अध्याय-1

संख्याओं की समझ

1.1 भूमिका

हम अपने स्कूल के बच्चों की संख्या, गाँव में रहने वाले व्यक्तियों की संख्या को गिन सकते हैं। वस्तुओं को गिनना अब हमारे लिए सरल है। हम वस्तुओं की संख्याओं को संख्यांकों (Numerals) द्वारा निरूपित कर सकते हैं तथा संख्या नामों (Number names) का प्रयोग करके संख्याओं से संबंधित सूचनाएँ भी दे सकते हैं।

हम संख्याओं का अनेक स्थितियों में प्रयोग करते हैं। संख्याएँ प्रत्यक्ष वस्तुओं को गिनने, वस्तुओं का कौन-सा संग्रह (Collection) बड़ा है, और कौन-सा संग्रह छोटा है, में इस्तेमाल होती हैं। ये वस्तुओं को पहले, दूसरे, तीसरे इत्यादि क्रम में व्यवस्थित करने में भी सहायता करती हैं।

अब आप भी पाँच ऐसी स्थितियों के बारे में सोचिए जहाँ आप संख्याओं का प्रयोग करते हैं।

हम संख्याओं के साथ कार्य करने का आनंद प्राप्त कर चुके हैं। हम इनके साथ योग, व्यवकलन (घटाने), गुणा और भाग की संक्रियाएँ भी कर चुके हैं। हम संख्या अनुक्रमों (Sequences) में प्रतिरूपों (Patterns) को देख चुके हैं और संख्याओं के साथ अनेक रुचिपूर्ण कार्य कर चुके हैं। आइए उनका दोहराव कर आगे कदम बढ़ाएँ।

1.2 संख्याओं की तुलना

आइए देखें कि क्या हमें याद है कि दी गई संख्याओं में कौन-सी संख्या सबसे बड़ी है?

(i) 85, 356, 8765, 78964 — मैं सबसे बड़ी हूँ

(ii) 1805, 1850, 8501, 8051, 8510 — मैं सबसे बड़ी हूँ

अपने दोस्तों में चर्चा कीजिए और पता कीजिए कि किसी संख्या समूह में वे सबसे बड़ी संख्या किस प्रकार ज्ञात करते हैं? क्या आप इसके लिए कोई नियम बना सकते हैं?

स्वयं करके देखिए

क्या आप ज्ञात कर सकते हैं कि प्रत्येक पंक्ति में कौन-सी संख्या सबसे बड़ी और कौन-सी संख्या सबसे छोटी है?

1. 4321, 432, 58, 58672, 540 — उत्तर : 58672 सबसे बड़ी है और 58 सबसे छोटी है।

2. 856, 4325, 36547, 32, 489 — उत्तर : .....

3. 9432, 582, 43, 678, 57892 — उत्तर : .....

4. 87, 943, 5678, 325, 87654 — उत्तर : .....

यहाँ हमने केवल अंकों की संख्या को देखकर ही उत्तर ज्ञात कर लिया। सबसे बड़ी संख्या में अधिकतम पाँच अंक (दस हजार) थे और सबसे छोटी संख्या दो अंकों (दहाइयों) में थी।

इसी प्रकार के पाँच और प्रश्न बनाइए और उन्हें हल करने के लिए अपने मित्रों को दीजिए। हम 5864 और 4783 की तुलना किस प्रकार करते हैं? यहाँ यह अधिक कठिन नहीं है क्योंकि दोनों संख्याओं में अंकों की संख्या समान है, परन्तु 5864 में हजार के स्थान का अंक 4783 के हजार के स्थान के अंक से बड़ा है, इसलिए 4783 से 5864 बड़ी है।

अब बताइए कि कौन-सी संख्या बड़ी है, 5876 या 5745? यहाँ भी दोनों संख्याओं में अंकों की संख्या समान (बराबर) है। साथ ही, दोनों में हजार के स्थान पर समान अंक हैं। अब हम क्या करते हैं? हम अगले अंक अर्थात् सौ के स्थान पर आने वाले अंकों को देखते हैं। 5876 में सौवें स्थान वाला अंक 5745 के सौवें स्थान वाले अंक से बड़ा है। अतः संख्या 5745 से संख्या 5876 बड़ी है।

यदि दोनों संख्याओं में सौ के स्थान वाले अंक भी समान होते तो हम क्या करते?

- आरोही क्रम/बढ़ते क्रम **(Ascending order/Increasing order)** : आरोही या बढ़ते क्रम का अर्थ है, सबसे छोटे से प्रारंभ कर सबसे बड़े तक व्यवस्थित करना। जैसे– 25, 326, 434, 217, 91 संख्याओं के समूह को आरोही क्रम में सजाने पर 25, 91, 217, 326, 434 इस प्रकार होता है।
- अवरोही क्रम/घटते क्रम **(Descending order/Decreasing order)** : अवरोही क्रम या घटते क्रम का अर्थ है सबसे बड़े से प्रारंभ कर सबसे छोटे तक व्यवस्थित करना। जैसे– 256, 127, 629, 39, 91 संख्याओं के समूह को अवरोही क्रम में जमाने पर 629, 256, 127, 91, 39 इस प्रकार होता है।

स्वयं करके देखिए

1. निम्नलिखित संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए–
   (a) 589, 9567, 8765, 876
   (b) 9654, 3257, 58305, 9875
2. निम्नलिखित संख्याओं को अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए–
   (a) 9000, 8700, 67800, 8735
   (b) 1876, 45321, 89715, 89254

इसी प्रकार आप अपने से अन्य संख्याएँ लेकर उन्हें आरोही/अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें।

1.2.3 संख्या 10000 का प्रवेश

हम जानते हैं कि 9 एक अंक की सबसे बड़ी संख्या है। 99 दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या है, इसी प्रकार 999 तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या है और चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या 9999 है। यदि हम 9999 में 1 जोड़ें, तो क्या प्राप्त होगा?

इस प्रतिरूप को देखिए–

$9 + 1 = 10$

$99 + 1 = 100$

$999 + 1 = 1000$

$9999 + 1 =$ ..... ?

हम देखते हैं कि एक अंक की सबसे बड़ी संख्या + 1 = दो अंकों की सबसे छोटी संख्या।

दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या + 1 = तीन अंकों की सबसे छोटी संख्या

तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या + 1 = चार अंकों की सबसे छोटी संख्या

इसी प्रकार हम कह सकते हैं कि चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या (9999) + 1 = पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या (10000) है। इसे **दस हजार** कहते हैं।

आइए करके देखें

दो अंकों की सबसे छोटी संख्या है ——

दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या है ——

10 से 99 तक की संख्याएँ दो अंकों की कुल संख्या कितनी है?

अब यदि हम 1 से 99 तक की संख्याओं में से 1 से 9 तक की संख्याएँ, अर्थात् कुल 9 संख्याओं को 99 से घटा दें तो $99 - 9 = 90$

कुल 90 संख्याएँ होंगी।

अतः दो अंकों की कुल संख्या =

दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या – एक अंक की सबसे बड़ी संख्या।

तीन अंकों की कुल कितनी संख्याएँ होंगी?

100, 101, 102 ..... 999 तक ही तीन अंकों की संख्याएँ होंगी। अर्थात् तीन अंकों की कुल संख्या = तीन अंकों की बड़ी सं०–दो अंकों की बड़ी सं०। यानी 999 – 99 = 900 संख्याएँ होंगी।

उदाहरण-1 : दशमलव पद्धति में 7 अंकों की कुल कितनी संख्याएँ होंगी?

हल : 7 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 9999999

6 अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 999999

अतः 7 अंकों की कुल संख्याएँ = 9000000 होंगी।

स्वयं करके देखिए

1. 5 अंकों की कुल कितनी संख्याएँ होंगी?
2. 4 अंकों की कुल कितनी संख्याएँ होंगी?

1.2.4 स्थानीय मान पर पुनर्दृष्टि

हम पिछली कक्षा में चार अंकों तक की संख्याओं में स्थानीय मान की जानकारी प्राप्त कर चुके हैं।

85 का प्रसारित रूप = 8 दहाई + 5 इकाई

= 80 + 5

= 8 x 10 + 5 x 1

385 = 3 सैकड़ा + 8 दहाई + 5 इकाई

= 300 + 80 + 5

$= 3 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1$

6385 $= 6$ हजार $+ 3$ सैकड़ा $+ 8$ दहाई $+ 5$ इकाई

$= 6000 + 300 + 80 + 5$

$= 6 \times 1000 + 3 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1$

इसी प्रकार 86385 का प्रसारित रूप

86385 $= 8$ दस हजार $+ 6$ हजार $+ 3$ सैकड़ा $+ 8$ दहाई $+ 5$ इकाई

$= 80000 + 6000 + 300 + 80 + 5$

$= 8 \times 10000 + 6 \times 1000 + 3 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1$

इस प्रकार 86385 को छियासी हजार तीन सौ पचासी पढ़ा जाता है।

पाँच अंकों वाली पाँच और संख्याएँ लिखिए, उन्हें पढ़िए और प्रसारित रूप में लिखिए।

1.2.5 संख्या 100000 का प्रवेश

हम जानते हैं कि पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या 99999 में 1 जोड़ने पर छः अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होती है। अर्थात् $99999 + 1 = 100000$, इसे **एक लाख** पढ़ा जाता है। साथ ही, $10,000 \times 10 = 1,00,000$

अब हम छः अंकों की संख्याओं का प्रसारित रूप लिख सकते हैं। जैसे–

$3,58,685 = 3 \times 100000 + 5 \times 10000 + 8 \times 1000 + 6 \times 100 + 8 \times 10 + 5 \times 1$

इस संख्या में इकाई के स्थान पर 5, दहाई के स्थान पर 8, सैकड़ा के स्थान पर 6, हजार के स्थान पर 8, दस हजार के स्थान पर 5 और लाख के स्थान पर 3 है। इस संख्या का नाम तीन लाख अठावन हजार छः सौ पचासी है।

स्वयं करके देखिए

संख्याओं को पढ़कर उन्हें खाली स्थानों में उनके नाम और प्रसारित रूप लिखिए–

संख्या	संख्या नाम	प्रसारित रूप
80000	अस्सी हजार	8 X 10000
850000	आठ लाख पचास हजार	8 X 100000 + 5 X 10000
85400	----------	----------
85460	----------	----------
76850	----------	----------
946587	----------	----------
854965	----------	----------
25632	----------	----------

1.2.6 आठ अंकों तक की संख्याएँ

निम्न प्रतिरूप को पूरा करें –

9 + 1 = 10

99 + 1 = 100

999 + 1 = 1000

9999 + 1 = 10000

99999 + 1 = ...

999999 + 1 = ...

9999999 + 1 = 1,00,00,000

याद रखिए

1 सौ = 10 दहाइयाँ

1 हजार = 10 सैकड़ा = 100 दहाइयाँ

1 लाख = 100 हजार = 1000 सैकड़ा

1 करोड़ = 100 लाख = 10,000 हजार

प्रतिरूप से स्पष्ट है कि छः अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ने पर सात अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होती है, जिसे **दस लाख** पढ़ा जाता है। इसी प्रकार सात अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ने पर आठ अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होती है, जिसे **एक करोड़** कहा जाता है।

दैनिक जीवन में हमें विभिन्न परिस्थितियों में बड़ी संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है। जब हम अपनी कक्षा के बच्चों की संख्या गिनते हैं तो दो अंकों की होती है, जबकि विद्यालय के सभी बच्चों की संख्या 3 या 4 अंकों में होती है। पता करें आपके पास के शहर में रहने वाले लोगों की संख्या कितने अंकों में हैं?

क्या आप अपने राज्य में रहने वाले लोगों की संख्या जानते हैं? इस संख्या में कितने अंक होंगे?

1.2.7 स्थानीय मान तालिका

संख्याओं को लिखने के लिए नीचे दी गई स्थानीय मान तालिका जिसे भारतीय स्थानीय मान चार्ट कहते हैं का प्रयोग करते हैं–

स्थान	दस करोड़ Ten Crores	करोड़ Crore	दस लाख Ten Lac	लाख Lac	दस हजार Ten Thousand	हजार Thousand	सैकड़ा Hundred	दहाई Ten	इकाई Unit
	10000000	10000000	1000000	100000	10000	1000	100	10	1

बड़ी संख्याओं को पढ़ने और लिखने में उपर्युक्त सारणी बड़ी सहायक होती है। सारणी के अनुसार किसी संख्या को निम्न प्रकार रख सकते हैं–

संख्या	T Cr.	Cr.	T.La	La	T.Th	Th	H	T	U	संख्या नाम
8,56,34,742	----	8	5	6	3	4	7	4	2	आठ करोड़ छप्पन लाख चौंतीस हजार सात सौ बयालीस
85,43,86,297	8	5	4	3	8	6	2	9	7	पचासी करोड़ तैंतालीस लाख छियासी हजार दो सौ संतानवे

आप संख्याओं के प्रसारित रूप लिखने में भी तालिकाओं का प्रयोग कर सकते हैं। उपर्युक्त सारणी में दी गई संख्याओं को प्रसारित कर लिखिए।

1.2.8 अल्पविरामों (commas) का प्रयोग

आपने देखा कि उपर्युक्त तालिकाओं में बड़ी संख्याओं को लिखने में अल्प विरामों का प्रयोग हुआ है जो संख्यांकन की भारतीय पद्धति (Indian system of numeration) है। इस पद्धति में हजारों, लाखों और करोड़ों को प्रदर्शित करने के लिए अल्पविरामों का प्रयोग करते हैं। पहला अल्प विराम सौ के स्थान (दाएँ से चलते हुए तीसरे अंक) के बाद आता है और हजारों को प्रदर्शित करता है। दूसरा अल्प विराम अगले दो अंकों (दाएँ से पाँचवें अंक) के बाद आता है। यह दस हजार के स्थान के बाद आता है और लाखों को प्रदर्शित करता है। तीसरा अल्पविराम अन्य दो अंकों (दाएँ से सातवें अंक) के बाद आता है। यह दस लाख के बाद आता है और करोड़ों को प्रदर्शित करता है।

उदाहरणार्थ– 6,07,02,592, 2,32,42,563, 7,29,04,256

संख्याओं के नाम लिखते समय हम अल्प विरामों का प्रयोग नहीं करते हैं।

ऊपर दी हुई संख्याओं को पढ़ने का प्रयत्न कीजिए। इसी रूप में पाँच और संख्याओं को लिखिए और फिर उन्हें पढ़िए।

1.2.9 अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति

संख्यांकन की अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में इकाई, दहाई, सौ, हजार और आगे मिलियन (Millions) एवं बिलियन (Billions) का प्रयोग किया जाता है। अल्प विराम दाएँ से प्रत्येक तीसरे अंक के बाद आता है।

उदाहरणार्थ 508, 432, 561 को अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में पाँच सौ आठ मिलियन चार सौ बत्तीस हजार पाँच सौ इकसठ पढ़ा जाता है। भारतीय संख्यांकन पद्धति में उक्त संख्या का 50, 84, 32, 561 लिखा जाएगा तथा इसे पचास करोड़ चौरासी लाख बत्तीस हजार पाँच सौ इकसठ पढ़ा जायेगा।

भारतीय संख्यांकन पद्धति के साथ अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति का सम्बन्ध

10 लाख = 1 मिलियन

1 करोड़ = 10 मिलियन

10 करोड़ = 100 मिलियन

1 अरब = 100 करोड़ = 1000 मिलियन = 1 बिलियन

आवर्त	अरब		करोड़		लाख		हजार		सैकड़ा	दहाई	इकाई
भारतीय सांख्यिकी पद्धति में संख्या का स्थान	दस अरब	अरब	दस करोड़	करोड़	दस लाख	लाख	द.	ह.	सै.	द.	इ.
अन्तर्राष्ट्रीय सांख्यिकी पद्धति में संख्या का स्थान	दस बिलियन	एक बिलियन	सौ मिलियन	दस मिलियन	एक मिलियन	सौ हजार	दस हजार	ह.	सै.	द.	इ.

अब बताइए

(1) कितने लाख से एक मिलियन बनता है?

(2) कितने मिलियन से एक करोड़ बनता है?

(3) एक बिलियन कितने मिलियन के बराबर होता है?

(4) एक लाख को अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति में क्या कहते हैं?

सारणी में जहाँ एक मिलियन है, वहाँ ठीक ऊपर भारतीय पद्धति में दस लाख है।

क्या आप जानते हैं कि इस समय भारत की जनसंख्या कितनी है? पता करें और अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति में बदलें।

प्रश्नावली – 1.1

1. रिक्त स्थानों को भरिए–

(a) 1 लाख = ... दस हजार

(b) 1 मिलियन = ... सौ हजार

(c) 1 करोड़ = ... दस लाख

(d) 1 करोड़ = ... मिलियन

(e) 1 मिलियन = ... लाख

2. सही स्थानों पर अल्प विराम लगाते हुए संख्यांकों को लिखिए–

(a) तिहत्तर लाख पचहत्तर हजार तीन सौ सात

(b) नौ करोड़ पाँच लाख इकतालिस

(c) सात करोड़ बावन लाख इक्कीस हजार तीन सौ दो

(d) अट्ठावन मिलियन चार सौ तेइस हजार दो सौ दो

(e) तेइस लाख तीस हजार दस

3. निम्न संख्याओं को मारतीय संख्यांकन पद्धति एवं अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति दोनों में उपयुक्त स्थानों पर अल्प विराम लगाते हुए लिखिए तथा उनके संख्या नाम भी लिखिए–

(a) 87595762 (b) 85462283

(c) 99900046 (d) 98432701

1.3 बड़ी संख्याओं का दैनिक जीवन में प्रयोग

पिछली कक्षाओं में, हम लम्बाई के मात्रक या इकाई (unit) के बारे में पढ़ चुके हैं। हमने पेंसिल की लम्बाई, अपनी पुस्तक की लम्बाई-चौड़ाई इत्यादि मापने के लिए सेन्टीमीटर का प्रयोग किया है। हमारे रूलर पर सेन्टीमीटर के चिह्न अंकित होते हैं। परंतु अपने नाखून की लम्बाई मापने के लिए हम पाते हैं कि सेंटीमीटर एक बड़ा मात्रक है। अतः हम एक छोटे मात्रक मिलीमीटर (मिमी) का प्रयोग करते हैं।

(a) 1 सेन्टीमीटर = 10 मिलीमीटर

परन्तु अपनी कक्षा के कमरे की लम्बाई या स्कूल के भवन की लम्बाई मापने के लिए, हम पाते हैं कि सेन्टीमीटर तक बहुत छोटा मात्रक है। अतः इस कार्य के लिए हम मीटर का प्रयोग करते हैं।

(b) 1 मीटर = 100 सेन्टीमीटर = 1000 मिलीमीटर

अब यदि हमें दो शहरों के बीच की दूरियाँ बतानी हो तो मीटर भी एक बहुत छोटा मात्रक होता है। इसके लिए हम एक बड़े मात्रक किलोमीटर (किमी) का प्रयोग करते हैं।

(c) 1 किलोमीटर = 1000 मीटर

स्वयं करके देखिए

1. कितने सेंटीमीटर से 1 किलोमीटर बनता है?
2. यदि आप बाजार में गेहूँ या चावल खरीदने जाते हैं, तो किस मात्रक (इकाई) में चावल-गेहूँ खरीदते हैं? क्या मिर्च या अदरक उसी मात्रक में खरीदते हैं?

आपको याद होगा

1 किलोग्राम = 1000 ग्राम

तथा 1 क्विंटल = 100 किलोग्राम

बीमार पड़ने पर जो दवाई दी जाती है, उसके भार मिलीग्राम (मिग्रा) में होता है। यह बहुत छोटी इकाई है।

1 ग्राम = 1000 मिलीग्राम

250 ग्राम = $\frac{1}{4}$ किलोग्राम (इसे एक पाव भी कहा जाता है।)

स्वयं करके देखिए

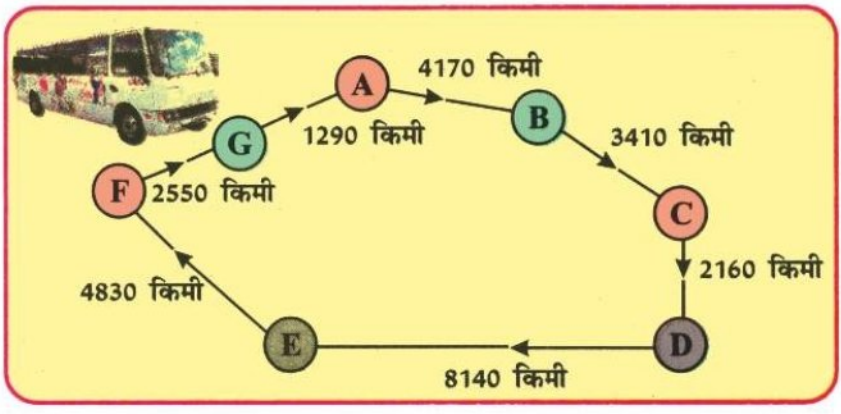
1. दवाई की गोलियों के एक बक्से में 1,00,000 गोलियाँ हैं, जिनमें प्रत्येक का भार 20 मिग्रा है। इस बक्से में रखी सभी गोलियों का कुल भार ग्रामों में कितना है और किलोग्राम में कितना है?

पानी वाली एक साधारण बाल्टी की धारिता प्रायः 20 लीटर होती है। धारिता को लीटर में दर्शाया जाता है, परन्तु कभी-कभी हमें एक छोटे मात्रक की भी आवश्यकता पड़ती है। यह मात्रक मिलीलीटर है। **1 लीटर = 1000 मिलीलीटर**

पता कीजिए आपके घर में आने वाली वस्तुओं में किन-किन की माप मिलीलीटर में होती है?

प्रयास कीजिए

1. एक बस ने अपनी यात्रा प्रारंभ की और 40 किमी/घंटा की चाल से विभिन्न स्थानों पर पहुँची। इस यात्रा को नीचे दर्शाया गया है–



अब ज्ञात कीजिए

(i) A से D तक जाने में बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

(ii) D से G तक जाने में बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

(iii) बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

(iv) C से D तक और D से E तक की दूरियों का अंतर ज्ञात कीजिए।

(v) बस द्वारा निम्नलिखित यात्रा में लगा समय ज्ञात कीजिए–

(a) A से B तक (b) C से D तक

(c) E से G तक (d) कुल यात्रा

2. रमन की दुकान की तालिका नीचे दी गई है–

बेची गई वस्तुएँ	दर	वजन / नग
सेब	60 रु. प्रति किग्रा	2000 किग्रा
संतरा	40 रु. प्रति किग्रा	3004 किग्रा
कंघा	4 रु. प्रति नग	25000 नग
दाँतों का ब्रुश	15 रु. प्रति नग	24050 नग
पेंसिल	4 रु. प्रति नग	32542 नग
अभ्यास पुस्तिका	10 रु. प्रति नग	40002 नग
साबुन की टिकिया	9 रु. प्रति नग	20005 नग

(a) रमन द्वारा बेचे गए सेब और संतरों का कुल भार ज्ञात कीजिए।

(b) सेबों को बेचने से प्राप्त कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

(c) सेबों और संतरों को बेचने से प्राप्त कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

(d) रमन द्वारा प्रत्येक वस्तु को बेचने से प्राप्त धनराशि को दर्शाने वाली एक सारणी बनाइए। धनराशि की इन प्रविष्टियों को अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए। वह कौन-सी वस्तु है जिससे रमन को सबसे अधिक धनराशि प्राप्त हुई? यह धनराशि क्या है?

