x = 5$ पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।
3. फलन $f(x) = \tan x \cdot \sec x$ के सांतव्य की जाँच कीजिए।
4. फलन $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ के सांतव्य होने की जाँच कीजिए।
5. दर्शाइए कि $f(x) = \sin(x)^2$ द्वारा परिभाषित फलन एवं संतत फलन है।
6. फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ का बिंदु $x = 3$ सांतव्यता की जाँच कीजिए।
7. फलन $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$ का बिंदु $x \neq -5$ सांतव्यता की जाँच कीजिए।
8. दर्शाइए कि फलन $f(x) = [x]$ जहाँ, $[x]$ एक महत्तम पूर्णांक फलन है बिन्दु $x = 1.5$ पर संतत है।
9. यदि $f(x) = \frac{1}{x-1}$ हो तो फलन के संयोजन $y = f[f(x)]$ के असंतत बिंदु ज्ञात कीजिए।
10. दर्शाइए कि फलन
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

बिंदु $x = 0$ पर संतत है।

11. फलन $f(x) = x|x|, \neq x \in R$ के लिए बिंदु $x = 0$ पर अवकलनीयता की जाँच कीजिए।
12. दर्शाइए कि फलन
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} & \text{यदि } x \neq 2 \\ 5 & \text{यदि } x = 2 \end{cases}$$
 बिंदु $x = 2$ पर संतत है अथवा असंतत

13. दर्शाइए कि फलन $f(x) = |\sin x + \cos x|$ बिंदु $x = \pi$ पर संतत है।

14. फलन f के सभी असांत्य बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जबकि

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{यदि } x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

15. f के सभी असांत्य बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जबकि फलन f निम्नलिखित रूप से परिभाषित है।

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{यदि } x < 2 \\ \frac{x}{x+1} & \text{यदि } x \geq 2 \end{cases}$$

16. f के सभी असांत्य बिंदुओं को ज्ञात कीजिए

जबकि

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{यदि } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

17. f के सभी असांत्य की जाँच कीजिए कि जहाँ f निम्नलिखित प्रकार में परिभाषित है।

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x & \text{यदि } x \neq 0 \\ -1 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

18. दिया गया फलन

$$f(x) = \begin{cases} Kx^2 & \text{यदि } x \leq 2 \\ 3 & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

बिंदु $x = 2$ पर संतत्य है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

19.

$$f(x) = \begin{cases} Kx + 1 & \text{यदि } x \leq \pi \\ \cos x & \text{यदि } x > \pi \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $x > \pi$ पर संतत है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

20. दर्शाइए कि फलन $f(x) = \cos(x)^2$ एक संतत फलन है।

21. यदि फलन $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases}$ एक संतत फलन है तो a का मान क्या होगा।

22. दिए गए फलनों का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए :-

(i) $\sin(\cos(x^2))$

(ii) $2^{\cos^2 x}$

(iii) $\log(\log(\log(x^5)))$

(iv) $\sec(\tan(\sqrt{x}))$

(v) $2\sqrt{\cot(x^2)}$

(vi) $y + \sin y = \cos y$

(vii) $\cot^{-1} x, x \in R$

(viii) $\sin x^2 + \sin^2 x + \sin^2(x^2)$

(ix) $\frac{.8^x}{x^8}$

(x) $\sin^2 y + \cos xy = k$

(xi) $e^{\sin^{-1} x}$

(xii) $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$

(xiii) $\sin(\tan^{-1}(e^{-x}))$

(xiv) $\frac{\cos x}{\log x}$

(xv) $\tan^{-1}(x^2 + y^2) = a$

(xvi) $(x^2 + y^2)^2 = xy$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (4 अंक)

दिए गए फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i) $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - 1 < x < 1$

(ii) $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^2}{1-3x^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

(iii) $y = \tan^{-1}(\sec x + \tan x), \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(iv) $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right); -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(v) $\cos^{-1}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

(vi) यदि $y = \tan^{-1} x$ हो तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान y के पदों में ज्ञात कीजिए।

(vii) यदि $x = e^{\frac{x}{y}}$ हो तो सिद्ध कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x \log x}$$

(viii) फलन $(\cos x)^y = (\cos y)^x$ के लिए $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ix) यदि $y^x = e^{y-x}$ हो तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \log y)^2}{\log y}$$

(x) यदि $x(\sin(x+y) + \sin a \cos(a+y)) = 0$ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin x}$$

(xi) यदि $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(xii) यदि $x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}, y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$ हो तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$

(xiii) फलन $\frac{x}{\sin x}$ का $\sin x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

(xiv) फलन $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ का $\tan^{-1} x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए जबकि $x \neq 0$