जोड़, घटाव, गुणा और भाग पर हम अनेक प्रश्न कर चुके हैं। यहाँ हम ऐसे कुछ और प्रश्न करेंगे। प्रारंभ करने से पहले निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए तथा प्रश्नों के विश्लेषण का अनुसरण कीजिए और देखिए कि इन्हें किस प्रकार हल किया गया है।

उदाहरण-1 : वर्ष 1991 में भागलपुर की जनसंख्या 2, 35,471 थी। वर्ष 2001 में पता चला कि जनसंख्या में 70,958 की वृद्धि हुई। तो बताएँ कि वर्ष 2001 में इस शहर की जनसंख्या क्या थी?

हल : 2001 में शहर की जनसंख्या = 1991 में जनसंख्या + जनसंख्या में वृद्धि

= 2, 35,471 + 70,958

(i)
$$\begin{array}{r} 235471 \\ +70958 \\ \hline 306429 \end{array}$$

सलमा ने किया : 235471 = 200000 + 35000 + 471 तथा 70958

= 70000 + 958

और फिर 200000 + 105000 + 1429 = 306429

तथा मैरी ने किया–

200000 + 35000 + 400 + 71 + 70000 + 900 + 58 = 306429

इस प्रकार 2001 में शहर की जनसंख्या 3,06,429 प्राप्त हुई।

यहाँ तीनों ही विधियाँ सही हैं।

उदाहरण-2 : किसी राज्य में वर्ष 2002-2003 में 7,43,000 साइकिलें बेची गईं। वर्ष 2003-2004 में बेची गई साइकिलों की संख्या 8,00,100 थी। किस वर्ष में अधिक साइकिलें बेची गईं और कितनी अधिक बेची गईं?

हल : स्पष्ट है कि संख्या 8,00,100 संख्या 7,43,000 से अधिक है। अतः, उस राज्य में वर्ष 2003-2004 में वर्ष 2002-2003 से अधिक साइकिलें बेची गईं।

800100
−743000
अतः 057100

वर्ष 2003-2004 में 57,100 साइकिलें अधिक बेची गईं।

जोड़कर उत्तर की जाँच कीजिए–

743000
+57100

(उत्तर सही है– हाँ / नहीं)

क्या आप इसे करने के और भी तरीके सोच सकते हैं?

उदाहरण-3 : एक शहर में समाचार पत्र की एक प्रति में 12 पृष्ठ होते हैं। प्रतिदिन इस समाचार पत्र की 11,980 प्रतियाँ छपती हैं, तो बताइए प्रतिदिन कितने पृष्ठ छपते हैं।

हल : प्रत्येक प्रति में 12 पृष्ठ हैं।

इसलिए 11,980 प्रतियों में 12 × 11980 पृष्ठ होंगे।

अतः

$$\begin{array}{r} 11980 \\ \times 12 \\ \hline 23960 \\ +\ 119800 \\ \hline 143760 \\ \hline \end{array}$$

प्रतिदिन सभी प्रतियों के लिए 1,43,760 पृष्ठ छपते हैं।

उदाहरण-4 : पुस्तकों को बनाने के लिए कागज की 75,000 शीट (Sheet) उपलब्ध हैं। प्रत्येक शीट से पुस्तक के 8 पृष्ठ बनते हैं। प्रत्येक पुस्तक में 200 पृष्ठ हैं। उपलब्ध कागज से कितनी पुस्तकें बनाई जा सकती हैं?

हल : प्रत्येक शीट में 8 पृष्ठ बनते हैं। अतः 75,000 शीटों से 8 × 75000 पृष्ठ बनेंगे।

$$\begin{array}{r} 75000 \\ \times\ \ 8 \\ \hline 600000 \end{array}$$

इस प्रकार पुस्तकों को बनाने के लिए 6,00,000 पृष्ठ उपलब्ध हैं।

अब, 200 पृष्ठों से एक पुस्तक बनती है।

इसलिए 6,00,000 पृष्ठों से 6,00,000 ÷ 200 पुस्तकें बनेंगी।

अब,

$$
\begin{array}{r}
3000 \\
200 \overline{)\,600000} \\
\underline{600} \\
000 \\
\underline{} \\
\end{array}
$$

इस प्रकार उपलब्ध कागज से 3000 पुस्तकें बनाई जा सकती हैं।

प्रश्नावली – 1.2

1. किसी स्कूल में चार दिन के लिए एक पुस्तक प्रदर्शनी आयोजित की गई। पहले, दूसरे, तीसरे और अंतिम दिन खिड़की पर क्रमशः 1094, 1812, 2050 और 2751 टिकट बेचे गए। इन चार दिनों में बेचे गए टिकटों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

2. शेखर एक प्रसिद्ध क्रिकेटर खिलाड़ी है। वह टेस्ट मैचों में अब तक 6980 रन बना चुका है। वह 10,000 रन पूरे करना चाहता है। उसे कितने और रनों की आवश्यकता है?

3. एक चुनाव में, सफल प्रत्याशी ने 5,77,500 मत प्राप्त किए, जबकि उसके निकटतम प्रतिद्वन्द्वी ने 3,48,700 मत प्राप्त किए। सफल प्रत्याशी ने चुनाव कितने मतों से जीता?

4. कीर्ति बुक-स्टोर ने जून के प्रथम सप्ताह में 2,85,891 रु. मूल्य की पुस्तकें बेचीं। इसी माह के दूसरे सप्ताह में 4,00,768 रु. मूल्य की पुस्तकें बेची गईं। दोनों सप्ताहों में कुल मिलाकर कितनी बिक्री हुई? किस सप्ताह में बिक्री अधिक हुई और कितनी अधिक?

5. अंकों 6, 2, 7, 4 और 3 में से प्रत्येक का केवल एक बार प्रयोग करते हुए बनाई जा सकने वाली सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याएँ लिखिए तथा उन संख्याओं का अंतर ज्ञात कीजिए।

6. एक मशीन औसतन एक दिन में 2,825 पेंच बनाती है। जनवरी 2006 में उस मशीन ने कितने पेंच बनाए?

7. एक व्यापारी के पास 78,592 रु. थे। उसने 40 रेडियो खरीदे, प्रत्येक रेडियो का मूल्य 1200 रु. था। इस खरीददारी के बाद उसके पास कितनी धनराशि शेष रह गई?

8. एक विद्यार्थी ने 7236 × 56 में 56 के स्थान पर 65 से गुणा कर दिया। उसका उत्तर सही उत्तर से कितना अधिक था? (**संकेत** : दोनों गुणा करना आवश्यक नहीं है)।

9. एक कमीज सीने के लिए 2 मी 15 सेमी कपड़े की आवश्यकता है। 40 मी कपड़े में से कितनी कमीजें सीलाई जा सकती हैं और कितना कपड़ा शेष बच जाएगा?

10. दवाइयों को बक्सों में भरा गया है और ऐसे प्रत्येक बक्से का भार 4 किग्रा 500 ग्रा है। एक वैन, में 800 किग्रा से अधिक का भार नहीं ले जा सकती, ऐसे कितने बक्से लादे जा सकते हैं?

11. किसी विद्यार्थी के घर और स्कूल के बीच की दूरी 1 किमी 875 मी है। प्रत्येक दिन यह दूरी दो बार तय की जाती है। 6 दिन में उस विद्यार्थी द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

12. एक बर्तन में 4 ली 500 मिली दही है। 250 मिली धारिता वाले कितने गिलासों में इसे भरा जा सकता है?

1.4 आकलन

क्या हम विश्वास के साथ कह सकते हैं कि इन समाचारों में जितने व्यक्ति कहे गए हैं वहाँ ठीक उतने ही व्यक्ति थे? उदाहरणार्थ,

(a) क्या स्टेडियम में ठीक 51,000 दर्शक थे?

(b) क्या टेलीविजन पर ठीक 40 मिलियन लोगों ने मैच देखा?

समाचार

1. *भारत और पाकिस्तान के बीच हुए एक हॉकी मैच को जिसे स्टेडियम में 51,000 दर्शकों ने देखा और विश्व भर में 40 मिलियन लोगों ने टेलीविजन पर देखा।*
2. *भारत और बांगलादेश के तटवर्तीय क्षेत्रों में आए एक चक्रवाती तूफान में लगभग 2000 व्यक्तियों की मृत्यु हो गई और 50000 से अधिक घायल हुए।*
3. *रेलवे द्वारा प्रतिदिन 63,000 किलोमीटर से अधिक रेलपथ पर 13 मिलियन से अधिक यात्री यात्रा करते हैं।*

6. एक मशीन औसतन एक दिन में 2,825 पेंच बनाती है। जनवरी 2006 में उस मशीन ने कितने पेंच बनाए?

7. एक व्यापारी के पास 78,592 रु. थे। उसने 40 रेडियो खरीदे, प्रत्येक रेडियो का मूल्य 1200 रु. था। इस खरीददारी के बाद उसके पास कितनी धनराशि शेष रह गई?

8. एक विद्यार्थी ने 7236 × 56 में 56 के स्थान पर 65 से गुणा कर दिया। उसका उत्तर सही उत्तर से कितना अधिक था? (**संकेत** : दोनों गुणा करना आवश्यक नहीं है)।

9. एक कमीज सीने के लिए 2 मी 15 सेमी कपड़े की आवश्यकता है। 40 मी कपड़े में से कितनी कमीजें सीलाई जा सकती हैं और कितना कपड़ा शेष बच जाएगा?

10. दवाइयों को बक्सों में भरा गया है और ऐसे प्रत्येक बक्से का भार 4 किग्रा 500 ग्रा है। एक वैन, में 800 किग्रा से अधिक का भार नहीं ले जा सकती, ऐसे कितने बक्से लादे जा सकते हैं?

11. किसी विद्यार्थी के घर और स्कूल के बीच की दूरी 1 किमी 875 मी है। प्रत्येक दिन यह दूरी दो बार तय की जाती है। 6 दिन में उस विद्यार्थी द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

12. एक बर्तन में 4 ली 500 मिली दही है। 250 मिली धारिता वाले कितने गिलासों में इसे भरा जा सकता है?

1.4 आकलन

क्या हम विश्वास के साथ कह सकते हैं कि इन समाचारों में जितने व्यक्ति कहे गए हैं वहाँ ठीक उतने ही व्यक्ति थे? उदाहरणार्थ,

(a) क्या स्टेडियम में ठीक 51,000 दर्शक थे?

(b) क्या टेलीविजन पर ठीक 40 मिलियन लोगों ने मैच देखा?

समाचार

1. *भारत और पाकिस्तान के बीच हुए एक हॉकी मैच को जिसे स्टेडियम में 51,000 दर्शकों ने देखा और विश्व भर में 40 मिलियन लोगों ने टेलीविजन पर देखा।*
2. *भारत और बांगलादेश के तटवर्तीय क्षेत्रों में आए एक चक्रवाती तूफान में लगभग 2000 व्यक्तियों की मृत्यु हो गई और 50000 से अधिक घायल हुए।*
3. *रेलवे द्वारा प्रतिदिन 63,000 किलोमीटर से अधिक रेलपथ पर 13 मिलियन से अधिक यात्री यात्रा करते हैं।*

स्पष्टतः, नहीं। शब्द लगभग स्वयं यह दर्शाता है कि व्यक्तियों की संख्याएँ इन संख्याओं के निकटतम थीं। स्पष्ट रूप से, 51000 संख्याओं 50800 या 51300 में से कोई भी संख्या हो सकती है, परन्तु 70000 नहीं होगी। इसी प्रकार, 40 मिलियन का अर्थ 39 मिलियन से अधिक और 41 मिलियन से कुछ कम हो सकता है। परन्तु निश्चित ही इसका अर्थ 50 मिलियन नहीं है।

इसी प्रकार, भारतीय रेलवे द्वारा यात्रा करने वाले यात्रियों की वास्तविक संख्या दी हुई संख्या के बराबर नहीं हो सकती है। परंतु इससे कुछ अधिक या कम हो सकती है। इन उदाहरणों में दी गई संख्याओं को ठीक-ठीक गिनकर (या यथार्थ रूप से) नहीं लिखा गया है, बल्कि ये उस संख्या के बारे में अनुमान देने वाले आकलन (Estimate) हैं।

चर्चा कीजिए कि इनसे क्या सुझाव मिलते हैं।

हम सन्निकट (approximate) मान कहाँ निकालते हैं?

अपने घर पर होने वाले एक बड़े उत्सव की कल्पना कीजिए। पहला काम जो आप करेंगे वह यह होगा कि आप यह पता करेंगे कि आपके घर पर लगभग कितने मेहमान आ सकते हैं।

क्या आप मेहमानों की ठीक (exact) संख्या का विचार लेकर प्रारंभ कर सकते हैं?

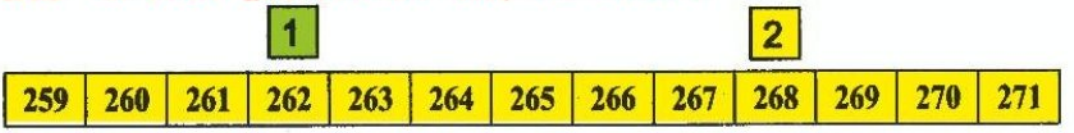
व्यावहारिक रूप से यह असंभव है।

हमारे देश के वित्त मंत्री प्रति वर्ष बजट पेश करते हैं। मंत्री महोदय 'शिक्षा' मद के अंतर्गत कुछ राशि का प्रावधान रखते हैं। क्या यह राशि यथार्थ रूप से सही होगी? यह उस वर्ष देश में शिक्षा पर व्यय होने वाली आवश्यक धनराशि का केवल एक विवेकसंगत अच्छा अनुमान या आकलन (estimate) हो सकता है।

कुछ करें

उन स्थितियों के बारे में सोचिए जहाँ आपको ठीक-ठीक संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है तथा इनकी उन स्थितियों से तुलना कीजिए जहाँ आप केवल एक आकलित (estimated) संख्या से ही काम चला लेते हैं। ऐसी स्थितियों के तीन उदाहरण दीजिए।

1.4.1 सन्निकटन द्वारा निकटतम दहाई तक आकलन



ज्ञात कीजिए कि संख्या 1 और संख्या 2 में से–

(a) कौन-सी संख्या 270 की तुलना में 260 के अधिक समीप हैं।

(b) कौन-सी संख्या 260 की तुलना में 270 के अधिक समीप हैं।



पटरी की संख्याओं 10, 17 और 20 के स्थानों को देखिए। क्या संख्या 17, संख्या 10 के अधिक निकट है या 20 के? 17 और 20 के बीच का रिक्त स्थान 17 और 10 के बीच के रिक्त स्थान की तुलना में कम है। इसलिए, हम 17 को निकटतम दहाई तक 20 के रूप में सन्निकटित करते हैं।

अब 12 को लीजिए। यह भी 10 और 20 के बीच स्थित है। परंतु 12, संख्या 20 की तुलना में 10 से अधिक निकट है। इसलिए हम 12 को निकटतम दहाई तक 10 के रूप में सन्निकटित करते हैं। आप 72 को निकटतम दहाई किस पर सन्निकटित करेंगे? यह 70 के निकट है या 80 के निकट, पता कीजिए।

हम देखते हैं कि संख्याएँ 1, 2, 3 और 4, संख्या 10 की तुलना में संख्या 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए हम इन्हें 0 के रूप में पिछली दहाई में सन्निकटित करते हैं। संख्याएँ 6,7,8 और 9 संख्या 10 के अधिक निकट हैं। इसलिए हम इन्हें अगली दहाई के रूप में सन्निकटित करते हैं। संख्या 5, संख्याओं 9 और 10 के बराबर की दूरी पर है। यह सामान्य परिपाटी है कि इसे 10 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। जैसे– 72 को 70, 76 को 80 तथा 75 को भी 80 में सन्निकटित करेंगे।

प्रयास कीजिए

इन संख्याओं को निकटतम दहाई तक सन्निकटित कीजिए–

19	36	54	43	36	15
61	57	99	215	446	2936

1.4.2 सन्निकटन द्वारा निकटतम सैकड़े तक आकलन

संख्या 520 संख्या 500 के अधिक निकट है या 600 के अधिक निकट है?

520, संख्या 500 के अधिक निकट (समीप) है, इसलिए इसे निकटतम सौ तक 500 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

इसी प्रकार संख्या 889, संख्याओं 800 और 900 के बीच में है। यह 900 के अधिक निकट है। इसलिए, इसे निकटतम सौ तक 900 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

संख्याएँ 1 से 49, संख्या 100 की तुलना में, संख्या 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 0 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। 51 से 99 तक की संख्याएँ 0 की तुलना में 100 से अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 100 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। संख्या 50 संख्याओं 0 और 100 से बराबर दूरी पर है। सामान्य परिपाटी अनुसार, इसे 100 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

जाँच कीजिए कि निम्नलिखित सन्निकटन (सैकड़े तक) सही हैं या नहीं–

841 → 800 ;	9537 → 9500;	49730 → 49700
6546 → 6500 ;	286 → 300 ;	5750 → 5800
168 → 200 ;	149 → 100;	399 → 980

उन्हें सही कीजिए जो गलत हैं।

1.4.3 सन्निकटन द्वारा निकटतम हजार तक आकलन

हम जानते हैं कि 1 से 499 तक की संख्याएँ 1000 की तुलना में 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 0 के रूप में सन्निकटित करते हैं। 501 से 999 तक की संख्याएँ 0 की तुलना में 1000 के अधिक निकट है। इसलिए, इन्हें 1000 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। संख्या 500 को भी 1000 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

1. निम्नलिखित सन्निकटनों की जाँच कीजिए और उन्हें सही कीजिए जो गलत हैं–

1873	→	2000;	9537	→	9500
5750	→	5800	65437	→	65000
7805	→	7000;	3498	→	4000

प्रयास कीजिए

तालिका पूरी कीजिए–

संख्या	निकटतम	सन्निकटित रूप
65748	दहाई	.....
65748	सौ	.....
65748	हजार	.....
65748	दस हजार	.....

1.4.4 संख्या संक्रियाओं के परिणामों का आकलन

हम संख्याओं को किस प्रकार जोड़ते हैं? हम संख्याओं को एक एल्गोरिद्म (Algorithm) (दी हुई विधि) का चरणबद्ध रूप से प्रयोग करते हुए जोड़ते हैं। हम संख्याओं को यह ध्यान रखते हुए लिखते हैं कि एक ही स्थान (इकाई, दहाई, सौ, इत्यादि) के अंक एक ही स्तंभ (Column) में रहें। उदाहरणार्थ, 3946 + 6579 + 2050 को निम्न रूप में लिखते हैं–

	Th	H	T	O
	3	9	4	6
	6	5	7	9
+	2	0	5	0

फिर हम इकाई वाले स्तंभ की संख्याओं को जोड़ते हैं। यदि आवश्यक हो, तो हम एक उचित संख्या को हासिल के रूप में दहाई के स्थान पर ले जाते हैं, जैसे कि इस स्थिति में है। फिर हम इसी प्रकार दहाई के स्तंभ पूर्ण कर सकते हैं। इस प्रक्रिया में स्पष्टतः समय लगता है।

अनेक स्थितियों में हमें उत्तरों को अधिक तीव्रता से ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, जब आप किसी मेले या बाजार में कुछ धनराशि लेकर जाते हैं तो आकर्षक वस्तुओं की किस्मों और मात्राओं को देखकर वहाँ आप सोचते हैं कि सभी को खरीद लिया

जाए। आपको तुरन्त यह निर्णय लेने की आवश्यकता होती है कि आप किन-किन वस्तुओं को खरीद सकते हैं। इसके लिए आपको आवश्यक धनराशि का आकलन करने की आवश्यकता पड़ती है जो उन वस्तुओं के मूल्यों का योग होती है जिन्हें आप खरीदना चाहते हैं।

किसी विशेष दिन, एक व्यापारी को दो स्थानों से धनराशि प्राप्त होनी है। एक स्थान से प्राप्त होने वाली धनराशि 13,569 रु. है और अन्य स्थान से प्राप्त होने वाली धनराशि 26,785 रु. है। उसे शाम तक किसी अन्य व्यक्ति को 37,000 रु. देने हैं। वह संख्याओं को उनके निकटतम हजारों तक सन्निकटित करता है और तुरन्त कच्चा या रफ (rough) उत्तर निकाल लेता है। वह खुश हो जाता है कि उसके पास पर्याप्त धनराशि है। क्या आप सोचते हैं कि उसके पास पर्याप्त धनराशि होगी? क्या आप बिना यथार्थ योग किए यह बता सकते हैं?

शीला और मोहन को अपना मासिक बजट बनाना है। उन्हें परिवहन, स्कूल की आवश्यकताओं, किराने का सामान, दूध और कपड़ों पर होने वाले अपने मासिक व्यय के बारे में भी जानकारी है तथा अन्य नियमित व्ययों की भी जानकारी है। इस महीने में उन्हें घूमने भी जाना है और उपहार भी खरीदने हैं। वे इन सभी पर होने वाले व्ययों का आकलन करते हैं और उन्हें जोड़कर देखते हैं कि जो राशि उनके पास है वह पर्याप्त है या नहीं। क्या वे हजारों तक सन्निकटित करेंगे, जैसा कि व्यापारी ने किया था? ऐसी पाँच और स्थितियों के बारे में सोचिए और चर्चा कीजिए, जहाँ हमें योग या अंतरों का आकलन करना पड़ता है। क्या हम इन सभी में एक ही स्थान तक सन्निकट मान ज्ञात करते हैं?

जब आप संख्याओं के परिणामों का आकलन करते हैं तो उसके लिए कोई निश्चित नियम नहीं है। यह विधि इस पर निर्भर करती है कि परिशुद्धता की वांछित मात्रा कितनी है, आकलन कितनी जल्दी चाहिए तथा सबसे महत्त्वपूर्ण बात है कि अनुमानित उत्तर कितना अर्थपूर्ण होगा।

1.4.5 योग अथवा अंतर का आकलन

जैसा कि हमने ऊपर देखा, हम एक संख्या को किसी भी स्थान तक सन्निकटित कर सकते हैं। व्यापारी ने धनराशि को निकटतम हजारों तक सन्निकटित किया और संतुष्ट हो गया कि उसके पास पर्याप्त धनराशि है। इसलिए जब आपको किसी योग अथवा अंतर का आकलन

करना है, तो आपको यह पता होना चाहिए कि आप क्यों सन्निकटित कर रहे हैं और इसलिए किस स्थान तक आपको सन्निकटित करना है। निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए–

उदाहरण-1 : 4380 + 15785 का आकलन कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि 15785 > 4380 है।

हम निकटतम हजारों तक सन्निकटित करते हैं।

15785 सन्निकटित मान →	16,000
+ 4380 सन्निकटित मान →	+4000
आकलित योग →	20,000

क्या यह विधि काम करती है? आप यथार्थ उत्तर ज्ञात करके जाँच कर सकते हैं कि यह आकलन विवेकपूर्ण है या नहीं।

उदाहरण-2: 4875 – 484 का आकलन कीजिए।

हल :

4875 सन्निकटित मान (हजारों में) →	5,000
–484 सन्निकटित मान → (हजारों में)	–0
आकलित अंतर →	5,000

यह विवेकपूर्ण आकलन नहीं है। यह विवेकपूर्ण क्यों नहीं है? निकटतम आकलन प्राप्त करने के लिए, आइए संख्या को निकटतम सौ तक सन्निकटित करने का प्रयत्न करें।

4875 सन्निकटित मान →	4,900
–484 सन्निकटित मान →	–500
आकलित अन्तर →	4,400

यह एक अच्छा और अधिक अर्थपूर्ण आकलन है।

1.4.6 आकलन करना : गुणनफल

19 × 48 के लिए आकलन क्या है?