(xv) यदि $e^x(x+1) = 1$ हो तो दर्शाइए

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (6 अंक)

1. यदि $y = \sin^{-1} x$ हो तो दर्शाइए कि

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$$

2. यदि $y = (\tan^{-1} x)^2$ है तो दर्शाइए कि $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1) y_1 = 2$ है।

3. अंतराल $[1, 4]$ में $f(x) = x^2 - 4x - 3$ के लिए मध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए।

4. फलन $f(x) = \log(x^2+2) - \log 3; x \in [-1, 1]$ के लिए रोले का प्रमेय सत्यापित कीजिए।

5. फलन $f(x) = \sqrt{4-x^2}; x \in [-2, 2]$ के लिए रोले का प्रमेय सत्यापित कीजिए।

6. फलन $f(x) = \frac{1}{4x-1}$ $x \in (1, 4)$ के लिए मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

7. अंतराल $[0, \pi]$ में $f(x) = \sin x - \sin 2x$ के लिए मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।



अध्याय – 6

अवकलज के अनुप्रयोग

दीर्घ लघुत्तरीय प्रश्न (अंक – 4)

1. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है जिसका व्यास परिवर्तनशील है $3/2(2x+1)$ तो x के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।
2. एक 5 मीटर लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है सीढ़ी का नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश दीवार से दूर 2 सेमी प्रति से की दर से खींचा जाता है दीवार पर उसकी उँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 मीटर दूर है।
3. किसी आयत की लंबाई $3\text{ cm} / \text{min}$ की दर से घट रही है और चौड़ाई 2 सेमी प्रति मिनट की दर से बढ़ रही है जब लंबाई 10 सेमी तथा चौड़ाई 6 सेमी है तब आयत का परिमाण व क्षेत्रफल दोनों में परिवर्तन की दर से ज्ञात कीजिए।
4. एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगे वृत्तों में $5\text{ cm} / \text{s}$ की गति से चलती है जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 8 सेमी है तो उस क्षण घिरा हुआ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है।
5. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ से प्रदत्त फलन से प्रदत्त फलन वर्धमान तथा ह्रासमान है।
6. सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन $(0, \infty)$ में वर्धमान फलन है।
7. x के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $y = (x(x-2))^2$ एक वर्धमान फलन है।
8. सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{R}$ में दिया गया फलन $f(x) = 3x^2 + 3x - 100$ वर्धमान है।
9. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f वर्धमान या ह्रासमान है।
10. प्रवणता 2 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x^2 2x + 3}$ को स्पर्श करती है।
11. वक्र $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ
 (i) x-अक्ष के समान्तर (ii) y-अक्ष के समान है।
12. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिंदु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा 12 और अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

13. वक्र $y^2 = \sqrt{5x} = 2$ की उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $4x - 2y + 5 = 0$ के समान्तर है।
14. दिए गए वक्र $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$ का बिंदु $(0, 5)$ पर स्पर्श रेखा और अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।
15. प्रवणता 2 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y + \frac{2}{x-3} = 0$ को स्पर्श करती है।
16. $(25)^{1/3}$ का सन्निकटन करने के लिए आकलन का प्रयोग कीजिए।
17. $\sqrt{0.6}$ का सन्निकटन मान दशमलव के तीन स्थान तक ज्ञात कीजिए।
18. एक गोले की त्रिज्या 7 m मापी जाती है जिसमें 0.02 m की त्रुटि है इसके आयतन के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए।
19. $f(2.001)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$ है।
20. अंतराल $[0, 3]$ पर $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ में उच्चतम मान और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।
21. फलन $\sin x + \cos x$ का उच्चतम मान ज्ञात कीजिए।
22. $[0, 2\pi]$ पर फलन $x + \sin 2x$ का उच्चतम मान और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।
23. सिद्ध कीजिए कि एक दिए गए वृत्त के अंतर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चतम होता है।
24. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 24 तथा गुणनफल उच्चतम हों।
25. ऐसी दो घन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका 16 तथा उनके घनों का योग निम्नतम हो।



इकाई-3 समाकलन (Integration)

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न (1 अंक)

1. $\int \sin^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
2. $\int \sec^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
3. $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
4. $\int \frac{\sin(\tan x^{-1})}{1+x^2} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
5. $\int \sqrt{1+\cos 2x} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
6. $\int \frac{(\cos x + 1)}{(\sin x + x)} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न (2 अंक)