19 × 48 का गुणनफल 912 होता है। स्पष्ट है कि यह गुणनफल 1000 से कम है। क्यों? यदि हम 19 का निकटतम दहाई तक मान निकलें, तो हमें 20 प्राप्त होता है और फिर 48 का निकटतम दहाई तक मान निकालें, तो 50 प्राप्त होता है। अब 20 × 50 = 1000 है। संख्या 912, संख्या 1000 के सन्निकट है।

करना है, तो आपको यह पता होना चाहिए कि आप क्यों सन्निकटित कर रहे हैं और इसलिए किस स्थान तक आपको सन्निकटित करना है। निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए–

उदाहरण-1 : 4380 + 15785 का आकलन कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि 15785 > 4380 है।

हम निकटतम हजारों तक सन्निकटित करते हैं।

15785 सन्निकटित मान →	16,000
+ 4380 सन्निकटित मान →	+4000
आकलित योग →	20,000

क्या यह विधि काम करती है? आप यथार्थ उत्तर ज्ञात करके जाँच कर सकते हैं कि यह आकलन विवेकपूर्ण है या नहीं।

उदाहरण-2: 4875 – 484 का आकलन कीजिए।

हल :

4875 सन्निकटित मान (हजारों में) →	5,000
–484 सन्निकटित मान → (हजारों में)	–0
आकलित अंतर →	5,000

यह विवेकपूर्ण आकलन नहीं है। यह विवेकपूर्ण क्यों नहीं है? निकटतम आकलन प्राप्त करने के लिए, आइए संख्या को निकटतम सौ तक सन्निकटित करने का प्रयत्न करें।

4875 सन्निकटित मान →	4,900
–484 सन्निकटित मान →	–500
आकलित अन्तर →	4,400

यह एक अच्छा और अधिक अर्थपूर्ण आकलन है।

1.4.6 आकलन करना : गुणनफल

19 × 48 के लिए आकलन क्या है?

19 × 48 का गुणनफल 912 होता है। स्पष्ट है कि यह गुणनफल 1000 से कम है। क्यों? यदि हम 19 का निकटतम दहाई तक मान निकलें, तो हमें 20 प्राप्त होता है और फिर 48 का निकटतम दहाई तक मान निकालें, तो 50 प्राप्त होता है। अब 20 × 50 = 1000 है। संख्या 912, संख्या 1000 के सन्निकट है।

सन्निकटन का व्यापक नियम यह है कि प्रत्येक गुणा की जाने वाली संख्या को उसके सबसे बड़े स्थान तक सन्निकटित कीजिए और सन्निकटित संख्याओं को गुणा कर दीजिए।

उदाहरण : 72 × 489 का आकलन कीजिए।

489 सन्निकटित होता है 500 (सौ तक सन्निकटित)

72 सन्निकटित होता है 70 (दहाई तक सन्निकटित)

अतः आकलित गुणनफल = 500 × 70 = 35000 है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित गुणनफलों का आकलन कीजिए–

(a) 67 × 313 (b) 8 × 795

(c) 898 × 735 (d) 958 × 387

ऐसे ही पाँच और प्रश्न बनाइए और उन्हें हल कीजिए।

आपके लिए आकलनों का एक महत्त्वपूर्ण उपयोग यह है कि आप अपने उत्तरों को जाँच कर सकते हैं। मान लीजिए आपने 37 × 1889 ज्ञात किया है, परंतु आप निश्चित नहीं हैं कि उत्तर सही है या नहीं। इस गुणनफल का एक तुरन्त (जल्दी) प्राप्त होने वाला और विवेकपूर्ण आकलन 40 × 2000 = 80000 है। यदि आपका उत्तर 80000 के निकट है, तो संभवतः आपका उत्तर सही है। दूसरी ओर, यदि वह 8000 या 8,00,000 के निकट है, तो आपके गुणा करने में अवश्य ही कुछ गलती हुई है।

प्रश्नावली – 1.3

1. **व्यापक नियम का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित में से प्रत्येक के योगफल का सन्निकटित मान बताइए–**

(a) 730 + 998 (b) 796 – 314

(c) 12,904 + 2888 (d) 28292 – 21496

2. निम्न सवालों में प्रत्येक में एक मोटे तौर पर आकलन और एक निकटतम आकलन (दस तक सन्निकटन) दीजिए–

(a) 439 + 334 + 4317 (b) 108734 − 47599

(c) 8325 − 491 (d) 489348 − 48365

3. व्यापक नियम का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित संख्याओं के गुणनफलों के आकलन का अनुमान लगाइए–

(a) 578 × 161 (b) 5281 × 3491

(c) 1291 × 592 (d) 9250 × 29

1.4.7 कोष्ठकों का प्रयोग

मोहन ने बाजार से 7 कलमें खरीदीं जिनका मूल्य 10 रु. प्रति कलम था। उसकी बहन सीमा ने इसी प्रकार की 8 कलमें खरीदीं। उनके द्वारा दी गई कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

रीता ने धनराशि इस प्रकार परिकलित की	शबीना ने धनराशि इस प्रकार परिकलित की
$7 \times 10 + 8 \times 10$	$7 + 8 = 15$
$= 70 + 80$	और 15×10
उत्तर = 150 रु.	उत्तर = 150 रु.

आप देख सकते हैं कि रीता और शबीना के उत्तर प्राप्त करने की विधियों में कुछ अंतर है, परंतु दोनों के उत्तर समान हैं और प्राप्त परिणाम सही है। क्यों?

सीमा ने कहा कि शबीना ने 8+7×10 करके उत्तर प्राप्त किया है।

श्याम बताता है कि $8 + 7 \times 10 = 8 + 70 = 78$ है। लेकिन शबीना ने जो उत्तर प्राप्त किया है वह यह नहीं है। बस तीनों विद्यार्थी उलझन में पड़ जाते हैं।

ऐसी स्थितियों में उलझन दूर करने के लिए हम कोष्ठकों (Brackets) का प्रयोग कर सकते हैं। हम कोष्ठकों का प्रयोग करके 7 और 8 को मिलाकर एक समूह बना सकते हैं जो दर्शाएगा कि इस समूह को एक अकेली संख्या समझा जाए। इससे उत्तर इस प्रकार प्राप्त होता है–

$(7+8) \times 10 = 15 \times 10$

यह वही है जो शबीना ने किया है। उसने पहले 7 और 8 को जोड़ा और फिर प्राप्त योग को 10 से गुणा कर दिया।

कोष्ठकों का प्रयोग यह स्पष्ट रूप में हमें बताता है कि पहले कोष्ठकों ( ) के अंदर दी हुई संख्याओं को एक अकेली संख्या के रूप में बदलिए और फिर बाहर दी हुई संक्रिया कीजिए जो यहाँ 10 से गुणा करना है।

स्वयं करके देखिए

1. **कोष्ठकों का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए व्यंजक लिखिए–**

   (a) पाँच और तीन के योग का चार से गुणा।

   (b) सोलह और सात के अंतर को चार से भाग।

   (c) पैंतालीस को तीन और दो के योग के तिगुने से भाग देना।

2. **(5 + 8) × 7 के लिए विभिन्न स्थितियाँ लिखिए।**

   (ऐसी एक स्थिति है– गीता और रीता ने 7 दिन कार्य किया। गीता 5 घंटे प्रतिदिन कार्य करती है और रीता 8 घंटे प्रतिदिन कार्य करती है। दोनों ने एक सप्ताह में कुल कितने घंटे कार्य किया?)

3. **निम्नलिखित के लिए पाँच स्थितियाँ लिखिए जहाँ कोष्ठकों का प्रयोग आवश्यक हो–**

   (a) 6 (8–4) (b) (5+3)(8–3)

1.5 रोमन संख्यांक

अभी तक हम हिंदू-अरेबिक संख्यांकों (Hindu-Arabic Numerals) की पद्धति का ही प्रयोग करते रहे हैं। यह एक मात्र संख्यांक पद्धति नहीं है। संख्यांक लिखने की पुरानी पद्धतियों में से एक पद्धति रोमन संख्यांकों (Roman Numerals) की पद्धति है। यह पद्धति अभी भी अनेक स्थानों पर प्रयोग की जाती है। उदाहरणार्थ, हम घड़ियों में रोमन संख्यांकों का प्रयोग देख सकते हैं। इनका प्रयोग स्कूल की समय-सारणी में कक्षा के लिए भी किया जाता है, इत्यादि।

रोमन संख्यांक

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX	X

ये क्रमशः संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 और 10 व्यक्त करते हैं। इसके बाद 11 के लिए XI और 12 के लिए XII, ... 20 के लिए XX का प्रयोग होता है।

इस पद्धति के कुछ अन्य संख्यांक, संगत हिंदू-अरेबिक संख्यांकों के साथ इस प्रकार हैं–

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

(a) यदि किसी संकेत की पुनरावृत्ति होती है तो जितनी बार वह आता है उसका मान उतनी ही बार जोड़ दिया जाता है। अर्थात् II बराबर 2 है, XX बराबर 20, है और XXX बराबर 30 है।

(b) कोई संकेत तीन से अधिक बार नहीं आता है। परंतु संकेतों V, L और D की कभी पुनरावृत्ति नहीं होती है।

(c) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के दाईं ओर जाता है तो बड़े मान में छोटे मान को जोड़ दिया जाता है। जैसे–

VI = 5 + 1 = 6 XII = 10+2 = 12

LXV = 50 + 10 + 5 = 65

(d) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत बड़े मान वाले किसी संकेत के बाईं ओर जाता है तो बड़े मान में से छोटे मान को घटा दिया जाता है। जैसे–

IV = 5–1 = 4 IX = 10–1 = 9

XL = 50–10 = 40 XC = 100–10 = 90

(e) संकेतों V,L और D को कभी भी बड़े मान वाले संकेत के बाईं ओर नहीं लिखा जाता है। अर्थात् V,L और D के मानों को कभी भी घटाया नहीं जाता है।

संकेत I को केवल V और X में से घटाया जा सकता है। संकेत X को केवल L, M और C में से ही घटाया जा सकता है।

इन नियमों का पालन करने से हमें प्राप्त होता है–

1	=	I	20	=	XX
2	=	II	30	=	XXX

3	=	III	40	=	XL
4	=	IV	50	=	L
5	=	V	60	=	LX
6	=	VI	70	=	LXX
7	=	VII	80	=	LXXX
8	=	VIII	90	=	XC
9	=	IX	100	=	C
10	=	X			

(a) उपर्युक्त सारणी में छूटी हुई संख्याओं को रोमन पद्धति में लिखिए। जैसे : 11 से 19, 21–29 ..... इत्यादि।

(b) XXXX, VX, IC, XVV ------ इत्यादि नहीं लिखे जाते हैं। क्या आप बता सकते हैं क्यों?

उदाहरण-1 : निम्नलिखित को रोमन संख्यांकों में लिखिए–

(a) 79 (b) 98

हल- (a) $79 = 70 + 9$

$= (50+10+10) + 9$

$= (L+X+X) + IX$

$= LXXIX$

(b) $98 = 90 + 8$

$= (100-10) + 8$

$= XC + VIII$

$= XCVIII$

प्रयास कीजिए

A. नीचे दी गई संख्याओं को रोमन पद्धति में लिखिए–

(i) 25 (ii) 49 (iii) 92 (iv) 73

(v) 290 (vi) 313 (vii) 173 (viii) 217

B. इन्हें संख्यांकों में लिखिए–

(i) XXIX (ii) XLIX (iii) CCIX (iv) XXXIV

(v) XCV (vi) CCCXL

अध्याय-2 पूर्ण संख्याएँ

भूमिका

जब हम गिनती करते हैं तो हमारे सम्मुख संख्याएं 1, 2, 3, 4, 5, 6,..... एक निश्चित क्रम में प्राकृतिक रूप से आती हैं। हम गिनती की संख्याओं को **प्राकृत संख्याएँ (Natural Number)** कहते हैं, अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5, 6 ..... प्राकृत संख्याएँ हैं।

अगर आपको 20 से घटते क्रम में संख्या बोलने को कहा जाये तो आप बोलेंगे 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 । अगर यह पूछें कि क्या 1 से पहले भी कुछ हो सकता है? प्राकृत संख्याओं में 1 से पहले कोई संख्या नहीं है।

2.1 परवर्ती और पूर्ववर्ती संख्या

आइए एक और बात पर विचार करें। हम प्राकृत संख्या 5 लेते हैं, इसमें 1 जोड़ दें तो हम संख्या 6 पाते हैं। संख्या 6, संख्या 5 के ठीक बाद वाली संख्या है जिसे **परवर्ती या उत्तरवर्ती** (Successor) कहते हैं। इसी प्रकार संख्या 6 के ठीक बाद वाली संख्या 6 + 1 = 7 हुई, 7 की परवर्ती ठीक बाद वाली संख्या 7 + 1 = 8 हुई, अर्थात् किसी संख्या की परवर्ती संख्या उस संख्या में 1 जोड़कर प्राप्त कर लेते हैं।

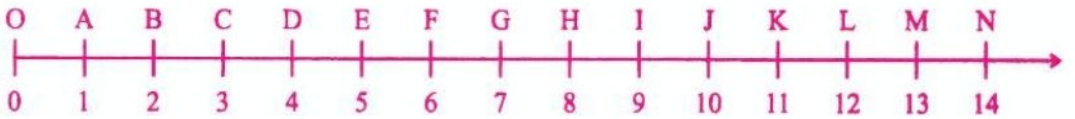
संख्या 5, संख्या 6 से ठीक पहले आती है। हम कहते हैं कि 6 का **पूर्ववर्ती या अनुवर्ती** (Predecessor) 6-1 = 5 है, संख्या 5 की पूर्ववर्ती संख्या 5-1 = 4 है, इसी प्रकार 4 की पूर्ववर्ती संख्या 3, 3 की पूर्ववर्ती संख्या 2 और 2 की पूर्ववर्ती संख्या 1 है। 1 की पूर्ववर्ती संख्या क्या होगी? संभवतः जवाब होगा कुछ नहीं, अर्थात् शून्य (0) यानी 1 की पूर्ववर्ती संख्या 1-1 = 0 होगी। "0" शून्य को जब हम प्राकृत संख्या में शामिल कर लेते हैं, तो इस प्रकार प्राप्त संख्याओं के समूह को पूर्ण संख्याओं का समूह कहते हैं। अर्थात् 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ..... को **पूर्ण संख्या** कहते हैं।

स्वयं करके देखिए

1. क्या सभी प्राकृतिक संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ हैं?
2. क्या सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ भी हैं?
3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन-सी हैं?
4. 12 की परवर्ती संख्या बताएँ।
5. 990 की परवर्ती संख्या बताएँ।
6. 999 की अनुवर्ती या पूर्ववर्ती संख्या बताएँ।
7. 20 की अनुवर्ती या पूर्ववर्ती संख्या बताएँ।

2.2 संख्या रेखा

पूर्ण संख्याओं के कुछ गुणों की खोज करने के लिए उन्हें एक रेखा जिसे संख्या रेखा कहते हैं पर निरूपित करने की आवश्यकता पड़ती है। हम एक सरल रेखा खींचते हैं और संख्या शून्य (0) के लिए उस पर एक बिन्दु "O" अंकित कर लेते हैं। "O" से आरम्भ करके उसके दाईं ओर बराबर दूरियों पर बिन्दु A, B, C, D..... आदि क्रम से अंकित करते हैं–



इसे **पूर्ण संख्याओं की संख्या रेखा** कहते हैं।

इस प्रकार,

OA = 1 इकाई तो

OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = IJ = JK = KL = LM = MN = 1 इकाई

OB = OA + AB = 1 + 1 = 2 अर्थात् 2 इकाई। इसी प्रकार OC = 3 इकाई, OD = 4 इकाई।

क्योंकि O पूर्ण संख्या शून्य "0" को निरूपित करता है, इसी प्रकार A, B, C, D..... इत्यादि क्रमशः पूर्ण संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5 ..... इत्यादि को निरूपित करते हैं। उपर्युक्त संख्या रेखा पर हम देखते हैं कि N (14) संख्या रेखा का सीमा बिन्दु नहीं है। संख्या रेखा के अनुदिश दाईं ओर चलते हुए हम आवश्यकतानुसार किसी भी पूर्ण संख्या तक जा सकते हैं। इस प्रकार

हमने पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित किया है।

- संख्या रेखा को देखने से पता चलता है कि बाईं से दाईं ओर संख्याएँ बढ़ती जाती हैं। जैसे– संख्या 8 संख्या 5 से बड़ी है।
- संख्या रेखा से यह भी स्पष्ट है कि दाईं तरफ से बाईं की ओर की संख्याएँ घटती जाती हैं, अर्थात् बाईं तरफ की संख्या दाईं तरफ की संख्या से छोटी है। जैसे– संख्या 3 संख्या 5 से छोटी है।

2.3 संख्या रेखा पर योग (जोड़ना)

संख्या रेखा पर दो संख्याओं का योग दिखाया जा सकता है, जैसे 5 और 8 का योग है–



चूँकि 5 में 8 जोड़ना है इसलिए संख्या रेखा पर संख्या 5 से 8 कदम दाईं ओर बढ़ना है। यानी 5 से एक कदम दाईं ओर 8 बार यानी 13 तक चलते हैं जैसा कि ऊपर दिखाया गया है। आठवें कदम पर संख्या 13 है। इस प्रकार 5 और 8 का योगफल 13 है, अर्थात् $5 + 8 = 13$.

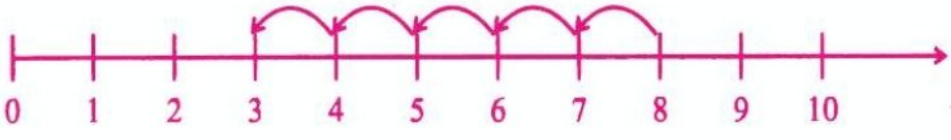
स्वयं करके देखिए

इसी प्रकार संख्या रेखा पर निम्न संख्याओं को दिखाएँ–

5+4, 9+6, 3+5, 2+8, 7+5 और 9+3

2.4 संख्या रेखा पर व्यवकलन (घटाना)

आइए $8 - 5$ को संख्या रेखा पर दिखाएँ।



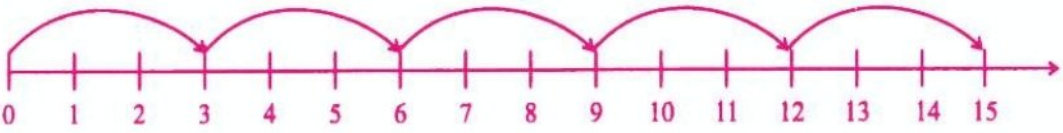
संख्या रेखा के संख्या 8 से 5 कदम बायीं ओर चलने पर संख्या 3 पर पहुँचते हैं, इसलिए 8 और 5 का घटावफल 3 हुआ, अर्थात् $8 - 5 = 3$.

स्वयं करके देखिए

संख्या रेखा का प्रयोग करके 4–3, 9–5, 8–6 और 12–5 का मान ज्ञात करें।

2.5 संख्या रेखा पर गुणन (गुणा)

आइए 3 x 5 ज्ञात करें।



0 से प्रारंभ कीजिए और दाईं ओर एक बार में 3 मात्रकों के बराबर कदम चलिए। ऐसे पाँच कदम चलिए। इस प्रकार चलते हुए हम संख्या 15 पर पहुँचते हैं। अतः 3 और 5 का गुणनफल 15 हुआ अर्थात् 3 x 5 = 15.

प्रश्नावली – 2.1

1. निम्नलिखित के ठीक बाद वाली संख्या बताइए–

(i) 99999 (ii) 800 (iii) 979 (iv) 1000

2. निम्नलिखित के ठीक पहले वाली संख्या बताइए–

(i) 100000 (ii) 100 (iii) 8757 (iv) 99

3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन-सी है?

4. निम्नलिखित की परवर्ती संख्या (उत्तरवर्ती संख्या) बताइए–

(i) 54896 (ii) 8765 (iii) 543 (iv) 28 (v) 9999

5. निम्नलिखित की पूर्ववर्ती संख्या (अनुवर्ती संख्या) बताइए–

(i) 876542 (ii) 99 (iii) 101 (iv) 4567 (v) 100000

6. 50 से 80 के बीच कितनी पूर्ण संख्याएँ हैं, लिखिए।

7. संख्या रेखा के आधार पर बताइए कि निम्नलिखित युग्म संख्या में कौन-सी संख्या बड़ी है?

(a) 503, 530 (b) 1023, 1020 (c) 4384, 5987 (d) 70, 40

2.6 पूर्ण संख्याओं के गुण

निम्न पर विचार करें

8 + 2 = 10, एक पूर्ण संख्या, 6 + 5 = 11, एक पूर्ण संख्या,

0 + 12 = 12, एक पूर्ण संख्या, ... +..... = ...

अतः दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव एक पूर्ण संख्या होती है। इसलिए पूर्ण संख्याओं का संग्रह योग के अंतर्गत संवृत (closed) है। यह पूर्ण संख्याओं के योग का संवृत गुण (closed property) कहलाता है।

निम्न पर विचार करें--

5 x 8 = 40, एक पूर्ण संख्या, 4 x 5 = 20, एक पूर्ण संख्या

3 x 2 = 6, एक पूर्ण संख्या, ... x ..... = ...

आप अपने से भी कुछ पूर्ण संख्याओं को लेकर गुणा कर जाँचिए।

अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल सदैव एक पूर्ण संख्या होती है।

क्या पूर्ण संख्याएँ गुणन (गुणा) के अंतर्गत भी संवृत है? आपकी जांच क्या बताती है?

निम्न पर विचार करें–

6 – 3 = 3, एक पूर्ण संख्या, 8 – 9 = ...? एक पूर्ण संख्या नहीं है।

अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं का व्यवकलन (घटावफल) एक पूर्ण संख्या हो भी सकती है, और नहीं भी। अतः पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन (घटाने) के अंतर्गत संवृत नहीं होती।

इसी प्रकार 12 ÷ 4 = 3, एक पूर्ण संख्या, 7 ÷ 8 = एक पूर्ण संख्या नहीं है।

..... ÷ ..... = ...

अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं का भागफल एक पूर्ण संख्या हो सकता है, नहीं भी। क्या पूर्ण संख्याएँ विभाजन (भाग) के अंतर्गत संवृत हैं?

संवृत गुण : पूर्ण संख्याओं का संग्रह (निकाय) योग और गुणन के अंतर्गत संवृत होता है पर व्यवकलन और विभाजन के अंतर्गत संवृत नहीं होता।

2.7 शून्य द्वारा विभाजन

एक संख्या से विभाजन (भाग देने) का अर्थ है कि उस संख्या को बार-बार घटाना।

12 ÷ 4 ज्ञात करें।

12
−4
8 I

12 में से 4 को कितनी बार घटाने पर हमें 0 मिलेगा? आइए पता करें।

−4
4 II

−4
0 III

अतः 12 ÷ 4 = 3

आइए 4 ÷ 0 का हल ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं–

4
−0
4 ..... I प्रत्येक बार घटाने पर हमें 4 पुनः प्राप्त होता है।

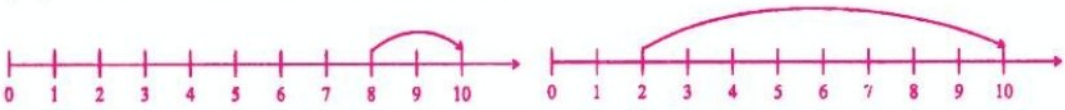
−0
4 ..... II क्या यह प्रक्रिया कभी समाप्त होगी? नहीं।

−0
4 ..... III अतः 4 ÷ 0 अपरिभाषित है। इसी प्रकार अन्य संख्याओं के साथ भी यह सत्य है।

अतः पूर्ण संख्याओं का शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है।

2.8.1 योग और गुणन की क्रमविनिमेयता (commutative)

(क) 8 + 2 और 2 + 8 पर विचार करें



दोनों से एक ही उत्तर 10 प्राप्त होता है।

इसी प्रकार अन्य संख्या 5 + 2 और 2 + 5 पर विचार करें तो पाएँगे कि दोनों का उत्तर बराबर है।

अतः स्पष्ट है कि

$8 + 2 = 2 + 8$

और $5 + 2 = 2 + 5$

इसी प्रकार का योगफल अन्य संख्याओं के साथ सत्य है।

अतः दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ सकते हैं ।

यह जोड़ का क्रमविनिमेय नियम है।

(ख) 3 X 5 और 5 X 3 पर विचार करें।

$3 \times 5 = 15$ $\quad$ $5 \times 3 = 15$

$3 \times 5 = 5 \times 3$

दोनों संख्याओं का गुणनफल बराबर है, इसी प्रकार अन्य संख्याओं के साथ भी सत्य है।

अतः दो पूर्ण संख्याओं का गुणा किसी भी क्रम में कर सकते हैं।

यह गुणा का क्रमविनिमेय नियम है।

पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन दोनों ही क्रमविनिमेय है।

स्वयं करें

घटाव और भाग के लिए क्रम विनिमेयता नियम सत्य है या नहीं? कुछ पूर्णांकों के साथ परीक्षण कर पता लगायें।

2.8.2 योग और गुणन की सहचारिता (Associative property)

$(5 + 2) + 4 = 7 + 4 = 11$ और $5 + (2 + 4) = 5 + 6 = 11$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि

$(5 + 2) + 4 = 5 + (2 + 4)$, अतः तीन पूर्णांकों के योग में उन्हें किसी भी क्रम में बारी-बारी से जोड़ा जा सकता है।

इसे योग का साहचर्य या सहचारिता नियम कहते हैं।

पुनः एक अन्य उदाहरण देखें–

$(5 \times 2) \times 4 = 10 \times 4 = 40$ और $5 \times (2 \times 4) = 5 \times 8 = 40$

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि –

$(5 \times 2) \times 4 = 5 \times (2 \times 4)$, अतः गुणा में पहली दो संख्याओं को गुणा कर तीसरी संख्या से गुणा करें या पहली को शेष दो के गुणनफल से गुणा करें तो कोई अन्तर नहीं आता है। **यह गुणा का साहचर्य नियम है।**

उदाहरण -1 : संख्या 845, 475 और 125 को जोड़िए।

हल : $845 + 475 + 125 = 845 + (475 + 125)$

$= 845 + 600$

$= 1445$

उदाहरण 2 : $12 + 18 + 25$ को दो विधियों से ज्ञात कीजिए।

हल : $12 + 18 + 25 = (12 + 18) + 25 = 30 + 25 = 55$

$12 + 18 + 25 = 12 + (18 + 25) = 12 + 43 = 55$

स्वयं करके देखिए

इसे दोनों विधियों (क्रम विनिमेयता और साहचर्य) से जोड़िए–

(a) $12 + 38 + 16$ (c) $58 + 28 + 42$

(b) $46 + 12 + 4$ (d) $25 + 33 + 22$

उदाहरण 3 : 14 x 35 को ज्ञात कीजिए।

हल : $14 \times 35 = (7 \times 2) \times 35 = 7 \times (2 \times 35)$

$= 7 \times 70 = 490$

इस उदाहरण में, हमने साहचर्य गुण का उपयोग कर सहजता से उत्तर प्राप्त कर लिया।

उदाहरण 4 : 4 x 185 x 25 को ज्ञात कीजिए।

हल : $4 \times 25 \times 185 = (4 \times 25) \times 185$

$= 100 \times 185 = 18500$

स्वयं करके देखिए

(i) कौन-सा गुणन सरल है और क्यों?

(a) $(6 \times 8) \times 5$ या $6 \times (8 \times 5)$

(b) $(9 \times 5) \times 20$ या $9 \times (5 \times 20)$

(ii) $8 \times 9879 \times 25$

(iii) $4 \times 856 \times 125$

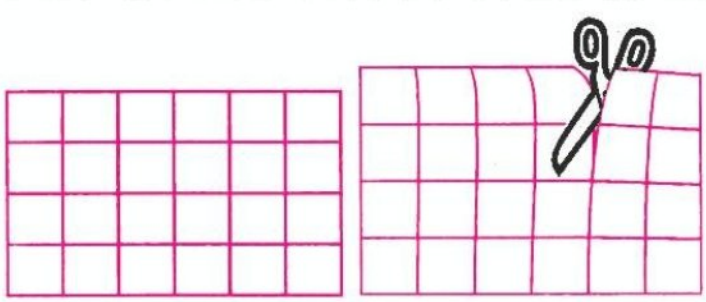
(iv) क्या $(24 \div 6) \div 2 = 24 \div (6 \div 2)$ है?

क्या विभाजन के लिए साहचर्य गुण लागू होता है?

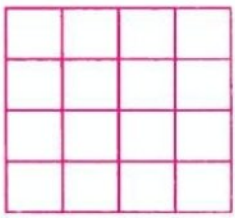
2.8.3 योग पर गुणन का वितरण

4 से.मी. x 6 से.मी. मापों का एक ग्राफ पेपर लें जिसमें 1 से.मी. x 1 से.मी. मापों वाले वर्ग बने हों।

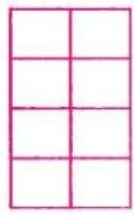
आपके पास कुल कितने वर्ग हैं?
क्या यह संख्या 4 x 6 है?



अब इस कागज को 4 सेमी x 4 सेमी और 4 सेमी x 2 सेमी मापों वाले दो भागों में काट लीजिए, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है।



वर्गों की सं. = 4 x 4



वर्गों की सं. = 4 x 2

दोनों भागों में कुल मिलाकर कितने वर्ग हैं?

क्या यह $(4 \times 4) + (4 \times 2)$ है? इसका अर्थ है कि

$4 \times 6 = (4 \times 4) + (4 \times 2)$ लेकिन $4 \times 6 = 4 \times (4 + 2)$

क्या यह दर्शाता है कि $4 \times (4 + 2) = 4 \times 4 + 4 \times 2$

इसी प्रकार, आप पाएँगे कि

$8 \times (3 + 9) = 8 \times 3 + 8 \times 9$ है।

इसे योग पर गुणन का वितरण (या बंटन) गुण (distributive property) कहते हैं।

स्वयं करके देखिए

इसी प्रकार आप $9 \times 32, 7 \times 13$ में वितरण नियम का उपयोग कर मान ज्ञात कीजिए–

5×15 को यदि $5 \times (10+5)$ में बदलकर गुणा किया जाए तो यह सरलता से हल किया जा सकता है।

2.8.4 तत्समक अवयव (योग और गुणन के लिए)

निम्नलिखित सारणी पर विचार करें–

8	+	0	=	8
4	+	0	=	4
0	+	5	=	5
0	+	24	=	24
0	+	.....	=	.....

उपर्युक्त सारणी से यह स्पष्ट है कि जब हम किसी संख्या में शून्य (0) जोड़ते हैं तो स्वयं वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। इसी कारण **शून्य को पूर्ण संख्याओं के योग के लिए तत्समक अवयव (identity element) या तत्समक कहते हैं। शून्य को पूर्ण संख्याओं के लिए योज्य तत्समक (additive identity) भी कहते हैं।**

निम्नलिखित सारणी पर विचार करें–

7	x	1	=	7
8	x	1	=	8
15	x	1	=	15
18	x	1	=	18
---	x	1	=	------

उपर्युक्त सारणी से यह स्पष्ट है कि जब हम किसी संख्या में 1 से गुणा करते हैं तो स्वयं वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। इसी कारण **1 को पूर्ण संख्याओं के गुणा के लिए तत्समक अवयव या तत्समक कहते हैं। 1 (एक) को पूर्ण संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक (multiplicative identity) कहते हैं।**

प्रश्नावली – 2.2

1. उपयुक्त क्रम में लगाकर योग ज्ञात कीजिए–

(a) 585 + 956 + 15 (b) 1675 + 946 + 325

(c) 65 + 75 + 35

2. उपयुक्त क्रम (नियम) लगाकर गुणनफल ज्ञात करें–

(a) 4 x 1225 x 25 (b) 4 x 158 x 125

(c) 4 x 85 x 25 (d) 8 x 29 x 125

3. निम्नलिखित में प्रत्येक का मान वितरण नियम द्वारा ज्ञात करें–

(a) 185 x 5 + 185 x 25 (b) 4 x 18 + 4 x 12

(c) 54279 x 92 + 8 x 54279 (d) 12 x 8 + 12 x 2

4 उपयुक्त गुणों का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात करें–

(a) 585 x 806 (b) 2008 x 185

(c) 854 x 102 (d) 258 x 1008

5. मिलान कीजिए–

A	B
I $2+8=8+2$	I गुणन की क्रमविनिमेयता
II $8 \times 90 = 90 \times 8$	II जोड़ की क्रमविनिमेयता
III $885 \times 145 = 885 \times (100+40+5)$	III गुणा का साहचर्य नियम
IV $5 \times (4 \times 28) = (5 \times 4) \times 28$	IV योग पर गुणन का वितरण नियम

6. कोई दूध वाला एक होटल वाले को सुबह 45 लीटर दूध देता है और शाम को 55 लीटर दूध देता है। यदि दूध का मूल्य 15 रु. प्रति लीटर है, तो दूध वाले को प्रतिदिन कितनी धनराशि प्राप्त होगी?

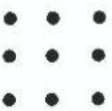
2.9 पूर्ण संख्याओं में प्रतिरूप

हम संख्याओं को बिन्दुओं द्वारा प्रारम्भिक आकारों के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं। जो आकार हम लेंगे वे हैं– रेखा, त्रिभुज, आयत एवं वर्ग।

- प्रत्येक संख्या (एक को छोड़कर) एक रेखा के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है। जैसे-- संख्या 2 को इस प्रकार दिखाया जा सकता है– • • जब इन दो बिन्दुओं को मिलाते हैं तो हमें एक रेखा मिलती है। इसी प्रकार 3, 4 ..... संख्या में बिन्दु लेकर एक रेखा में रखने पर और मिलाने पर हमें एक रेखा मिलती है। आप किसी भी संख्या में बिन्दु लेकर उन्हें व्यवस्थित रूप में रखकर एक रेखा द्वारा दर्शा सकते हैं।
- कुछ संख्याओं को आयत के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

4 → 
6 → 
8 → 

- कुछ संख्याओं, जैसे–4 और 9 को वर्गों के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

4 → 
9 → 

इसी क्रम में आगे किस संख्या में बिन्दु लेकर आप उन्हें वर्ग के रूप में दर्शा सकते हैं। (यहाँ यह ध्यान देने योग्य बात है कि प्रत्येक वर्ग एक विशेष प्रकार का आयत होता है।)

- कुछ संख्याओं को त्रिभुज के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। संख्या 2 के बराबर बिन्दु लेकर किसी भी तरह से व्यवस्थित करने पर हमें त्रिभुज प्राप्त नहीं होता परन्तु यदि हम 3 और 6 बिन्दु लें और उन्हें इस प्रकार व्यवस्थित करें–



तो हमें समद्विबाहु त्रिभुज प्राप्त होगा। इसी प्रतिरूप को आगे बढ़ाकर पता लगाइए कि कितने बिन्दु होने पर हमें अगला समकोण समद्विबाहु त्रिभुज प्राप्त होगा?

अब सारणी को पूरा कीजिए

संख्या	रेखा	आयत	वर्ग	त्रिभुज
2	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
3	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

स्वयं करके देखिए

1. कौन-सी संख्याएँ केवल रेखा के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?

2. कौन-सी संख्याएँ आयतों के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?

3. कौन-सी संख्याएँ वर्गों के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?

4. ऐसी छः संख्याओं के नाम लिखें जिन्हें त्रिभुजों के रूप में दर्शाया जा सकता है।

5. जिन संख्याओं को एक से अधिक रूपों में दिखाया जा सकता है उन्हें लिखिए।

प्रतिरूपों को देखना

प्रतिरूपों को देखने से आपको गणना की प्रक्रियाओं के सरलीकरण के लिए कुछ मार्गदर्शन मिल सकता है।

जैसे–

(a) $225 + 9 = 225 + 10 - 1 = 235 - 1 = 234$

(b) $225 - 9 = 225 - 10 + 1 = 215 + 1 = 216$

(c) $225 + 99 = 225 + 100 - 1 = 325 - 1 = 324$

(d) $225 - 99 = 225 - 100 + 1 = 125 + 1 = 126$

क्या यह प्रतिरूप 9, 99, 999, ... प्रकार की संख्याओं के जोड़ने या घटाने में आपकी सहायता करता है?

इन्हें देखिए

(a) $95 \times 9 = 95 \times (10 - 1)$

(b) $95 \times 99 = 95 \times (100 - 1)$

(c) $95 \times 999 = 95 \times (1000 - 1)$

क्या आपको किसी संख्या को 9, 99, 999 ..... के प्रकार की संख्याओं से गुणा करने की एक संक्षिप्त विधि प्राप्त होती है? ऐसी संक्षिप्त विधियाँ आपको अनेक गणनाएँ मौखिक रूप से (मनगणित से) करने में सहायता करती है।

इन्हें भी गौर से देखें और समझें :

(i) $96\times5=96\times\frac{10}{2}=\frac{960}{2}=480$

(ii) $96\times25=96\times\frac{100}{4}=\frac{9600}{4}=2400$

(iii) $96\times125=96\times\frac{1000}{8}=\frac{96000}{8}=12000$

यह प्रतिरूप आपको किसी संख्या को 5 या 25 या 125 से गुणा करने की एक रोचक विधि बताता है।

(आप इन संख्याओं को इसी प्रकार आगे भी बढ़ा सकते हैं।)

इन्हें भी देखें और समझें :

(i) $86\times5=86\times\frac{10}{2}=43\times10=430\times1$

(ii) $86\times15=86\times\frac{30}{2}=43\times30=430\times3$

(iii) $86\times25=86\times\frac{50}{2}=43\times50=430\times5$

(iv) $86\times35=86\times\frac{70}{2}=43\times70=430\times7$

संख्याओं के प्रतिरूप न केवल रोचक होते हैं, बल्कि मौखिक कलन में मुख्यतः उपयोगी होते हैं और संख्याओं के गुणों को भली भाँति समझने में सहायता देते हैं।

प्रश्नावली – 2.3

1. निम्नलिखित में जोड़ का क्रमविनिमेय नियम किसमें है?

(i) $5\times8=8\times5$ (ii) $(2\times3)\times5=2\times(3\times5)$

(iii) $(2+8)+10=(2+8)+10$ (iv) $15+8=8+15$

2. निम्नलिखित के उपयुक्त नियम लिखें–

(i) $8+32=32+8$ (ii) $(2+12)+15=2+(12+15)$

(iii) $8\times(5+4)=8\times5+8\times4$ (iv) $5\times50=50\times5$

3. निम्नलिखित में से किसमें शून्य निरूपित नहीं होगा?

(i) $1+0$ (ii) 0×0 (iii) $\frac{0}{2}$ (iv) $\frac{10-10}{2}$

4. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य है तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही शून्य होने चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल 1 है तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही 1 के बराबर होनी चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

6. वितरण विधि से ज्ञात कीजिए :

(i) 638×101 (ii) 4375×1001 (iii) 734×25

(iv) 3175×125 (v) 608×35

7. निम्नलिखित प्रतिरूपों को समझें और आगे बढ़ायें।

$1\times8+1=9$

$12\times8+2=98$

$123\times8+3=987$

$1234\times8+4=9876$

$---\times8+-=-----$

$---\times8+-=-----$

क्या आप सोच सकते हैं कि यह प्रतिरूप किस आधार पर काम करता है?

(संकेत: 12345 = 11111 + 1111 + 111 + 11 + 1)

पूर्ण संख्याओं की गणना के कुछ शॉर्टकट

1. गुणनफल एक संख्या जिसमें इकाई 5 हैं का उसी से

जैसे– 45 × 45

चरण–1 : उत्तर की इकाई और दहाई में 5 × 5 = 25 होगा।

गुणनफल होगा | | | 2 | 5 |

चरण–2 : सैंकड़े और अधिक के स्थान के लिए संख्या से (दहाई × (दहाई+1) की गणना कर खाली स्थान भरें।

$[4 \times (4+1)] = 4 \times 5 = 20$ | 2 | 0 | | |

अतः गुणनफल होगा | 2 | 0 | 2 | 5 | या 2025

45 × 45 की गणना कर पुष्टि करें।

क्या यह शॉर्टकट 5 इकाई वाली सभी संख्याओं पर लागू होगा?

स्वयं जाँच करें

25 × 25 = ----------

35 × 35 = ----------

55 × 55 = ----------

85 × 85 = ----------

105 × 105 = ----------

125 × 125 = ----------

---------- आदि

2. गुणनफल दो संख्याओं का जिनके दहाई के अंक बराबर हैं और इकाई के अंकों का जोड़ 10 है।

उदाहरण : 26 × 24

चरण–1 : उत्तर की इकाई और दहाई में दोनों इकाई अंकों का गुणनफल होगा

$6 \times 4 = 24$

अतः गुणनफल होगा | | | 2 | 4 |

चरण–2 : सैंकड़े और उससे आगे के स्थानों के लिए संख्या से (दहाई × (दहाई + 1))

$(2 \times (2+1)) = 2 \times 3 = 6$

गुणनफल होगा | | 6 | 2 | 4 | या 624

26 × 24 गणना कर पुष्टि करें। क्या यह शॉर्टकट ऐसे सब संख्याओं के जोड़ों पर लागू होगा जिनकी इकाइयों का जोड़ 10 है और दहाई अंक समान है।

निम्न गुणनफल से इस शॉर्टकट की जाँच कीजिए–

14 × 16 = ----------

38 × 32 = ----------

53 × 57 = ----------

102 × 108 = ----------

317 × 313 = ----------

1033 × 1037 = ----------

---------- आदि

3. गुणनफल दो संख्याएँ जिनकी दहाई के अंकों का योग 10 है और इकाई अंक बराबर है– जैसे 74 × 34

चरण–1 : इकाई अंक का स्वयं से गुणा कर उत्तर के इकाई और दहाई स्थान पर लिखें।

$4 \times 4 = 16$ तो गुणनफल होगा

		1	6

चरण–2 : सैंकड़े और अधिक स्थान के लिए दहाई अंकों को गुणा कर उसमें इकाई अंक को जोड़ें।

$(7 \times 3) + 4 = 21 + 4 = 25$

गुणनफल होगा | 2 | 5 | 1 | 6 | या 2516

74 × 34 की गणना कर उत्तर की पुष्टि करें। निम्न गुणनफल से इस शॉर्टकट की जाँच कीजिए:

$2 \times 2 = 04$

$(8 \times 2) + 2 = 18$

$82 \times 22 =$ | 1 | 8 | 0 | 4 |

$97 \times 17 =$ ----------

$46 \times 66 =$ ----------

---------- आदि

गणना के ऐसे शॉर्टकट नियम ढूंढ़ना एक रोचक बौद्धिक अभ्यास है। ऐसे शॉर्टकट नियम ढूंढ़ने और सिद्ध करने में बीजगणित सहायक होता है जो आप आगे सीखेंगे।

अध्याय-3

संख्याओं का खेल

3.1 गुणनखंड (अपवर्तक) (Factor) और गुणज (अपवर्त्य) (Multiple)

आइए देखें संख्या 4 किन-किन संख्याओं से पूरी तरह विभाजित होती है, इसे भाग देकर देखें।

1) 4 (4	2) 4 (2	3) 4 (1	4) 4 (1
–4	–4	–3	–4
0	0	1	0
भागफल = 4	भागफल = 2	भागफल = 1	भागफल = 1
शेष = 0	शेष = 0	शेष = 1	शेष = 0

हम संख्या 4 को गुणा के रूप में भी लिख सकते हैं–

$4 = 1 \times 4$; $4 = 2 \times 2$; $4 = 4 \times 1$;

इस प्रकार हम पाते हैं कि 1, 2 और 4 संख्या 4 के पूरे-पूरे विभाजक हैं। अतः ये संख्याएँ 4 के गुणनखंड (factor) हैं। इसी प्रकार आप बताएँ कि संख्या 8 के विभाजक कौने-कौन हैं?

किसी संख्या का गुणनखंड उसका पूरा-पूरा विभाजक होता है।

1, 2 और 4 के पहाड़े में 4 आता है। अतः संख्या 4, संख्या 1, 2 और 4 प्रत्येक का गुणज (multiple) है।

गतिविधि 1

हम वर्ग के बच्चों के संख्यानुसार कार्ड लेते हैं जिस पर 1, 2, 3, 4, 5 ..... आदि संख्याएँ लिखी हों और प्रत्येक संख्या कार्ड में एक धागा बाँध देते हैं, जिसे गले से आसानी से लटकाया जा सके। कार्डों को प्रत्येक बच्चों के बीच बाँटकर उसे गले में पहनने को कहें और

फिर उन्हें एक वृत्ताकार गोल घेरे में खड़ा होने के लिए कहें। अब एक बच्चे को बीच में बुलाएँ। माना कि 18 नम्बर की कार्ड वाला बच्चा बीच में आया। फिर बच्चों से कहेंगे कि वे बच्चे भी बीच में आएँ जिनका नम्बर कार्ड इस नम्बर कार्ड को पूरी-पूरी विभाजित करता है, बच्चों के नम्बर कार्डों से बीच में आए नम्बर को विभाजित करने वाली संख्या को श्यामपट्ट पर नोट करवाएँ। इस प्रकार संख्या 18 को पूर्ण रूप से विभाजित करने वाली संख्या होगी – 1, 2, 3, 6, 9 और 18। ये सारी संख्याएँ 18 की गुणनखंड हैं। अब तालिका बनवाएँ–

संख्या	गुणनखण्ड
18	1, 2, 3, 6, 9, 18
12	
25	

- सोचिए और बताइए ऐसी कौन-सी संख्या है जिस संख्या वाले बच्चे को बीच में बुलाने पर एक भी अन्य बच्चा घेरे के बीच में न आए?