1. $\int \frac{2 - 3 \sin x}{\cos^2 x} \, dx$ का समाकलन कीजिए।
2. $\int \frac{\sec^2(\log x)}{x} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
3. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
4. $\int \frac{1}{1 - \cos x} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
5. $\int \frac{(1 - \cos 2x)}{(1 + \cos 2x)} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
6. $\int \frac{1}{\sqrt{16 - 9x^2}} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।



लघुउत्तरीय प्रश्न (4 अंक)

1. $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
2. $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
3. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।
4. $\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
5. $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
6. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4 \sin x + 5} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
7. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
8. $\int \frac{e^{x \tan^{-1} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
9. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए।
10. $\int \frac{1}{1 + \cot x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

अतिदीर्घ उत्तरीय प्रश्न (6 अंक)

1. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}$
2. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{\pi}{4}$
3. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{4}$
4. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{-\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$
5. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 - \sin x} dx = \pi$

6. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{\pi^2}{16}$
7. सिद्ध कीजिए कि $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} dx = \frac{\pi}{12}$
8. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x) dx = \frac{\pi}{8} \log_e^2$
9. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \left[\frac{4+3 \sin x}{4+3 \cos x} \right] dx = 0$

समाकलन के अनुप्रयोग (Application of Integrals)

अति दीर्घउत्तरीय प्रश्न (6 अंक)

- वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 32$ रेखा $y = x$ एवं x -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ रेखा $x = \sqrt{3}y$ एवं x -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- छेदक रेखा $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ द्वारा वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- यदि वक्र $x = y^2$ एवं रेखा $x = 4$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल रेखा $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है तो a का मान ज्ञात कीजिए।
- समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि जिसके शीर्ष $(1,0), (2,2)$ एवं $(3,1)$
- दो वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ एवं $(x-2)^2 + y^2 = 4$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाओं के समीकरण $y = 2x + 1, y = 3x + 1$ एवं $x = 4$ है।



अवकल समीकरण (Differential Equations)

अति लघुउत्तरीय प्रश्न (1 अंक)

1. अवकल समीकरण $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s \frac{d^2s}{dt^2} = 0$ की कोटि एवं घात बताइए।
2. अवकल समीकरण $x^3 \left(\frac{dy}{dx^2}\right)^2 + x \frac{dy}{dx} = 0$ की कोटि एवं घात बताइए।
3. अवकल समीकरण $5x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{d^2y}{dx^2} - 6y = \log x$ की कोटि एवं घात बताइए।
4. अवकल समीकरण $x \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + x^3 = 0$ की कोटि एवं घात बताइए।
5. अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} - y = 2x^2$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए।
6. अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए।

अति लघुउत्तरीय प्रश्न (2 अंक)

1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ वक्र कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।
3. क्या $y = a \cos x + b \sin x$ जहाँ $a, b \in R$, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का हल है ?
4. सिद्ध कीजिए कि $y = e^x + 1$ अवकल समीकरण $y'' + y' = 0$ का एक हल है।
5. बिंदु $(-2, 3)$ से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है।

लघुउत्तरीय प्रश्न (4 अंक)

1. अवकल समीकरण $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।
2. अवकल समीकरण $x \log x \frac{dy}{dx} + y \frac{2}{x} \log x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।
3. यदि $xy \frac{dy}{dx} = (x + 2)(y + 2)$ तो बिन्दु $(1, -1)$ से गुजरने वाले वक्र का हल ज्ञात कीजिए।
4. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \cos \sec\left(\frac{y}{x}\right) = 0, y = 0$ जब $x = 1$ का हल ज्ञात कीजिए।

- 
- 
5. अवकल समीकरण $\cos^2 x \frac{dx}{dy} + y = \tan x$ का हल ज्ञात कीजिए।
6. अवकल समीकरण $(x^2 + xy)dy = (x^2 + y^2)dx$ का हल ज्ञात कीजिए।
7. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x (x \neq 0)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए
दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = \frac{x}{2}$
8. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ का हल ज्ञात कीजिए।
9. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ जबकि $x \neq 1$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।
10. अवकल समीकरण $\frac{ydx - xdy}{y} = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।
- 



इकाई—04

सदिश बीजगणित (Vector Algebra)

01 अंक के प्रश्न

- 1) यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ हो तो $\vec{a}, \vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।
- 2) यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।
- 3) यदि कोई सदिश अक्षों ox, oy, oz के साथ क्रमशः α, β, γ कोण बनाती है, तब सिद्ध कीजिए कि $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$
- 4) सिद्ध कीजिए कि सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ तथा $-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ परस्पर लंब हैं।
- 5) यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं इस प्रकार हैं, कि $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$, और $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$, तो $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।
- 6) सदिश $\hat{i} + \hat{j}$ पर सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