गतिविधि 2

यह खेल दो व्यक्तियों, मान लीजिए A और B द्वारा खेला जा सकता है। आप नीचे दिए गए कार्डों के समान संख्या कार्डों को फर्श या टेबल पर फैला लें।

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50						

चरण :

(a) निर्णय लीजिए कि पहले कौन खेलेगा A या B ?

(b) मान लीजिए A पहले खेलता है। वह मेज से एक कार्ड उठाता है और अपने निकट रख लेता है। मान लीजिए इस कार्ड पर 28 लिखा है।

(c) खिलाड़ी B अब वे सभी कार्ड उठाता है जिन पर A के कार्ड पर लिखी संख्या (अर्थात् 28) के गुणनखंड लिखे हैं और उन्हें अपने निकट एक ढेर में रख देता है।

(d) फिर खिलाड़ी B मेज पर रखे कार्डों में से एक कार्ड उठाता है। अब मेज पर बचे कार्डों से A वे सभी कार्ड उठाता है जिन पर B के कार्ड की संख्या के गुणनखंड लिखे हैं।

(e) यह खेल तब तक जारी रहता है, जब तक कि सभी कार्ड न उठा लिए जाएँ।

(f) A अपने पास रखे कार्डों पर लिखी संख्याओं को जोड़ता है और B भी अपने पास रखे कार्डों पर लिखी संख्याओं को जोड़ता है। जिस खिलाड़ी का योग अधिक होगा उसे ही जीता हुआ माना जाएगा। कार्डों की संख्या को बढ़ाकर इस खेल को और अधिक रोचक बनाया जा सकता है।

इस खेल को अपने मित्र के साथ खेलिए। क्या आप इस खेल को जीतने की कोई विधि ज्ञात कर सकते हैं?

स्वयं करके देखिए और निष्कर्ष निकालिए–

8 के कुछ गुणज (multiple) दिए हैं– 8,16,24 ..... आगे आप लिखिए।

इसी तरह 6 के 5 गुणज लिखिए।

आप पाते हैं कि किसी संख्या का सबसे छोटा गुणज वह संख्या स्वयं भी होती है।

इसी प्रकार 15 के विभिन्न गुणनखण्ड हैं 3 X 5, 15 X 1

अतः संख्या 1, 3, 5, 15, संख्या 15 के गुणनखण्ड हैं। इसी प्रकार आप 20 के विभिन्न गुणनखण्ड लिखिए।

क्या आप ऊपर दिए गए उदाहरणों के आधार पर कह सकते हैं कि किसी संख्या का सबसे बड़ा गुणनखण्ड वह संख्या स्वयं होती है? हाँ/नहीं

क्या कोई ऐसी संख्या है जो प्रत्येक संख्या के गुणनखण्ड के रूप में आती है।

$6 = 1 \times 6$

$7 = 1 \times 7$

$12 = 1 \times 12$

क्या हम कह सकते हैं कि 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड है? हाँ/नहीं अन्य संख्याओं के लिए उसे जाँचिए।

जब हम $18 = 2 \times 9$ लिखते हैं, तो हम कहते हैं कि 2 और 9, संख्या 18 के गुणनखण्ड हैं। हम यह भी कहते हैं कि 18, संख्या 2 और 9 का गुणज है $2 \times 9 = 18 \rightarrow$ गुणज

गुणनखण्ड

इसी तरह आप 20 के गुणनखण्ड लिखिए। यह भी बताइए कि 20 किन-किन संख्याओं का गुणज है?

हम यह कह सकते हैं कि एक संख्या अपने प्रत्येक गुणनखण्ड का एक गुणज होती है।

ऊपर दिए गए उदाहरणों के आधार पर निम्न कथनों की जाँच कीजिए–

1. एक संख्या के गुणनखण्डों (Factor) की संख्या निश्चित (परिमित) होती है।

हाँ/नहीं

कारण ----------

2. किसी संख्या के गुणज (Multiple) की संख्या भी निश्चित (परिमित) होती है।

हाँ/नहीं

कारण ----------

सम्पूर्ण संख्याएँ (Perfect Number)

जैसे– 6 के सभी गुणनखंड = 1, 2, 3 और 6 हैं।

इनके गुणनखंडों का योगफल = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 x 6 अर्थात् 6 के सभी गुणनखंडों का योगफल 6 का दोगुना है।

पुनः 28 के सभी गुणनखंड = 1, 2, 4, 7, 14 और 28 हैं।

इनके गुणनखंडों का योगफल = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 x 28 अर्थात् 28 के सभी गुणनखंडों का योगफल 28 का दोगुना है।

वह संख्या जिसके सभी गुणनखंडों का योगफल उस संख्या का दोगुना हो, एक सम्पूर्ण संख्या (**Perfect number**) कहलाती है। यहाँ 6 और 28 सम्पूर्ण संख्याएँ हैं।

स्वयं करें

क्या 12 एक सम्पूर्ण संख्या है?

3.2 भाज्य, (संयुक्त संख्या) और अभाज्य संख्या (रूढ़ सं०)

संख्या	गुणनखंड (अपवर्तक)
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	1, 5
6	1, 2, 3, 6
7	1, 7
8	1, 2, 4, 8
9	1, 3, 9
...	.....

उपर्युक्त सारणी को देखने से पता चलता है कि तीन तरह की संख्याएँ हैं। वे संख्याएँ :

(i) जिनका केवल एक गुणनखण्ड होता है।

(ii) जिनके केवल दो गुणनखण्ड होते हैं।

(iii) जिनके दो से अधिक गुणनखण्ड होते हैं।

निष्कर्ष

- जिनका केवल एक गुणनखंड है वह 1 है।

  यह न तो भाज्य है और न अभाज्य।

- जिनके केवल दो गुणनखंड हैं वे संख्याएँ हैं–

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ..... इन संख्याओं को **अभाज्य संख्या (Prime number)** कहते हैं।

- जिनके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं वे संख्याएँ हैं : 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16 ..... इन संख्याओं को **संयुक्त (Composite) संख्या** कहते हैं।

अभाज्य संख्याओं को छाँटने की एक सरल विधि यूनानी गणितज्ञ इरेटोसथीन्स (Eratosthenes) ने तीसरी शताब्दी ई.पू. ज्ञात की। उसकी यह विधि इरेटोसथीन्स की छलनी (Sieve of Eratosthenes) कहलाती है। पहले हम 1 से 100 तक के धन पूर्णांकों की सारणी बनाते हैं जैसा आगे दिया गया है।

हम 1 को काट देते हैं क्योंकि हम जानते हैं कि 1 न तो भाज्य संख्या है और न अभाज्य। अब हम 2 पर गोला लगाते हैं और 2 के प्रत्येक गुणज अर्थात् 4, 6, 8 ..... इत्यादि को काट देते हैं जैसा कि आगे किया जा रहा है–

अगली संख्या जो नहीं काटी गई है, 3 है। अतः 3 के प्रत्येक गुणज अर्थात् 6, 9, 12, 15 .... इत्यादि को काट देते हैं।

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

हम यह क्रिया तब तक जारी रखते हैं, जब तक कि प्रत्येक संख्या या तो कट जाए या उस पर गोला लग जाए।

सारणी में गोले वाली सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं। 1 को छोड़कर काट दी गई सभी संख्याएँ संयुक्त संख्याएँ हैं।

3 और 5 के बीच केवल एक भाज्य संख्या 4 है, 5 और 7 के बीच केवल एक भाज्य संख्या 6 है। 11 और 13 के बीच केवल एक भाज्य संख्या है वह है 12। इस प्रकार की अभाज्य संख्याओं के जोड़े को जिनके बीच केवल एक ही भाज्य संख्या हो, अभाज्य युग्म (जुड़वाँ अभाज्य) (Twins prime) कहते हैं।

स्वयं करें

1 और 100 के बीच सभी अभाज्य युग्मों को लिखें।

उदाहरण 1 : 42 के सभी गुणनखंडों को ज्ञात करें।

हल : हम देखते हैं कि

$42 = 1 \times 42$, $42 = 2 \times 21$, $42 = 3 \times 14$, $42 = 6 \times 7$, $42 = 7 \times 6$

यहाँ रुक जाइए, क्योंकि 6 और 7 पहले ही आ चुका है। इस प्रकार 42 के सभी गुणनखंड 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 हैं।

उदाहरण 2 : 81 के गुणनखंड ज्ञात करें।

हल : $81 = 1 \times 81$, $81 = 3 \times 27$, $81 = 9 \times 9$

क्योंकि दोनों गुणनखंड (9) समान हैं। इस प्रकार वांछित गुणनखंड 1, 3, 9, 27, 81 है।

उदाहरण 3 : क्या 12, 8736 का गुणनखंड है?

हल : यदि 12, संख्या 8736 का एक गुणनखण्ड है तो 8736 में 12 का भाग पूरा-पूरा जाना चाहिए–

$$
\begin{array}{r}
12\overline{)8736}\,(728 \\
-84 \\
\hline
33 \\
-24 \\
\hline
96 \\
-96 \\
\hline
0
\end{array}
$$

क्योंकि शेष 0 है अर्थात् 8736 संख्या 12 से पूर्णतः विभाजित है। इसलिए 12, संख्या 8736 का एक गुणनखंड है।

प्रश्नावली – 3.1

1. 15 के सभी गुणनखंड लिखें।
2. 64 के सभी गुणनखंड लिखे।
3. **निम्न में प्रत्येक के सभी गुणनखंड लिखें–**

   (i) 36 (ii) 45 (iii) 78 (iv) 125 (v) 144
4. 14 के गुणज लिखें।
5. 18 के गुणज लिखें।
6. **निम्न में प्रत्येक के पहले पाँच गुणज लिखें–**

   (i) 4 (ii) 12 (iii) 30 (iv) 24 (v) 50
7. सबसे छोटी अभाज्य संख्या बताएँ।
8. सम अभाज्य संख्या बताएँ।
9. तीन अभाज्य युग्म का उदाहरण दें।
10. **निम्न में कौन-कौन सी अभाज्य संख्या है–**

    (a) 23 (b) 28 (c) 42 (d) 9 (e) 31
11. सबसे छोटी संयुक्त संख्या बताएँ।
12. 100 से कम 5 क्रमागत संयुक्त संख्याएँ लिखिए जिनके बीच कोई अभाज्य संख्या न हो।
13. किसी संख्या के इकाई स्थान पर 5 है। यदि वह संख्या 150 और 200 के बीच की हो तो वह संयुक्त होगी अथवा अभाज्य?
14. 10 से बड़ी किसी संख्या के अभाज्य होने के लिए उसके इकाई स्थान पर कौन-कौन से अंक हो सकते हैं?
15. क्या कोई ऐसी भी संख्या है, जिसका कोई गुणनखंड न हो?
16. 1 और 100 के बीच सिर्फ दो सम्पूर्ण संख्याएँ हैं, वे कौन-कौन सी हैं?

17. निम्न में प्रत्येक संख्या को दो विषम अभाज्य संख्या के योग के रूप में लिखें–

(i) 32 (ii) 40 (iii) 56 (iv) 80 (v) 100

18. 16 से छोटी सभी अभाज्य और संयुक्त संख्याएँ अलग-अलग लिखिए।

19. क्या 1729 अभाज्य संख्या है?

20. निम्नलिखित में जो सत्य हो उसके आगे (✓) सत्य का चिह्न और जो गलत हो उसके आगे (x) गलत का चिह्न लगाएँ–

(i) वह संख्या जिसका केवल एक अपवर्तक होता है, वह संख्या 1 है।

(ii) सबसे छोटी सम अभाज्य संख्या 2 है।

(iii) सबसे छोटी संयुक्त संख्या 6 है।

(iv) दो अभाज्य संख्याओं का योग सम होता है।

(v) 2 को छोड़कर किन्हीं भी दो अभाज्य संख्या का योगफल सम संख्या होती है।

(vi) सभी सम संख्याएँ संयुक्त संख्या है।

(vii) तीन विषम संख्याओं का योगफल विषम संख्या होती है।

(viii) दो सम संख्याओं का योगफल सदैव सम संख्या होती है।

3.3 विभाज्यता की जाँच

क्या संख्या 54, संख्या 2 से पूर्णतः विभाजित है? आइए 54 में 2 से भाग देकर देखें।

$$
\begin{array}{r}
2\,)\,54\,(27 \\
\underline{-4} \\
14 \\
\underline{-14} \\
0
\end{array}
$$

क्या 9876548, संख्या 2 से विभाजित है? आइए भाग देकर देखें।

$$
\begin{array}{r}
4938274 \\
2\overline{)\,9876548} \\
-8 \\
\hline
18 \\
-18 \\
\hline
07 \\
6 \\
\hline
16 \\
-16 \\
\hline
05 \\
-4 \\
\hline
14 \\
-14 \\
\hline
08 \\
-8 \\
\hline
0 \\
\hline
\end{array}
$$

अतः संख्या 9876548 संख्या 2 से पूर्णतः विभाजित है।

परन्तु उपर्युक्त भाग की क्रिया द्वारा विभाज्यता की जाँच करने में अधिक श्रम एवं समय लगता है और इसकी जाँच के लिए बहुत-सी सरल विधियाँ उपलब्ध हैं, जिनसे शीघ्र जाँच की जा सकती है कि कोई संख्या कुछ अन्य संख्याओं से पूर्णतः विभाज्य है या नहीं। केवल संख्या के अंकों की जाँच करके हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि वह संख्या इनमें से किस संख्या से विभाज्य है। आइए जाँच के इन नियमों का यहाँ संक्षेप में जिक्र करते हैं–

1. **2 से विभाज्यता–** 10, 12, 14, 16, 18 इन संख्याओं को देखिए, ये दो से पूर्णतः विभाजित हैं, इनके इकाई के अंक 0, 2, 4, 6 और 8 हैं। अतः जिस संख्या का इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 और 8 हो, वे संख्याएँ 2 से पूर्णतः विभाजित होती हैं।

2. 3 से विभाज्यता– दी गई संख्या के अंकों का योगफल 3 से पूर्णतः विभाजित है तो दी गई संख्या भी 3 से पूर्णतः विभाजित होगी। जैसे– संख्या 8745 संख्या 3 से विभाज्य है, क्योंकि 8 + 7 + 4 + 5 = 24, 3 से पूर्णतः विभाज्य है।

3. 4 से विभाज्यता– संख्या के दहाई और इकाई के अंकों से बनी संख्या यदि 4 से पूर्णतः विभाज्य है तो दी गई संख्या भी 4 से पूर्णतः विभाजित होगी। जैसे – संख्या 5832, संख्या 4 से पूर्णतः विभाज्य है, क्योंकि इस संख्या के दहाई और इकाई से बनी संख्या 32 है, जो 4 से विभाज्य है। दी गई संख्या के दहाई और इकाई का अंक शून्य हो तो वह भी 4 से विभाज्य है। जैसे– 4100 आदि।

4. 5 से विभाज्यता– दी गई संख्या के इकाई का अंक यदि 0 या 5 हो, तो दी गई संख्या 5 से पूर्णतः विभाज्य होगी। जैसे– 10, 105 आदि।

5. 6 से विभाज्यता– 6 का अभाज्य गुणनखंड = 2 x 3 है। अतः दी गई संख्या यदि 2 और 3 दोनों से विभाज्य है तो दी गई संख्या 6 से भी पूर्णतः विभाज्य होगी। जैसे– संख्या 8556, संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य है।

6. 8 से विभाज्यता – दी गई संख्या के सैकड़ा, दहाई और इकाई के अंक यदि शून्य हो अथवा सैकड़ा, दहाई और इकाई के अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य हो तो दी गई संख्या भी 8 से विभाज्य होगी। जैसे–

   58000, 8 से विभाज्य है क्योंकि सैकड़ा, दहाई और इकाई के अंक शून्य है। 58928 यह संख्या 8 से विभाज्य है, क्योंकि सैकड़ा, दहाई और इकाई से बनी संख्या 928 है, जो 8 से विभाज्य है।

7. 9 से विभाज्यता – दी गई संख्या के अंकों का योगफल यदि 9 से विभाजित हो तो दी गई संख्या भी 9 से पूर्णतः विभाज्य होगी। जैसे– 549, 9 से विभाज्य है, क्योंकि 5 + 4 + 9 = 18 जो 9 से पूर्णतः विभाज्य है।

8. **10 से विभाज्यता** – दी गई संख्या के इकाई का अंक शून्य हो, तो वह 10 से विभाज्य है। जैसे– 100, 5000, 8530 आदि।

9. **11 से विभाज्यता**– यदि दी गई संख्या के दाएं से विषम स्थानों पर के अंकों का योगफल और सम स्थानों पर के अंकों का योगफल का अंतर यदि शून्य अथवा 11 के गुणज हो, तो दी गई संख्या 11 से विभाज्य होगी। जैसे – 4653 संख्या के

सम स्थान के अंकों का योगफल $= 4 + 5 = 9$

विषम स्थान के अंकों का योगफल $= 6 + 3 = 9$

अन्तर $= 0$

अतः 4653, 11 से पूर्णतः विभाज्य है। पुनः संख्या 8293846

विषम स्थान यानी पहला, तीसरा, पाँचवाँ, सातवाँ आदि के अंकों का योगफल $8 + 9 + 8 + 6 = 31$

सम स्थानों के अंकों का योगफल $2 + 3 + 4 = 9$

अन्तर $= 22$

यहाँ 22, 11 के गुणज है अतः 8293846, 11 से विभाज्य है।

3.4 विभाज्यता के कुछ सामान्य गुण

गुण 1 – हम जानते हैं कि 84 विभाज्य है 12 से, क्योंकि $84 = 12 \times 7$ तथा $12 = 3 \times 4$ इसलिए 84, 3 से भी विभाज्य होना चाहिए और है भी, क्योंकि $84 = 3 \times 28$ इसी प्रकार 84, 4 से भी विभाज्य होना चाहिए और है भी, क्योंकि $84 = 4 \times 21$, यह बात सभी संख्याओं के लिए सत्य है। अतः यदि एक संख्या दूसरी से विभाज्य है, तो वह दूसरी संख्या के सभी गुणनखंडों से भी विभाज्य होती है।

गुण 2 – हम जानते हैं कि

2 गुणनखंड है 36 का, क्योंकि $36 = 2 \times 18$

3 गुणनखंड है 36 का, क्योंकि $36 = 3 \times 12$

2×3, अर्थात् 6 गुणनखंड है 36 का, क्योंकि $36 = 6 \times 6$ । इसकी जाँच अन्य उदाहरण से भी कर सकते हैं और सत्य हैं।

अतः यदि कोई संख्या दो या अधिक सह-अभाज्य (Co-prime numbers) संख्याओं में प्रत्येक से विभाज्य हो तो वह संख्या, उनके गुणनफल से भी विभाज्य है।

टिप्पणी – वैसी दो संख्याएँ, जिनका सार्वगुणनखंड सिर्फ 1 हो तो वे दोनों युग्म संख्याएँ **सह-अभाज्य संख्या (Co-prime numbers)** कहलाती हैं। जैसे–

4 और 17 सह-अभाज्य है, क्योंकि

4 का गुणनखंड = 1, 2, 4

17 का गुणनखंड = 1, 17

सार्वगुणनखंड (Common factor) = 1

गुण – 3

24 और 12, 6 से विभाज्य है, क्योंकि $24 = 6 \times 4$

$12 = 6 \times 2$

तो $24 + 12 = 36$ संख्या 6 से विभाज्य है, क्योंकि $36 = 6 \times 6$ एक और उदाहरण देखें 42 और 49, 7 से विभाज्य है, क्योंकि

$42 = 7 \times 6$ और $49 = 7 \times 7$

तो $42 + 49 = 91$ भी 7 से विभाज्य है, क्योंकि

$91 = 7 \times 13$

निष्कर्ष – यदि दी हुई दो संख्याएँ किसी संख्या से विभाज्य हों, तो इन संख्याओं का योग भी उस संख्या से विभाज्य होगा।

गुण 4 – अब इन उदाहरण को देखें –

60 और 45, 15 से विभाज्य हैं, क्योंकि

$60 = 15 \times 4$

$45 = 15 \times 3$

अब इन संख्याओं का अन्तर 60-45 = 15, जो 15 से विभाज्य है, यह अन्य के लिए भी सत्य है।

अतः यदि दी हुई दो संख्याएँ किसी संख्या से विभाज्य हों तो इन संख्याओं का अन्तर भी उस संख्या से विभाज्य है।

3.5 सार्वगुणनखंड (Common factor) और सार्वगुणज (Common multiple)

(a) आइए हम एक उदाहरण लेते हैं –

12 और 24 के गुणनखंड क्या हैं?

12 के गुणनखंड = 1, 2, 3, 4, 6, और 12

24 के गुणंनखंड = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 और 24

संख्या 12 और 24 दोनों में मिलने वाले गुणनखंड = 1, 2, 3, 4, 6 और 12 हैं। इन गुणखंडों को **उभयनिष्ठ** या **सार्वगुणनखंड** कहते हैं।

पुनः एक और उदाहरण लेते हैं–

(b) 32, 12 और 16 के गुणनखंडों पर विचार करते हैं।

32 के गुणनखंड = 1, 2, 4, 8, 16 और 32

12 के गुणनखंड = 1, 2, 3, 4, 6 और 12

16 के गुणनखंड = 1, 2, 4, 8 और 16

32, 12, और 16 तीनों संख्याओं में मिलने वाले गुणनखंड हैं– 1, 2 और 4

अतः 32, 12 और 16 के सार्वगुणनखंड = 1, 2 और 4 हैं।

(c) 8 और 15 के सार्वगुणनखंड पर विचार करें–

8 के गुणनखंड = 1, 2, 4 और 8

15 के गुणनखंड = 1, 3, 5 और 15

8 और 15 के सार्वगुणनखंड = 1

ऐसे बहुत से जोड़े हैं जिनका सार्वगुणनखंड केवल 1 होता है, इस प्रकार के युग्म संख्या को **सह-अभाज्य (Co-prime) संख्या** कहते हैं, जैसे– 3 और 5, 4 और 9 आदि।

आइए अब संख्याओं के सार्वगुणज को देखें।

(a) 4 और 5 के गुणजों को गौर से देखें।

4 का गुणज = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 .....

5 का गुणज = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 .....

संख्या 4 और 5 के वैसे गुणज जो दोनों में मिलते हैं – 20, 40 .....

अतः संख्या 4 और 5 के सार्वगुणज 20, 40 ..... हैं।

(b) 3, 4 और 9 के गुणजों पर विचार करें।

3 के गुणज = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36 .....

4 के गुणज = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 .....

9 के गुणज = 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 .....

3, 4 और 9 के वैसे गुणज हैं जो तीनों में हैं– 36 .....

अतः 3, 4 और 9 के सार्वगुणज = 36, 72 .....

स्वयं करके देखिए

1. **निम्न का सार्वगुणनखंड ज्ञात करें –**

(a) 8, 12 (b) 9, 27 और 12

2. **निम्न का सार्वगुणज ज्ञात करें –**

(a) 4, 16 (b) 12, 16 और 18

3. सहभाज्य संख्याओं का तीन उदाहरण दें।

हम गुणनखंड तथा अभाज्य संख्याओं के बारे में पहले से ही जानते हैं। आइए हम 24 के गुणनखंडों पर विचार करें।

$24 = 2 \times 12$ $24 = 3 \times 8$ $24 = 4 \times 6$

$= 2 \times 2 \times 6$ $= 3 \times 2 \times 4$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $= 3 \times 2 \times 2 \times 2$

24 के उपर्युक्त सभी गुणनखंडों में अंत में हम एक ही गुणनखंडन $2 \times 2 \times 2 \times 3$ पर पहुँचते हैं। इन गुणनखंडन में सिर्फ 2 और 3 ही गुणनखण्ड हैं और ये अभाज्य संख्याएँ हैं। किसी संख्या का इस प्रकार का गुणनखंडन **अभाज्य गुणनखंडन (Prime factorisation)** कहलाता है। दूसरे शब्दों में कोई गुणनखंडन अभाज्य होता है, यदि उसके सभी गुणनखंड अभाज्य हों।

उदाहरण : 360 अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करें।

हल :

2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
5	5
	1

360 का अभाज्य गुणनखंडन = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 हैं।

(अतः विभाज्यता का नियम लगाकर हम किसी भी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन आसानी से प्राप्त कर लेते हैं।)

प्रश्नावली – 3.2

1. विभाज्यता की जाँच के नियमों का प्रयोग करते हुए पता कीजिए कि निम्नलिखित संख्याओं में से कौन-सी संख्याएँ 2 से, 3 से, 4 से, 5 से, 6 से, 8 से, 9 से, 10 से और 11 से विभाज्य हैं? सिर्फ हाँ या नहीं में जवाब दें।

संख्या	विभाज्य हैं								
	2 से	3 से	4 से	5 से	6 से	8 से	9 से	10 से	11 से
124									
286									
546									
15864									
428428									
333333									
429714									
54685									
45600									

2. विभाज्यता की जाँच के नियमों के प्रयोग द्वारा ज्ञात करें कि निम्नलिखित संख्याओं में कौन-सी संख्या 2 से, 3 से, 5 से और 9 से विभाजित हैं?

(i) 126 (ii) 672 (iii) 990

(iv) 2050 (v) 2856 (vi) 406839

3. विभाज्यता की जाँच के नियमों के प्रयोग द्वारा बताएँ कौन-सी संख्याएँ 4 से और 8 से विभाज्य हैं?

(i) 512 (ii) 12159 (iii) 4096

(iv) 14540 (v) 21084 (vi) 31795012

4. निम्न संख्याओं की 6 से विभाज्यता की जाँच करें–

(i) 12583 (ii) 639210 (iii) 546534

5. निम्न में कौन-सा कथन सत्य है–

(i) यदि कोई संख्या 3 से विभाज्य है तो वह 9 से भी विभाज्य होगी।

(ii) यदि कोई संख्या 9 से विभाज्य है तो वह 3 से भी विभाज्य होगी।

(iii) सभी संख्याएँ जो 18 से विभाज्य होती है वह 3 और 6 दोनों से विभाज्य होगी।

(iv) सभी संख्याएँ जो 8 से विभाज्य है 4 से भी विभाज्य होती है।

(v) जो संख्या 9 और 10 दोनों से विभाज्य है वह 90 से भी विभाज्य होती है।

(vi) यदि कोई संख्या दी हुई दो संख्याओं के योग को पूर्ण विभाजित करती है तो वह उन दोनों संख्याओं को अलग-अलग भी पूर्ण विभाजित करती है।

(vii) दो सह-अभाज्य संख्याओं में कम-से-कम एक अभाज्य संख्या होनी चाहिए।

(viii) दो क्रमागत विषम संख्याओं का योग सदैव 4 से विभाज्य होता है।

6. 8, 24 व 32 का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करें।

7. निम्नलिखित का सार्वगुणनखंड बताएँ–

(a) 4, 32 (b) 8, 32, 42 (c) 14, 56, 28

8. निम्न का गुणज निकालें–

(a) 8, 10 (b) 4, 12 (c) 3, 5, 8

9. निम्न का सार्वगुणज बताएँ–

(a) 4, 14 (b) 8, 24 (c) 6, 21 और 27

10. निम्नलिखित का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करें–

(a) 540 (b) 440 (c) 420

3.6 महत्तम समापवर्तक (म.स.) (Highest common factor) या (HCF) –

इसे महत्तम सार्वभाजक (Greatest common divisor) या (GCD) भी कहा जाता है। आइए हम सबसे पहले अपवर्तक विधि द्वारा 18 और 24 का म.स. (HCF) ज्ञात करें।

18 के अपवर्तक = 1, 2, 3, 6, 9 और 18

24 के अपवर्तक = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

18 और 24 में उभयनिष्ठ (सार्व) अपवर्तक = 1, 2, 3, 6

इसमें सबसे बड़ा उभयनिष्ठ अपवर्तक 6 है। अतः महत्तम समापवर्तक = 6

स्वयं करके देखिए

निम्न का म.स. ज्ञात करें –

(i) 28, 30 (ii) 9, 24, 36 (iii) 12, 15, 18 (iv) 50, 60, 80

इस प्रकार, दो या अधिक संख्याओं का म.स. उन संख्याओं का महत्तम (सबसे बड़ी) उभयनिष्ठ अपवर्तक होता है।

अब अभाज्य गुणनखंडन विधि से दी हुई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करेंगे।

विधि – सबसे पहले हम दी हुई संख्याओं का अभाज्य गुणनखंडन करते हैं। तब प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड का गुणनफल ज्ञात कर लेते हैं, जो म० स० कहलाता है।

इस उदाहरण को देखें–

24 और 36 का म.स. अभाज्य गुणनखंडन द्वारा इस प्रकार ज्ञात करते हैं।

24 और 28 का अभाज्य गुणनखंडन–

इस प्रकार $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$28 = 2 \times 2 \times 7$

24 और 28 का सार्वगुणनखंड = 2, 2

अतः 24 और 28 का म.स. = 2 x 2 = 4 है

..... और उदाहरण देखें–

24, 32 और 36 का म.स. अभाज्य गुणनखंड विधि से ज्ञात करते हैं।

इस प्रकार, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

24, 32 और 36 में सार्व अभाज्य गुणनखंड = 2, 2

महत्तम समापवर्तक = 2 x 2 = 4

टिप्पणी : सह-अभाज्य संख्या जैसे– 8 और 15 का म.स.

8 का अभाज्य गुणनखंड = 2 x 2 x 2

15 का अभाज्य गुणनखंड = 3 x 5, चूँकि इन गुणनखंडों में 1 को छोड़कर कोई अन्य सार्वगुणनखंड नहीं है, इसलिए 8 और 15 का म.स. 1 होगा।

प्रश्नावली – 3.3

1. निम्नलिखित संख्याओं के म.स. (अभाज्य गुणनखंड द्वारा) ज्ञात करें –

(a) 24, 36 (b) 40, 60 (c) 20, 50

(d) 4, 12 (e) 12, 72, 84 (f) 70, 105, 175

(g) 91, 112, 49

2. निम्न का म.स. क्या है?

(a) दो क्रमागत संख्याएँ (b) दो क्रमागत सम संख्याएँ

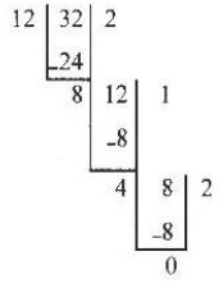
(c) दो क्रमागत विषम संख्याएँ

3. निम्न का म.स. (अभाज्य गुणनखंड द्वारा) ज्ञात करें –

(a) 4 और 15 (b) 8 और 9 (c) 4 और 13

3.7 महत्तम समापवर्तक (भाग विधि द्वारा)

उदाहरण–1. 12 और 32 का म.स. भाग विधि द्वारा इस प्रकार करते हैं–



म.स. = 4

(अंतिम विभाजक जिससे भाज्य पूर्णतः विभाजित हो जाता है, दी गई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होता है।)

कार्य विधि

सबसे पहले दो संख्याओं के बीच भाग करते हैं, बड़ी संख्या में छोटी संख्या से भाग करते हैं, इस प्रकार जो शेष प्राप्त होता है, उससे फिर पहले विभाजक को भाग करते हैं और दूसरा शेष प्राप्त करते हैं, पुनः दूसरे विभाजक को दूसरे शेष से भाग करते हैं। यह क्रिया उस समय तक दुहराते हैं जब तक अंतिम शेष शून्य प्राप्त न हो जाए। इस क्रिया का अंतिम विभाजक दी हुई संख्याओं का म.स. होता है। जैसा कि ऊपर दिखाया जा चुका है।

उदाहरण–2 : 120, 380, 160 का म.स. भाग विधि द्वारा निकालें –

हल :

```
120 | 380 | 3
    |-360 |
    |  20 | 120 | 6
    |     |-120 |
    |     |   0 |
```

अब 20 और 160 का म.स. निकालें

```
20) 160 (8
   −160
      0
```

अतः म.स. = 20

अतः तीन संख्याओं का म.स. ज्ञात करने की विधि इस प्रकार है–

(i) उनमें से पहले किसी दो का म.स. प्राप्त करते हैं।

(ii) फिर (i) में प्राप्त म.स. तथा तीसरी संख्या का म.स. ज्ञात करते हैं।

(iii) (ii) में प्राप्त म.स. तीनों दी हुई संख्याओं का अभीष्ट म.स. है। जैसा कि उदाहरण द्वारा बताया जा चुका है।

उदाहरण- 3 : वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात करें, जिससे यदि 280 और 1245 को भाग करें तो क्रमशः 4 और 3 शेष बचेंगे।

हल : जब कोई संख्या 280 को विभाजित करती है तो 4 शेष बचता है। अतः (280–4) = 276 उस संख्या से पूर्णतया विभाजित होगी। इसी प्रकार (1445-3) = 1442 भी उस संख्या से पूर्णतया विभाजित होगी।

अतः अभीष्ट संख्या 276 तथा 1442 का म.स. होगा।

```
276 | 1242 | 4
    |-1104 |
    |  138 | 276 | 2
    |      |-276 |
    |      |   0 |
```

म.स. = 138

अतः अभीष्ट संख्या = 138

उदाहरण 4 : एक गोष्ठी में हिन्दी, अंग्रेजी तथा गणित में भाग लेने वालों की संख्या क्रमशः 60, 84 और 108 है। उनके बैठने के लिए कम-से-कम कितने कमरे चाहिए यदि प्रत्येक कमरे में एक ही विषय के व्यक्ति बैठें और उनकी संख्या भी समान हो?

हल : प्रत्येक कमरे में बैठने वाले व्यक्तियों की संख्या 60, 84 और 108 का म.स. होगी।

60, 84 और 108 का म.स. = 12 है।

अतः प्रत्येक कमरे में बैठने वालों की अधिकतम संख्या 12 है।

कमरों की संख्या जिनकी आवश्यकता पड़ेगी $= \frac{60+84+108}{12} = 21$

प्रश्नावली – 3.4

1. निम्न का म.स. अभाज्य गुणनखंडन विधि से ज्ञात करें–

(i) 81, 117 (ii) 18, 48 (iii) 27, 63

(iv) 36, 84 (v) 70, 140, 210 (vi) 12, 45, 75

(vii) 120, 144, 204 (viii) 106, 159, 265 (ix) 625, 3125, 15625

2. निम्न का म.स. भाग विधि से ज्ञात करें–

(i) 300, 450 (ii) 442, 1261 (iii) 252, 576

(iv) 935, 1320 (v) 1624, 522, 1276 (vi) 2241, 8217, 747

3. 65610 विभाज्य है 27 से, 65610 की दो निकटतम संख्याएँ ज्ञात करें जो 27 से विभाज्य हों।

4. किन्हीं दो क्रमागत-संख्याओं का म.स. क्या होगा?

5. दो छोटे टैंकरों में क्रमश : 85 और 68 लीटर पेट्रोल आता है। उस मापने वाले बर्तन की अधिकतम धारिता ज्ञात करें जिससे प्रत्येक टैंकर का पेट्रोल पूरा पूरा मापा जा सके।

6. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात करें जिससे 389, 436 और 542 को भाग देने पर क्रमशः 4, 7 और 3 शेष बचे।

7. एक विद्यालय की कक्षा 6, 7, 8 में क्रमशः 220, 116 और 132 छात्र हैं। इनके बराबर-बराबर बच्चे के समूह में अधिक-से-अधिक कितने छात्र होंगे?

8. एक आयताकार फर्श की लम्बाई 20 मी 16 सेमी और चौड़ाई 15 मी 60 सेमी है। इसको समान वर्गाकार टाइलें लगाकर पक्का करना है। ज्ञात करें कि इसके लिए कम-से-कम कितनी टाइलें चाहिए?

लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) (Lowest common multiple) (LCM)

हम जानते हैं कि **दो या अधिक संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) वह छोटी-से-छोटी संख्या है, जो दी हुई प्रत्येक संख्या का गुणज है।**

अपवर्त्य विधि

12 का अपवर्त्य (गुणज) = 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 .....

9 का अपवर्त्य (गुणज) = 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 .....

12 और 9 का सम अपवर्त्य (सार्वगुणज) = 36, 72 .....

12 और 9 के गुणजों में सबसे छोटा (लघुतम) समापवर्त्य 36, अतः 12 और 9 का लघुतम समापवर्त्य = 36

स्वयं करके देखिए

उदाहरण–1 : निम्न का ल.स. अपवर्त्य (गुणज) विधि से करें–

(a) 8, 16 (b) 12, 18, 24

(c) 20, 30, 40, 50 (d) 15, 24, 32, 36

अब हम लोग अभाज्य गुणनखंडन द्वारा दो या अधिक संख्याओं का ल.स. पर विचार करें।

उदाहरण–2 : 12, 18 और 24 का ल.स. ज्ञात करें।

सर्वप्रथम हम प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन करते हैं, जो इस प्रकार है–

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ →2 तीन बार, 3 एक बार

$12 = 2 \times 2 \times 3$ →2 दो बार, 3 एक बार

$18 = 2 \times 3 \times 3$ →2 एक बार, 3 दो बार

ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$

इन संख्याओं में अधिक बार आए अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल ही उनका अभीष्ट ल.स. होता है। स्पष्ट है कि दो या अधिक संख्याओं का अभाज्य गुणनखंड विधि से ल.स. (LCM) ज्ञात करने के लिए पहले हम प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन करते हैं। तब हम उन सब विभिन्न अभाज्य गुणन को उतनी बार लेकर जितनी बार वह उनमें से किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में अधिक-से-अधिक सम्मिलित है, गुणा कर लेते हैं।

उदाहरण–3 : 16, 24, 36 का ल.स. ज्ञात करें।

हल : $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ 2 चार बार

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ 2 तीन बार, 3 एक बार

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 2 दो बार, 3 दो बार

ल.स. = इनमें सबसे अधिक बार आए अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$

प्रश्नावली – 3.5

1. निम्नलिखित का ल.स. अभाज्य गुणनखंडन विधि से करें–

(a)	16, 36	(b)	14, 28	(c)	32, 36
(d)	50, 60	(e)	160, 120	(f)	32, 42
(g)	15, 18, 21	(h)	24, 32, 36	(i)	9, 12, 18
(j)	9, 12, 18, 21	(k)	12, 16, 24, 30		

आइए ल.स. निकालने की एक अन्य विधि पर विचार करते हैं, जिसे भाग विधि कहते हैं।

उदाहरण–1

16, 24 और 36 का ल.स. भाग विधि से ज्ञात करें।

हल :

2	16, 24, 36
2	8, 12, 18
2	4, 6, 9
3	2, 3, 9
	2, 1, 3

ल.स. = 2 x 2 x 2 x 3 x 2 x 3 = 144

प्रक्रिया

1. सर्वप्रथम इन संख्याओं में सबसें छोटी अभाज्य संख्या से भाग करते हैं और हम यह भी देखते हैं कि दी गई संख्याओं में कम-से-कम दो संख्याओं में भाग लगे अन्यथा अन्य दूसरी वांछित अभाज्य संख्या से भाग करेंगे, जो संख्या उस वांछित संख्या से पूरी-पूरी विभाजित होती है, उसका भागफल उसके नीचे लिखते जाते हैं और जो संख्या उस वांछित संख्या से विभाजित नहीं होती है, उस संख्या को उसी के नीचे ही वैसा-का-वैसा रख दिया जाता है।
2. यह तब तक जारी रखते हैं जब तक कि कम-से-कम दो संख्या उससे कटती रहें।
3. जब उस वांछित अभाज्य संख्या से भाग नहीं लगे तब दूसरी वांछित अभाज्य संख्या लेते हैं और ऊपर की तरह की प्रक्रिया अपनाते हैं, यही क्रिया तब तक करते रहते हैं, जब तक कि संख्या पूरी तरह विभाज्य न हो जाय। जब हम आश्वस्त हो जाएँ कि

अब संख्याएँ किसी भी वांछित अभाज्य संख्या से विभाज्य नहीं होती है तब अंत में सभी वांछित अभाज्य संख्याओं का गुणनफल प्राप्त करते हैं और यही गुणनफल उन संख्याओं का अभीष्ट ल.स. होता है।

उदाहरण 2 :

वह छोटी-से-छोटी संख्या ज्ञात करें जिसे 15, 18, 24, 36 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 4 शेष बचे।

हल :

2	15, 18, 24, 36
2	15, 9, 12, 18
3	15, 9, 6, 9
3	5, 3, 2, 3
5	5, 1, 2, 1
2	1, 1, 2, 1
	1, 1, 1, 1

ल.स. = 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x 2 = 360

अतः अभीष्ट सं. = 360 + 4 = 364

म.स. (HCF) तथा ल.स. (LCM) के गुण

1. दी हुई संख्याओं का म.स. उन संख्याओं में किसी से भी बड़ा नहीं होता।
2. दी हुई संख्याओं का ल.स. उनमें से किसी भी संख्या से छोटा नहीं होता।
3. दो सह-अभाज्य (Co-prime numbers) संख्याओं का म.स. 1 होता है।
4. स्पष्टतया, दो या अधिक सह-अभाज्य संख्याओं का ल.स. उन सब का गुणनफल होता है।
5. यदि कोई संख्या मान लें a किसी दूसरी संख्या, मान ले b का गुणनखंड है तो a और b का म.स. a तथा उनका ल.स. b होता है।
6. दो या अधिक संख्याओं का म.स. उन संख्याओं में प्रत्येक को पूर्ण विभाजित करता है और प्रत्येक दी हुई संख्या अपने ल.स. को पूर्ण विभाजित करती है। इसलिए इनका म.स. उनके ल.स. का गुणनखंड होता है।

म.स. और ल.स. में संबंध

एक उदाहरण लेते हैं– हम दो संख्याएँ 48 और 60 लें और उसका म.स. और ल.स. निकालें।

48 और 60 का म.स. = 12

48 और 60 का ल.स. = 240

म.स. और ल.स. का गुणनफल = 12 x 240 = 2880

दी हुई संख्याओं 48 और 60 का गुणनफल = 48 x 60 = 2880

अब एक और संख्या युग्म 24 और 36 पर विचार करें।

24 और 36 का म.स. = 12

24 और 36 का ल.स. = 72

म.स. और ल.स. का गुणनफल = 12 x 72 = 864

संख्याएँ 24 और 36 का गुणनफल = 24 x 36 = 864

प्रत्येक दशा में हम देखते हैं कि म.स. और ल.स. का गुणनफल दोनों संख्याओं के गुणनफल के बराबर है अर्थात् **म.स. x ल.स. = पहली संख्या x दूसरी संख्या**

इससे निकले सूत्र नीचे दिए जाते हैं : –

$$\text{म.स.} = \frac{\text{पहली संख्या x दूसरी संख्या}}{\text{ल.स.}}$$

$$\text{ल.स.} = \frac{\text{पहली संख्या x दूसरी संख्या}}{\text{म.स.}}$$

$$\text{पहली संख्या} = \frac{\text{म.स. x ल.स.}}{\text{दूसरी संख्या}}$$

$$\text{दूसरी संख्या} = \frac{\text{म.स. x ल.स.}}{\text{पहली संख्या}}$$

उदाहरण–1 : दो संख्याओं का ल.स. 72 और म.स. 12 है तथा एक संख्या 36 है तो दूसरी संख्या बताएँ।

हल : म.स. x ल.स. = पहली संख्या x दूसरी संख्या

12 x 72 = 36 x दूसरी संख्या

$$\text{दूसरी संख्या} = \frac{\cancel{72}^{2} \times 12}{\cancel{36}} = 2 \times 12 = 24$$

उदाहरण–2 : किसी दिन, दिल्ली से मेरठ की बसें 40 मिनट के अन्तराल से और मेरठ से दिल्ली की बसें 45 मिनट के अन्तराल से चलती हैं। यदि विपरीत दिशा से आने वाली दो बसें किसी विशेष पुल से 10:15 सुबह में गुजरती हों तो वह जल्दी-से-जल्दी उसके बाद उस पुल से किस समय गुजरेंगी।

हल : जल्दी-से-जल्दी जिस समय वे बसें मिलेंगी वह 40 और 45 का ल.स. (मिनटों में) 10:15 सुबह में जोड़ने पर प्राप्त होंगे।

40 और 45 का ल.स. = 360

इसलिए, दोनों बसें उस पुल से दोबारा 360 मिनट बाद एक साथ गुजरेंगी अर्थात् 10:15 सुबह के 6 घंटे बाद।

अतः दोनों बसें फिर एक साथ उस पुल से 4:15 शाम में गुजरेंगी।

प्रश्नावली – 3.6

1. निम्न संख्याओं का ल.स. भाग विधि द्वारा ज्ञात करें–

(i)	18, 28	(ii)	32, 40	(iii)	24, 36
(iv)	12, 36, 48	(v)	25, 20, 15, 45	(vi)	8, 5
(vii)	6, 15, 18, 30, 36	(viii)	180, 384, 144		
(ix)	112, 168, 266	(x)	240, 420, 660		

2. नीचे दिए गये प्रत्येक संख्या युग्म के लिए सिद्ध करें कि उनका गुणनफल उनके म.स. और ल.स. के गुणनफल के समान (बराबर) है–

(i) 24, 34 (ii) 36, 42 (iii) 25, 40 (iv) 15, 45

3. दो संख्याओं का म.स. 6 और ल.स. 36 तथा एक संख्या 18 तो दूसरी संख्या ज्ञात करें।

4. दो संख्याओं का म.स. 16 और उनका गुणनफल 6400 है। उसका ल.स. ज्ञात करें।

5. दो संख्याओं का म.स. और ल.स. क्रमशः 13 और 1989 है। यदि उनमें से एक संख्या 117 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात करें।

6. वह छोटी-से-छोटी संख्या ज्ञात करें जिसको 25, 40 और 60 से भाग करने पर 7 शेष बचे।

7. तीन व्यक्ति एक सुबह सैर को निकले। उनकी पग दूरी क्रमशः 80 से.मी. 85 से.मी. तथा 90 से.मी. है। ज्ञात करें कि चलने के स्थान से कितनी दूरी पर उनके पग फिर एक साथ पड़ेंगे।

8. 10000 के निकटतम वह संख्या ज्ञात करें जो 2, 3, 4, 5, 6 और 7 से पूरी-पूरी विभाजित हो सके।

9. 100000 के निकटतम उससे बड़ी संख्या ज्ञात करें जो 8, 15 और 21 से पूरी-पूरी विभाजित हो सके।

10. एक सड़क के साथ-साथ तार के खम्भे 220 मीटर की दूरी पर लगे हैं और उसी सड़क के साथ-साथ पत्थर के ढेर 300 मीटर की समान दूरी पर लगे हैं। यदि पहले ढेर पहले खम्भे के साथ ही है तो उससे कितनी दूरी पर दूसरी ढेर और खम्भे के एक साथ लगी होगी?