04 अंक के प्रश्न

- 1) दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि उनके परिमाण समान हैं और इनके बीच का कोण 60° तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$
- 2) यदि दो इकाई सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण Q हो तो, सिद्ध कीजिए –

$$\sin \frac{Q}{2} = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{2}$$
- 3) सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- 4) किसी $\triangle ABC$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$a = b \cos C + c \cos B$$
 (सदिश विधि)
- 5) बल $\vec{F} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ द्वारा एक कण को सरल रेखा के अनुदिश बिन्दु $(3, 2, -1)$ से बिन्दु $(2, -1, 4)$ तक विस्थापित करने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।
- 6) सिद्ध कीजिए कि $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ और $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ से प्रत्येक पर लंब मात्रक सदिश $\left(\frac{\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}} \right)$ है।
- 7) उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो आसन्न भुजाएँ सदिशों $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ से निरूपित हैं।
- 8) λ का मान ज्ञात कीजिए यदि दो सदिश $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ और $-4\hat{i} - 6\hat{j} + \lambda\hat{k}$ (i) लम्बवत्, (ii) समान्तर हैं।
- 9) सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोज्या (cosine) ज्ञात कीजिए।

10) सिद्ध कीजिए कि

$$[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$$

11) सदिश $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ का $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

त्रिविमीय ज्यामिति (Three Dimensional Geometry)

02 अंक के प्रश्न

- 1) यदि किसी सरल रेखा की टिक-कोज्याएँ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$
- 2) सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ तथा $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$
- 3) उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x, y तथा z - अक्षों पर क्रमशः 2, 3 और 4 अन्तःखण्ड काटता है।
- 4) यदि एक रेखा के दिक् अनुपात 2, -1, -2 हैं तो इसकी दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए।
- 5) उस सरल रेखा की दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए जो अक्षों से समान कोण बनाती हैं।
- 6) यदि किसी सरल रेखा की दिक् कोज्याएँ $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ हो तो सिद्ध करो कि $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$

06 अंक के प्रश्न

- 1) (अ) समतलों $2x - y + z = 6$ और $x + y + 2z = 7$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।
(ब) सिद्ध कीजिए कि समतल $x + 2y + 3z = 6$ और $3x - 3y + z = 1$ परस्पर लम्बवत् है।
- 2) बिन्दुओं (2, 2, -1), (3, 4, 2) और (7, 0, 6) से जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।
- 3) सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + d(3\hat{i} - \hat{j})$ तथा $\vec{r} = 4\hat{i} - \hat{k} + a(2\hat{i} + 3\hat{k})$ प्रतिच्छेद करती हैं प्रतिच्छेद बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।
- 4) रेखाओं $\vec{r} = (1 + 2\lambda)\hat{i} + (2 + 3\lambda)\hat{j} + (3 + 4\lambda)\hat{k}$ तथा $\vec{r} = (2 + 3\mu)\hat{i} + (3 + 4\mu)\hat{j} + (4 + 5\mu)\hat{k}$ के बीच की न्यूनतम दूरी सदिश विधि से ज्ञात कीजिए।
- 5) एक समतल निर्देशाक्षों को क्रमशः A, B तथा C पर काटता है। यदि त्रिभुज ABC को केन्द्रक (2, -1, 3) है तो समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।



इकाई 5

रैखिक प्रोग्रामिंग

6 अंक के प्रश्न

- प्र.1 उद्देश्य फलन $z = 50x + 70y$ का न्यूनतम और अधिकतम मान निम्न असमिकाओं को ग्राफ द्वारा ज्ञात कीजिए।

$$x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \geq 8, x + 2 \geq 10$$

- प्र. 2 एक दवाई की कंपनी के कारखाने दो स्थानों A और B पर हैं। इन स्थानों से P, Q, R तीन एजेंसियों को आपूर्ति की जाती है। इन एजेंसियों की मासिक आवश्यकताएँ क्रमशः 40, 40 तथा 50 दवाइयों को पैकेटों की है, जबकि कारखानों A और B की उत्पादन क्षमताएँ क्रमशः 60 व 70 पैकेटों की हैं। कारखानों से एजेंसियों तक प्रति पैकेट के ढुलाई खर्च निम्नानुसार है –

प्रति पैकेट ढुलाई खर्च (रु. में)		
को	A (से)	B (से)
P	5	4
Q	4	2
R	3	5

प्रत्येक कारखाने से प्रत्येक एजेंसी को कितने पैसिल भेजने चाहिए कि ढुलाई की लागत न्यूनतम आए। न्यूनतम लागत भी ज्ञात कीजिए।