टिप्पणी : 1729 एक ऐसी लघुतम संख्या है, जिन्हें दो घनों के योग के रूप में दो विभिन्न ढंगों से व्यक्त कर सकते हैं। जैसे एक 12^3+1^3 और दूसरा $10^3 + 9^3$। इस संख्या (1729) का पता हमारे गणितज्ञ रामानुजन ने किया था, जिसे रामानुजन संख्या कहते हैं।

अध्याय-4 पूर्णांक

भूमिका

आपने कारगिल युद्ध के समय भारतीय सैनिकों को 14000 फीट ऊँचाई पर भी रहते हुए सुना होगा। उन्हें इतनी सर्दी में भी अपने देश के लिए वहाँ रहना पड़ा। क्या आपको मालूम है कि जनवरी के महीने में कारगिल हिल का औसत तापमान शून्य से भी 40°C नीचे रहता है। इसे हम –40°C लिख सकते हैं। अब निम्नलिखित स्थानों के तापमान को + या – चिह्न से निरूपित कीजिए–

(a) उदयपुर का औसत तापमान शून्य से 39°C ऊपर की ओर .....

(b) बोधगया का तापमान शून्य से 26°C ऊपर की ओर .....

(c) लेह का औसत तापमान **जनवरी** में शून्य से 14°C नीचे की ओर .....

(d) कारगिल शहर का औसत तापमान **जनवरी** में शून्य से 13°C नीचे की ओर.....

रामू दो कि.ग्रा. दाल लेने बाजार जाता है। उसके पास 30 रुपये हैं। दुकानदार दाल का भाव 18 रुपये प्रति कि.ग्रा. बताता है। इसका मतलब 2 कि.ग्रा. का मूल्य 36 रुपये होगा। किन्तु रामू के पास 30 रुपये हैं। वह 30 रुपये दुकानदार को देता है और कहता है कि 6 रुपये उधार रहे। अब यदि हम पूछें कि रामू के पास कितने बचे तो क्या हम कह सकते हैं कि उसके पास शून्य रुपये बचे? क्यों नहीं?

क्योंकि अब यदि रामू के पास दो रुपये आते हैं तो उन्हें वह दुकानदार को देगा और तब भी उस पर 4 रुपये का उधार रहेगा। यदि उसके पास शून्य रुपये होते तो 2 रुपये मिलने पर उसके पास 2 रुपये हो जाते।

अब सोचने की बात यह है कि हम इन 4 रुपयों को किस प्रकार दिखाएँ? रामू उन 4 रु. के उधार को याद रखने के लिए अपनी डायरी में 4 लिख देता है, पर कैसे पता चले कि 4 रु. लेने हैं या देने हैं? क्या हम इस उधार राशि के लिए कोई चिह्न बना सकते हैं?

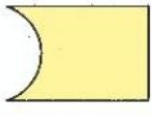
इस प्रकार की समस्या को दूर करने के लिए एक अलग प्रकार की संख्या की परिकल्पना की गई जिसे ऋणात्मक संख्या कहते हैं।

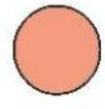
4.1 पूर्णांक

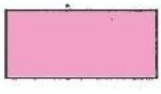
जैसा कि आप पहले पढ़ चुके हैं कि प्राकृत संख्याएँ 1, 2, 3, 4 ..... हैं।

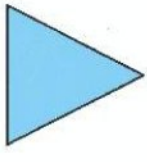
यदि हम प्राकृत संख्याओं के संग्रह में शून्य को सम्मिलित कर लेते हैं, तो हमें संख्याओं का एक नया संग्रह प्राप्त होता है। इन संख्याओं को **पूर्ण संख्याएँ** कहते हैं। इस प्रकार 0, 1, 2, 3, 4 ..... पूर्ण संख्याएँ हैं।

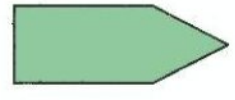
अब हमें ज्ञात हो गया है कि कुछ स्थितियों को दर्शाने के लिए ऋणात्मक संख्याओं की भी आवश्यकता होती है। जैसे –1, –2, –3, –4, –5 .....। यदि हम पूर्ण संख्याओं और इन ऋणात्मक संख्याओं को मिला लें तो हमें संख्याओं का एक नया संग्रह प्राप्त होगा, जिसे पूर्णांक कहते हैं जो –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3 ..... है। संख्याओं के इस संग्रह में 1, 2, 3 ..... धनात्मक पूर्णांक कहलाते हैं और –1, –2, –3 ..... ऋणात्मक पूर्णांक कहलाते हैं। आइए इसे निम्न आकृतियों द्वारा समझने का प्रयत्न करें। मान लीजिए ये आकृतियाँ अपने सम्मुख लिखी संख्याओं या उनके संग्रह को निरूपित करती हैं।


प्राकृत संख्याएँ


शून्य

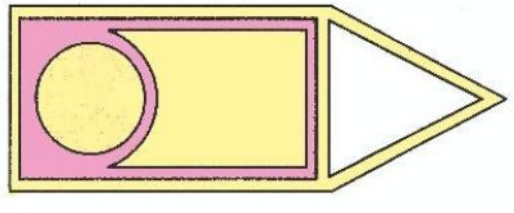

पूर्ण संख्याएँ


ऋणात्मक पूर्णांक

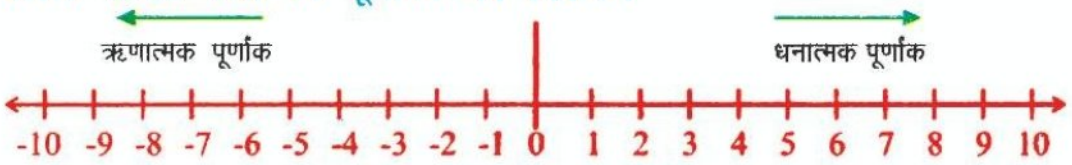

पूर्णांक

तब पूर्णांकों के संग्रह को निम्नलिखित आरेख से समझा जा सकता है, जिसमें पिछली सभी संख्याएँ और उनके संग्रह सम्मिलित हैं।

पूर्णांक

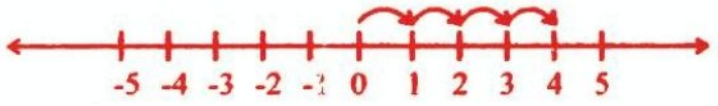


4.1.1 संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण



एक रेखा खींचिए और उस पर समान दूरी पर कुछ बिन्दु अंकित कीजिए, जैसा कि ऊपर आकृति में दिखाया गया है। इनमें से एक बिन्दु को शून्य से अंकित कीजिए। शून्य के दाईं ओर के बिन्दु धनात्मक पूर्णांक हैं और इन्हें +1, +2, +3 इत्यादि या केवल 1, 2, 3 इत्यादि से अंकित किया गया है। शून्य के बाईं ओर के बिन्दु ऋणात्मक पूर्णांक हैं और इन्हें –1, –2, –3 इत्यादि से अंकित किया गया है।

नीचे की रेखा पर +4 अंकित करने के लिए हम शून्य के दाईं ओर 4 कदम (1 बिन्दु को 1 कदम मान लीजिए) चलते हैं।



इसी प्रकार –2 अंकित करने के लिए, हम शून्य के बाईं ओर 2 बिन्दु चलते हैं।



स्वयं करके देखिए

संख्या रेखा पर –4, 3, –5, 6 और –1 को अंकित कीजिए।

इसी प्रकार की अन्य स्थितियाँ, जहाँ हम इन चिह्नों का प्रयोग करते हैं, आगे दी गई हैं।

जैसे-जैसे हम नीचे जाते हैं, ऊँचाई कम होती जाती है। जैसे– समुद्र तल के स्तर से नीचे की गहराई को हम एक ऋणात्मक संख्या से व्यक्त कर सकते हैं और समुद्र तल से ऊपर की ऊँचाई को एक धनात्मक संख्या से व्यक्त कर सकते हैं। समुद्र के तल की ऊँचाई शून्य है।

कारगिल और लेह का तापमान कई बार शून्य (0°C) से नीचे चला जाता है। इस तापमान को (–) चिह्न से निरूपित किया जाता है।

उदाहरणार्थ– लेह का फरवरी माह का औसत तापमान 0° से 12°C नीचे रहने पर तापमान को –12°C लिखा जाता है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित को उचित चिह्न के साथ लिखिए–

(a) चंपारण समुद्र तल से 100 मी ऊँचाई पर है .....

(b) कोलकाता का औसत तापमान 0° से 32°C ऊपर .....

(c) कुट्टनड़ (केरल) समुद्र तल से 2.20 मी नीचे .....

(d) कारगिल हिल का औसत तापमान 0° से 40°C नीचे .....

4.1.2 पूर्णांकों की क्रमबद्धता



I

I मेढ़क : बादल घुमड़ रहे हैं। लगता है वर्षा आने वाली हैं, अब कुएँ में पानी आएगा।

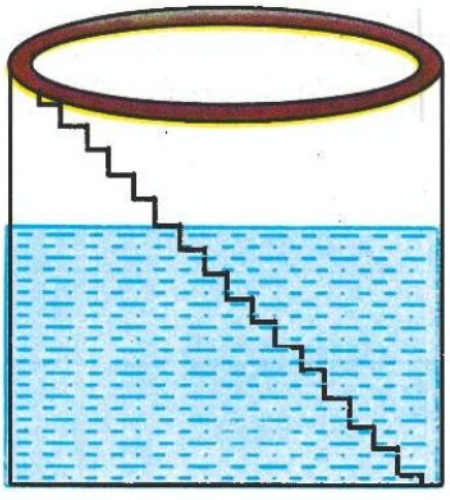
II मेढ़क : जब कुएँ में पानी आएगा तो हमें ऊपर की सीढ़ी पर बैठकर बात करनी होगी।

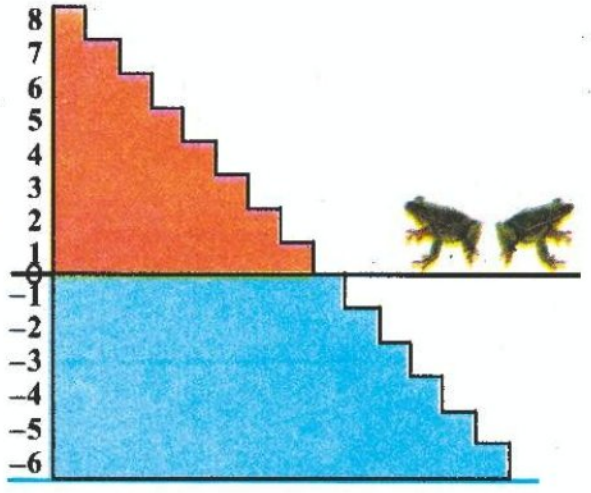
I मेढ़क : ऊपर कौन-सी सीढ़ी पर बैठेंगे, यह तो वर्षा पर निर्भर करेगा। क्या हम कुएँ में चढ़े पानी को नाप सकेंगे?

II मेढ़क : हम इस सीढ़ी पर शून्य लगाकर इससे ऊपर वाली सीढ़ियों को क्रमशः 1, 2, 3. .. आदि संख्या लिख देंगे तब हम बता सकेंगे कि कुएँ में कितना पानी आया।

I मेढ़क : और हम नीचे वाली सीढ़ियों को –1, –2, –3 ... लिखेंगे तो गर्मी में हुई पानी की कमी का भी हिसाब रखा जा सकेगा।

II मेढ़क : आओ चलो, सीढ़ियों पर मान लिख देते हैं।





मेढ़क I : अब यदि पानी चढ़ता है तो हमें उतनी ही सीढ़ियाँ ऊपर जाना होगा।

मेढ़क II : हाँ, और यदि घटेगा तो हमें सीढ़ियाँ नीचे जाना होगा।

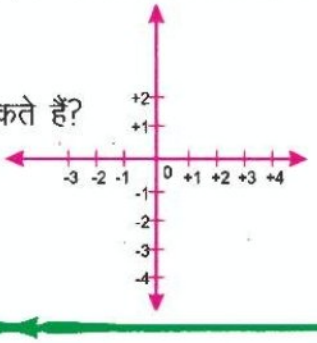
मेढ़क I : लेकिन गर्मी में जब पानी "–1" पर है तब क्या वहाँ "–2" से ज्यादा पानी होगा?

मेढ़क II : कुएँ की सबसे निचली सीढ़ी से ऊपर गिनते जाओ और बताओ कि –1 कितनी सीढ़ी पर आता है।

मेढ़क I : –2 तो पाँचवीं सीढ़ी पर तथा –1 छठी सीढ़ी पर है। इसका मतलब –1 का मान –2 से ज्यादा है।

मेढ़क II : इस प्रकार किसी जगह को यदि शून्य मान लें तो उसके बाएँ चलने पर संख्याओं में ऋणात्मक चिह्न (–) और दाएँ चलने पर धनात्मक चिह्न (+), तथा ऊपर जाने पर धनात्मक चिह्न (+) और नीचे जाने पर ऋणात्मक चिह्न (–) संख्या पर लगता है।

मेढ़क I : तो क्या हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं?



मेढ़क II : हाँ, बिल्कुल

मेढ़क I : अब समझा।

प्रयास कीजिए

आप भी मेढ़कों की बातचीत के आधार पर =, <, > का चिह्न लगाइए–

(i) 0 ☐ –1 (iv) 50 ☐ 70

(ii) –5 ☐ 5 (v) –1 ☐ 100

(iii) 100 ☐ 100 (vi) –53 ☐ –5

आइए, अब पुनः उन पूर्णांकों को देखें जो एक संख्या रेखा पर निरूपित किए गए हैं। हम जानते हैं कि 7 > 4 होता है। और ऊपर खींची गई संख्या रेखा से हम देखते हैं कि संख्या 7 संख्या 4 के दाईं ओर स्थित है।

इसी प्रकार, 4 > 0। संख्या 4, संख्या 0 के दाईं ओर स्थित है। अब चूँकि संख्या 0 संख्या – 3 के दाईं ओर स्थित है इसलिए 0 > –3 है। पुनः संख्या– 3 संख्या– 8 के दाईं ओर स्थित है। इसलिए –3 > –8 है।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि संख्या रेखा पर जब हम दाईं ओर चलते हैं तो संख्या का मान बढ़ता है और जब हम बाईं ओर चलते हैं तो संख्या का मान घटता है।

अतः पूर्णांकों के संग्रह को ...., –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.... लिखा जा सकता है।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि–

(a) प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक, प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(b) शून्य प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा होता है।

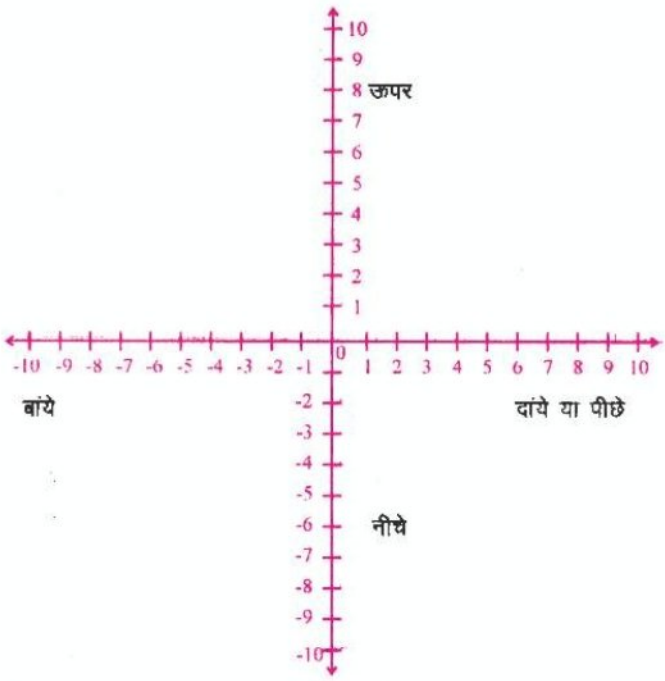
(c) शून्य प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(d) शून्य न तो ऋणात्मक पूर्णांक है न ही धनात्मक पूर्णांक।

(e) कोई संख्या शून्य से जितनी अधिक ऊपर होगी वह शून्य से उतनी ही बड़ी होगी।

(f) कोई संख्या शून्य से जितनी अधिक नीचे होगी वह शून्य से उतनी ही छोटी होगी।

"यदि इन मानों को संख्या रेखा पर देखें तो संख्या रेखा पर शून्य के दाईं ओर बढ़ती हुई संख्याएँ होंगी एवं शून्य के बाईं ओर घटती हुई संख्याएँ होंगी"।



स्वयं करके देखिए

संख्या रेखा देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) –1 और –2 के बीच में कौन-सी पूर्णांक संख्याएँ स्थित हैं?

(b) –10 और –2 के बीच में कौन-सी पूर्णांक संख्याएँ स्थित हैं? इनमें से कौन-सी सबसे बड़ी है और कौन-सी पूर्णांक संख्या सबसे छोटी है?

(c) –3 पर एक मेढ़क बैठा हुआ है। –9 पर बैठे दूसरे मेढ़क के पास पहुँचने के लिए उसे किस दिशा में और कितनी सीढ़ियाँ चलनी होंगी?

(d) यदि हम संख्या –6 के ऊपर 4 कदम चलें, तो किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

प्रश्नावली – 4.1

1. निम्नलिखित में प्रयुक्त हुई संख्याओं को उचित चिह्न लगाकर पूर्णांकों के रूप में लिखिए–

(a) पारा शून्य से 4°C नीचे है।

(b) एक हवाई जहाज भूमि से एक हजार पाँच सौ मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है।

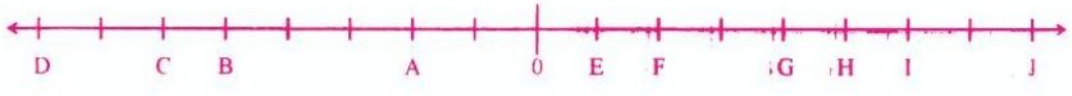
(c) यदि 5 कदम पूरब की दिशा में चली दूरी को + 5 से व्यक्त करें तो 5 कदम पश्चिम की दिशा में चली दूरी को किस पूर्णांक से व्यक्त करेंगे?

(d) बैंक खाते में 500 रु. जमा कराना।

2. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए–

(a) –1 (b) +5 (c) –4 (d) +7 (e) –8

3. नीचे दिए गए चित्र में एक संख्या रेखा को दिखाया गया है, जो पूर्णांकों को निरूपित करती है।



इस रेखा को देखते हुए निम्न बिन्दुओं के स्थान ज्ञात कीजिए–

(a) यदि बिन्दु D पूर्णांक –8 है, तो + 8 वाला बिन्दु कौन-सा है?

(b) बिन्दु B एक ऋणात्मक पूर्णांक है या धनात्मक पूर्णांक।

(c) बिन्दु C और E के संगत पूर्णांक लिखिए।

(d) इस संख्या रेखा पर अंकित बिन्दुओं में से किसका मान सबसे कम है?

(e) सभी बिन्दुओं को उनके मानों के घटते क्रम में लिखिए।

4. निम्नलिखित युग्मों में, कौन-सी संख्या, संख्या रेखा पर दाईं ओर स्थित है?

(a) 3, 7 (b) –5, –7 (c) 2, –2

(d) –12, 11 (e) –5, –8 (f) 1, 0

5. नीचे दिए हुए युग्म पूर्णांकों के बीच के सभी पूर्णांक (बढ़ते हुए क्रम में) लिखिए–

(a) 1 और –8 (b) –6 और 6

(c) –9 और –15 (d) –30 और –21

6. (a) –25 से छोटे चार ऋणात्मक पूर्णांक लिखिए।

(b) –8 से बड़े पाँच ऋणात्मक पूर्णांक लिखिए।

7. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य और असत्य लिखिए–

(a) संख्या रेखा पर शून्य के बाईं ओर ऋणात्मक संख्याएँ होती हैं।

(b) संख्या रेखा पर दाहिनी ओर की संख्या उसके बाईं ओर की संख्या से छोटी होती है।

(c) सबसे छोटा पूर्णांक – 1 है

(d) –28 पूर्णांक –25 से बड़ा है।

8. एक संख्या रेखा खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) यदि हम –5 के बाईं ओर 5 कदम चलें, तो हम किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

(b) यदि हम +2 के दाईं ओर 4 कदम चलें तो हम किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

(c) यदि हम संख्या रेखा पर –7 पर हैं, तो –15 पर पहुँचने के लिए हमें किस दिशा में चलना चाहिए?

(d) यदि हम संख्या रेखा पर –4 पर हैं तो +3 पर पहुँचने के लिए हमें किस दिशा में चलना चाहिए?

9. पानी के जमाव बिन्दु को शून्य (0°C) से दर्शाया जाता है। यदि माउन्ट आबू का तापमान जमाव बिन्दु से 2°C कम है तो उसे हम –2°C लिख सकते हैं।

अब निम्न प्रश्नों के उत्तर दें–

(a) सर्दियों में यदि कश्मीर का तापमान जमाव बिन्दु से 7°C कम हो, तो उसे कैसे लिखेंगे?