- प्र. 3 रेशमा दो प्रकार के भोज्य पदार्थ P और Q को इस प्रकार मिलाना चाहती है कि मिश्रण में विटामिन अवयवों में 8 मात्रक विटामिन A तथा 11 मात्रक विटामिन B हों। भोज्य पदार्थ P की लागत 60 रु. प्रति किग्रा और भोज्य पदार्थ Q की लागत 80 रु. प्रति किग्रा हैं। भोज्य पदार्थ P में 3 मात्रक/किग्रा विटामिन A और मात्रक/किग्रा विटामिन B है, जबकि भोज्य पदार्थ Q में 4 मात्रक/किग्रा विटामिन A और 2 मात्रक/किग्रा विटामिन B हैं। मिश्रण की न्यूनतम लागत ज्ञात कीजिए।

- प्र. 4 निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

न्यूनतम और अधिकतम $z = 5x + 10y$ निम्न व्यवरोधों के अंतर्गत

$$x + 2y \leq 120$$

$$x + y \geq 60$$

$$x - 2y \geq 0$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

- प्र. 5 एक फर्नीचर व्यापारी मेज तथा कुर्सियों का व्यापार करता है। वह दुकान में कुल 60 नग रखने का स्थान है। उसे 350 रु. में मेज तथा 100 रु. कुर्सी मिल रही है। मेज पर 50 रु. व कुर्सी में 30 रु. का लाभ मिलता है। यदि खरीदा गया सभी फर्नीचर बिक जायें, तो अधिकतम लाभ हेतु उसे कितनी कुर्सियों व मेज खरीदने चाहिए।

इकाई 6

प्रायिकता

02 अंक के प्रश्न

- प्र. 1 यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ हो तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ एवं $P\left(\frac{B}{A}\right)$ ज्ञात कीजिए।
- प्र. 2 यदि $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$ और $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.4$ हो तो $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए।
- प्र. 3 दो घनाकार पाने के साथ-साथ उछाले जाते हैं। पहले पाने पर विषम पाने पर विषम संख्या अथवा योग 9 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
- प्र. 4 दो स्वतंत्र घटनाएँ A व B की प्रायिकताएँ क्रमशः $P(A) = 0.30$, $P(B) = 0.75$ तो $P(\bar{A}\bar{B})$ तथा $P(A\bar{B})$ ज्ञात कीजिए।

04 अंक के प्रश्न

- प्र.1 एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
- (i) समस्या हल हो जाती है।
(ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।
- प्र.2 दो थैले A और B में क्रमशः 8 हरी और 9 सफेद तथा 5 हरी और 4 सफेद गेंदें रखी हैं। किसी एक थैले में से यदृच्छया एक गेंद निकाली जाती है जो कि हरी रंग की है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद थैले B से निकाली गयी है।
- प्र.3 मोहन द्वारा झूठ बोलने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। एक सिक्का उछालने पर मोहन द्वारा चित बताया गया, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि सिक्का उछालने पर वास्तव में चित आया है।
- प्र.4 अच्छी तरह फेंटी गई 52 ताश की एक गड्डी में से एक के बाद एक दो ताश प्रतिस्थापित करते हुए निकाले जाते हैं। बादशाह की संख्या के संगत प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

प्र.5 एक यादृच्छिक चर X के संगत प्रायिकता बंटन निम्नानुसार है –

X	0	1	2	3	4	5
$P(X)$	0	K	$2K$	K^2	$2K^2$	$2K^2 + K$

तब (i) K का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) $P(X < 2)$

(iii) $P(0 < X < 3)$

(iv) $P(X > 4)$

प्र.6 एक कलश में 5 लाल और 5 काली गेंदें हैं। यदृच्छया एक गेंद निकाली जाती है, इसका रंग नोट करने के बाद पुनः कलश में रख दी जाती है। पुनः निकाले गए रंग की दो अतिरिक्त गेंदें कलश में रख दी जाती है। तथा कलश में से एक गेंद निकाली जाती है। दूसरी गेंद की लाल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

प्र.7 एक सिक्के की दो उछालों में चितों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। साथ ही माध्य और प्रसरण भी ज्ञात कीजिए।

प्र.8 एक कंपनी दो फैक्ट्री में साइकिल बनाती है। पहले फैक्ट्री से 60% और दूसरी फैक्ट्री 40% साइकिल बनाती है। पहली फैक्ट्री से 80% साइकिल उच्च स्तर की और दूसरी फैक्ट्री 90% साइकिल उच्च स्तर की बनाई जाती है। एक साइकिल यदृच्छया उच्च स्तर का चुना गया। उसके दूसरी फैक्ट्री से होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।