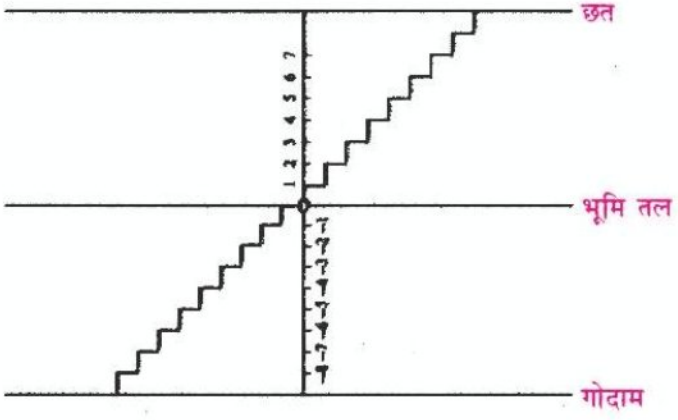
(b) प्रत्येक युग्मों में कम तापमान पर गोला लगाइए :

(a) 20°C या 26°C (b) 0°C या –4°C

(c) –3°C या -1°C (d) –8°C या –12°C

4.1.3 पूर्णांकों का योग

सिद्धार्थ ने छत पर जाने के लिए सीढ़ियों की संख्या को धनात्मक पूर्णांक माना और नीचे गोदाम में जाने के लिए सीढ़ियों की संख्या को ऋणात्मक पूर्णांक माना तथा भूमि तल से 0 माना। उन्होंने मोहन को भूमितल से ऊपर तथा नीचे वाली सीढ़ियों पर चलने को कहा



तथा प्रत्येक के लिए गणितीय कथन भी लिखा।

(a) भूमि तल से 16 सीढ़ी ऊपर चलिए। (+16)

(b) भूमि तल से 8 सीढ़ी नीचे चलिए। (–8)

(c) भूमि तल से 6 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 3 सीढ़ी और ऊपर चलिए। (–6) + (+3)

(d) भूमि तल से 4 सीढ़ी नीचे चलिए और वहाँ से 2 सीढ़ी और नीचे चलिए। (–4) + (–2)

स्वयं प्रयास कीजिए

नीचे दिए गए कथनों के लिए गणितीय कथन लिखिए–

(a) भूमि तल से 5 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 12 सीढ़ी ऊपर चलिए।

(b) भूमि तल से 4 सीढ़ी ऊपर चलिए और फिर वहाँ से 6 सीढ़ी नीचे चलिए।

(c) भूमि तल से 7 सीढ़ी नीचे चलिए एवं फिर वहाँ से 8 सीढ़ी ऊपर चलिए।

सिद्धार्थ ने मोहन के चलने के अनुसार संख्या लिखने का प्रयास किया–

(a) $-5 + 12 = -17$ (b) $4 - 6 = 2$ (c) $-7 + 8 = 1$

सिद्धार्थ ने कुछ गलतियाँ की हैं। क्या आप उसके उत्तरों की जाँच कर सकते हैं और गलतियों को सही कर सकते हैं?

स्वयं करके देखिए

आप भी एक संख्या रेखा बनाइए एवं इस तरह के प्रश्न स्वयं बनाइए एवं उन्हें हल करने के लिए अपने साथियों को दीजिए।

प्रश्नावली – 4.2

1. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए जो–

(a) 5 से 3 अधिक है (b) –5 से 5 अधिक है

(c) 2 से 6 कम है (d) –2 से 3 कम है

2. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित योग ज्ञात कीजिए–

(a) $9 + (-6)$ (b) $5 + (-11)$

(c) $(-1) + (-7)$ (d) $(-5) + 10$

(e) $(-1) + (-2) + (-3)$ (f) $(-2) + 8 + (-4)$

अध्याय-5 आधारभूत ज्यामितीय जानकारियाँ

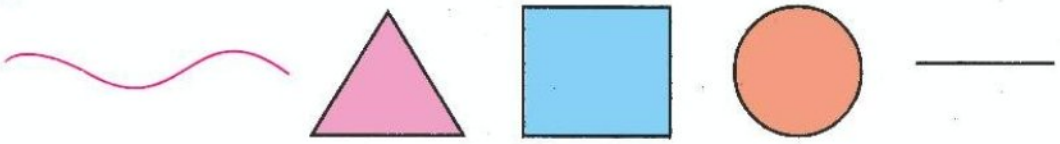
भूमिका

प्राचीनकाल से ही हमारे ऋषि-मुनियों ने विभिन्न आकृतियों के यज्ञ कुण्डों का निर्माण किया। आर्यभट्ट, युक्लिड तथा उमर खैय्याम आदि गणितज्ञों ने भी रैखिक आकृतियों के गुण, आकार तथा एक दूसरे के साथ संबंधों का अध्ययन किया है। ज्यामिति शब्द की उत्पत्ति यूनानी शब्द जिओमीट्रोन से हुई है, जियो (Geo) का अर्थ है 'भूमि' और मीट्रोन का अर्थ है 'मापना'। अतः इसका अर्थ हुआ 'भूमि का मापन'। आज कला, वास्तुकला, इंजीनियरिंग, मापन, कपड़ों के डिजाइन आदि में ज्यामिति के ज्ञान का प्रभाव देखा जा सकता है। वस्तुओं के आकार में, चीजों के डिजाइन में और ढाँचों में ज्यामितीय आकारों को देखा जा सकता है।

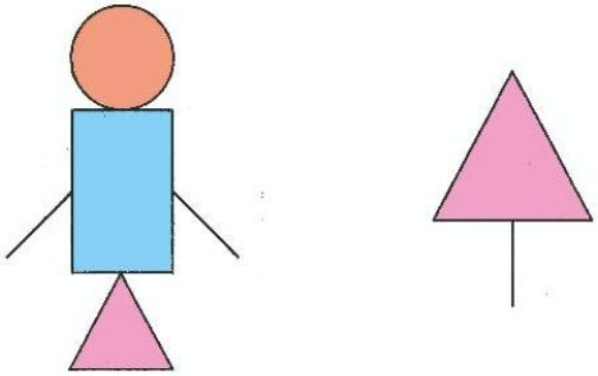
नीचे दी गई वस्तुओं के चित्र को देखिए और इनमें आयत, वर्ग, वृत्त, त्रिभुज आदि जैसे ज्यामितीय आकारों को ढूँढ़िए।



कुछ करें



इन आकृतियों की सहायता से कुछ चित्र बनाइए। जैसे–

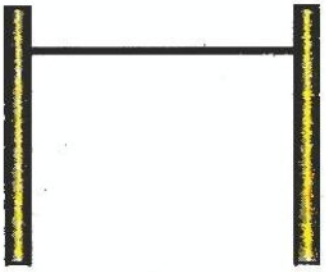


प्रकृति में दिखाई देने वाली विभिन्न प्रकार की वस्तुओं का जब हम रेखाचित्र बनाते हैं तो इसमें हमें सीधी एवं घुमावदार रेखाओं का प्रयोग करना पड़ता है। इन आकृतियों को हम **रैखिक आकृति** कहते हैं।

नीचे के चित्र को ध्यान से देखिए तथा बताइए कि कौन-सी रेखा आपको घुमावदार रेखा लगती है तथा कौन-सी सीधी रेखा?



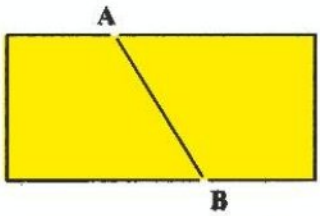
चित्र 1



चित्र 2

यदि आपको वृत्त और चौकोर का रेखाचित्र खींचने को कहा जाए तो आप वृत्त कैसी रेखा से बनाएँगे? इसी प्रकार एक चौकोर या वर्ग बनाने के लिए आप कैसी रेखा का इस्तेमाल करेंगे? सीधी रेखा को **सरल रेखा** तथा घुमावदार रेखा को **वक्र रेखा** कहते हैं।

5.1 रेखाखंड (Line Segment)



अपनी कॉपी का कागज लीजिए तथा उसको मोड़िए और फिर उसे खोल लीजिए। आपको कागज के टुकड़े पर जो निशान दिखाई देता है वह आपको एक रेखाखंड का एहसास कराता है। इसके दो अंत बिन्दु A और B है। इसी प्रकार पुस्तक का किनारा रेखाखंड को निरूपित करता है।



रेखाखंड के कुछ उदाहरण इन चित्रों में हैं–



स्वयं कीजिए

1. आप अपने आस-पास से रेखाखंड के कुछ उदाहरण ढूँढ़िए तथा उनके नाम लिखिए।
2. चित्र को ध्यान से देखिए। बिन्दु A पर एक चूहा है तथा बिन्दु B पर रोटी का एक टुकड़ा। चूहा चार रास्तों से उस रोटी तक पहुँच सकता है। आपको यह बताना है कि चूहा किस रास्ते से सबसे पहले रोटी तक पहुँचेगा और क्यों?



आपने देखा कि तीसरे रास्ते से चूहा सबसे पहले रोटी तक पहुँचेगा। यह AB के बीच सबसे छोटी दूरी है। हम कह सकते हैं कि दो बिन्दु A और B के बीच की सबसे छोटी दूरी AB रेखाखंड को दर्शाती है। इसे $\overline{AB}$ या $\overline{BA}$ से व्यक्त किया जाता है। बिन्दु A तथा B इस रेखाखंड के अंत बिन्दु हैं।

कुछ करें

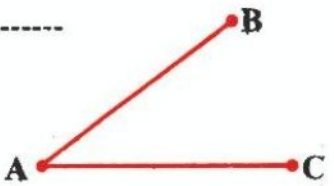
(1) रेखाखंडों के नाम लिखिए–

X _____ Y

M _____ N

---

(2) दी गई आकृति में रेखाखंडों के नाम बताएँ। क्या A प्रत्येक रेखाखंड का एक अंत बिंदु है?



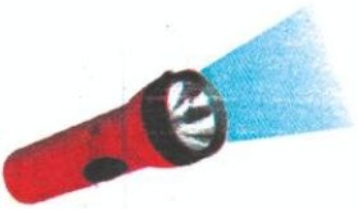
किरण (Ray)

कल्पना कीजिए कि AB रेखाखंड को B बिन्दु से आगे एक दिशा में बिना किसी अंत के आगे बढ़ाया गया है। यह एक किरण है। किरण के कुछ उदाहरण निम्न हो सकते हैं–

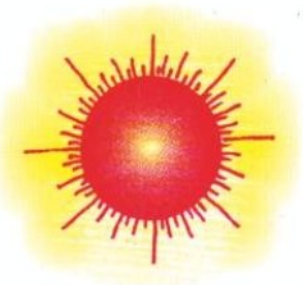




मोमबत्ती से निकली किरणें



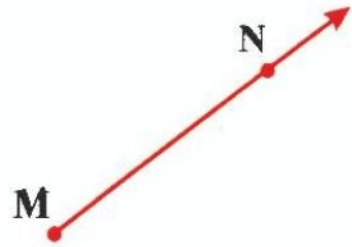
टार्च से निकली प्रकाश की किरणें



सूर्य की किरणें

किरण एक बिन्दु से आरम्भ होती है तथा एक दिशा में ही बिना किसी अंत के बढ़ती जाती है। किरण जिस बिन्दु से आरम्भ होती है, वह उसका **'प्रारम्भिक बिन्दु'** कहलाता है।

दाईं ओर किरण की आकृति दी हुई है। इसका प्रारम्भिक बिन्दु M है। N इस किरण पर स्थित कोई अन्य बिन्दु है। इस किरण को हम $\overrightarrow{MN}$ से व्यक्त करते हैं।



सोचें और बताएँ

यदि $\overrightarrow{AB}$ एक किरण है तो

(क) इसका प्रारम्भिक बिन्दु क्या है?

(ख) क्या बिन्दु B इसी किरण पर स्थित है?

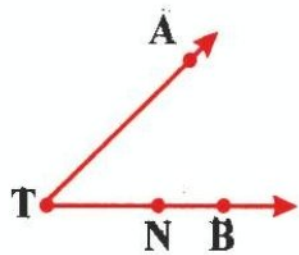
(ग) क्या हम कह सकते हैं कि B इस किरण का प्रारम्भिक बिन्दु है?

कुछ करें

(1) आकृति में दी गई किरणों के नाम लिखिए।

(2) क्या T आरम्भिक बिन्दु है?

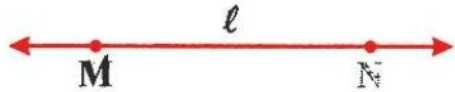
(3) क्या N आरम्भिक बिन्दु है?



रेखा (Line)

जब रेखाखंड $\overline{MN}$ को N से आगे तथा दूसरी ओर M से आगे बिना किसी अंत के लगातार बढ़ाते जाएँ तो क्या होगा?

ऐसा करने पर नयी आकृति का न तो कोई प्रारम्भ होगा न अंत। इससे हमें एक रेखा का उदाहरण प्राप्त होगा। रेखा का न तो कोई आद्य (प्रारम्भिक) बिन्दु होता है और न ही कोई अन्त बिन्दु। इस पर असंख्य बिन्दु होते हैं, परंतु रेखा की स्थिति और झुकाव निश्चित करने हेतु हमें कम-से-कम दो बिन्दुओं का निर्धारण करना पड़ता है जो उस रेखा के गमन की दिशा का निर्धारण करते हैं। रेखा को अंग्रेजी में छोटे अक्षरों से भी व्यक्त करते हैं जैसे– रेखा $\overleftrightarrow{MN}$ को l से व्यक्त किया जा सकता है।



$\overleftrightarrow{MN}$ – MN रेखा है, जो दोनों तरफ बढ़ती है।

$\overrightarrow{MN}$ – MN किरण है जो N दिशा की ओर बढ़ती है।

$\overline{MN}$ – MN रेखाखंड है जिसका एक सिरा M और दूसरा N है

क्या आप कह सकते हैं कि किरण रेखा का ही एक भाग है?

कुछ करें

सही पर (✓) का निशान लगाएँ–

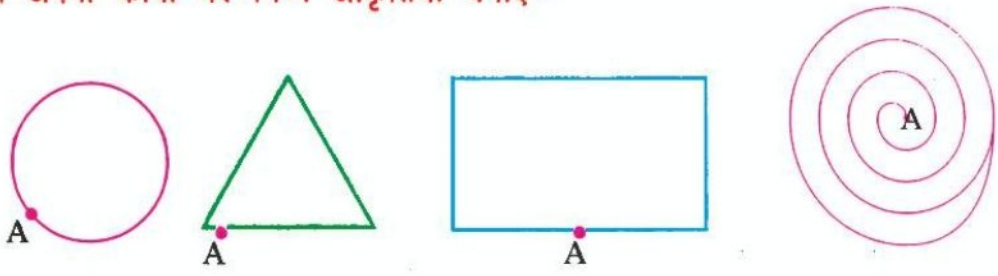
एक रेखा में अंत बिन्दु होते हैं : एक/दो/कोई नहीं

एक रेखाखंड में अंत बिन्दु होते हैं : एक/दो/कोई नहीं

एक किरण में अंत बिन्दु होते हैं : एक/दो/कोई नहीं

5.2 खुली एवं बंद आकृति

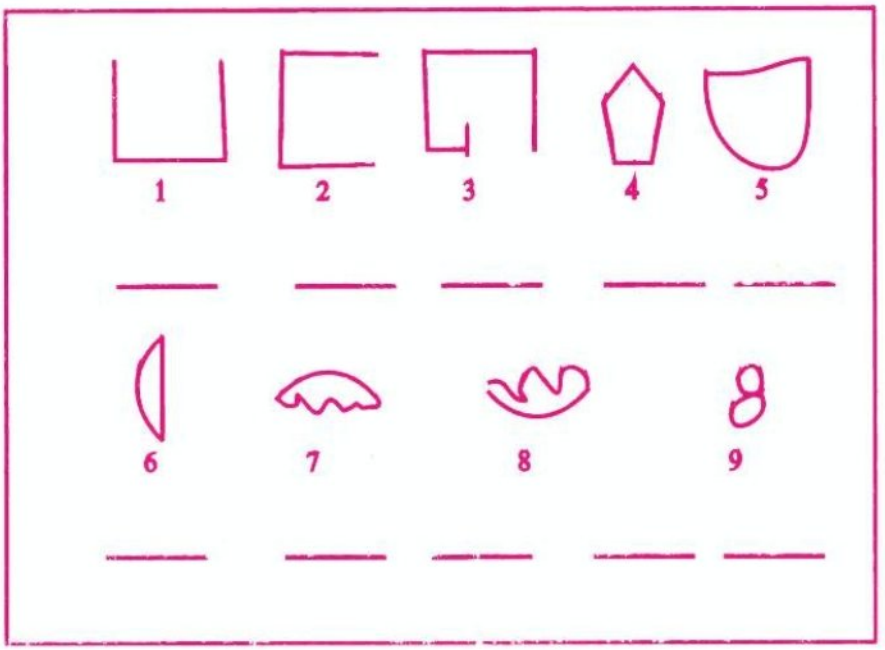
आप अपनी कॉपी पर निम्न आकृतियाँ बनाएँ–



ऊपर दी हुई आकृतियों में बिन्दु A पर अपनी पेंसिल रख आकृति की रेखा के सहारे चलना आरम्भ करें। जिन आकृतियों में जिस बिंदु से आरम्भ किया पुनः उसी बिन्दु पर पहुँच जाएँ ऐसी आकृतियाँ बंद आकृतियाँ हैं। जिन आकृतियों को बनाते समय प्रारंभिक बिन्दु और अंतिम बिन्दु अलग थे, वे आकृतियाँ खुली आकृतियाँ कहलाती हैं। जैसे– पहली तीन आकृतियों में किसी भी बिन्दु से प्रारम्भ करने पर अंत में आप किसी भी बिन्दु पर दोबारा चलें तो क्या पुनः प्रारंभिक बिन्दु पर पहुँच जाते हैं? इसकी जाँच कीजिए।

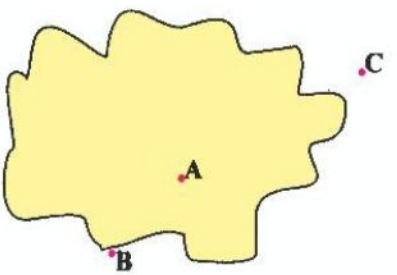
सोचें और बताएँ

कौन-सी आकृति बंद है और कौन खुली?



5.3 एक आकृति में स्थितियाँ

वक्र रेखा की सहायता से एक बंद आकृति बनाएँ तथा उस आकृति के अंदर एक बिन्दु A, वक्र रेखा की परिसीमा पर एक बिन्दु B तथा बंद आकृति के बाहर एक बिन्दु C लें।



आपके द्वारा बनाई गई आकृति का एक नमूना दाईं ओर दिखाया गया है। यहाँ बिन्दु A वक्र अभ्यंतर में यानी अंदर के भाग में, बिन्दु B वक्र की परिसीमा यानी वक्र के सतह पर तथा C बिन्दु वक्र के बहिर्भाग यानी बाहर के भाग में स्थित है। वक्र के अभ्यंतर तथा उसकी परिसीमा को मिलाकर वक्र का क्षेत्र कहा जाता है।

प्रश्नावली – 5.1

(1) नीचे दिए गए रेखाखंड का नाम बताइए–

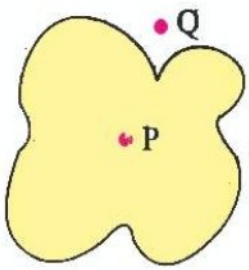


(2) किरण के स्रोतों के उदाहरण बताइए।

(3) निम्नलिखित को अक्षर संकेत में दर्शाइए–

रेखाखंड, किरण, रेखा

(4) बिन्दु P और Q की स्थिति बताइए कि ये किस भाग में हैं?



5.4 कोण

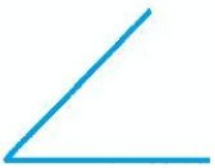
जब दो सरल रेखाएँ अथवा किरणें एक बिन्दु पर मिलती अथवा काटती हैं तो उन रेखाओं के बीच के घुमाव अथवा झुकाव को कोण कहते हैं।



उदाहरण के लिए हम घड़ी के घंटा एवं मिनट की सुइयों को दो किरण $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{AC}$ मानें, तो हम देखते हैं कि इन दोनों किरणों में एक उभयनिष्ठ बिन्दु A है तथा किरण $\overrightarrow{AB}$ एवं $\overrightarrow{AC}$ एक कोण बना रही है। A इस कोण का प्रारम्भिक बिन्दु है जिसे हम कोण का **शीर्ष** कहते हैं तथा $\overrightarrow{AB}$ एवं $\overrightarrow{AC}$ इस कोण को बनाने वाली **भुजाएँ** हैं। इस प्रकार एक प्रारम्भिक/आद्य बिन्दु से खींची गई दो किरणों से बनने वाली आकृति **कोण** है।

कुछ करें

(1) बताइए किस चित्र में कोण दिख रहा है?



1

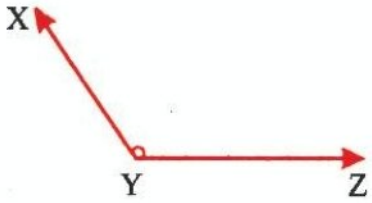


2



3

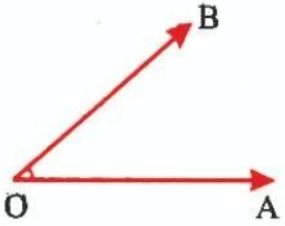
(2) चित्र देखकर नाम बताइए–



शीर्ष ————————

कोण बनाने वाली भुजाएँ ————————

कोण का नाम पढ़ते समय शीर्ष का स्थान ठीक बीच में रखते हैं। यहाँ दिए गए कोण का नाम कोण AOB या कोण BOA है। दोनों नामों में शीर्ष 'O' बीच में है। इसमें OA की दिशा से OB की दिशा जाने में कितना घुमाव हुआ है यह कोण AOB बताता है।

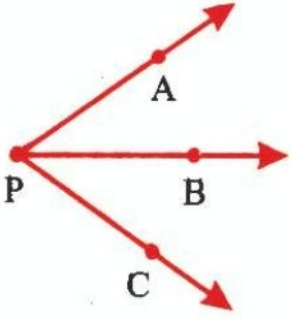


कोण को संकेत में ∠ लिखते हैं जब केवल एक ही कोण हो तब ∠AOB या ∠BOA के लिए ∠O भी उपयोग में लाया जा सकता है। अतः केवल शीर्ष द्वारा भी दर्शाया जा सकता है।

संलग्न आकृति को देखिए। इस कोण का क्या नाम है? क्या हम इसे ∠P कहेंगे?

∠P से हमारा क्या तात्पर्य होगा? इसे ∠P कहने से क्या भ्रम हो सकता है?

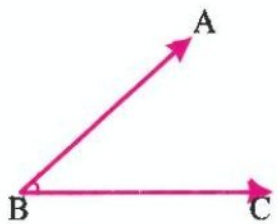
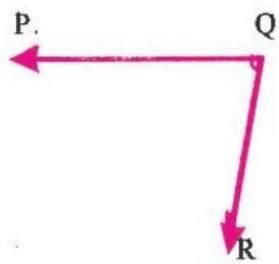
क्या यहाँ पर एक कोण को केवल उसके शीर्ष द्वारा नामांकित करना सहायक होगा? क्यों?



∠P का अर्थ यहाँ ∠APB या ∠CPB या ∠APC हो सकता है। इसलिए यहाँ और अधिक सूचना की आवश्यकता है। ध्यान दीजिए कि कोण को लिखते समय उसके शीर्ष के अक्षर को सदैव बीच में लिखा जाता है।

प्रश्नावली – 5.2

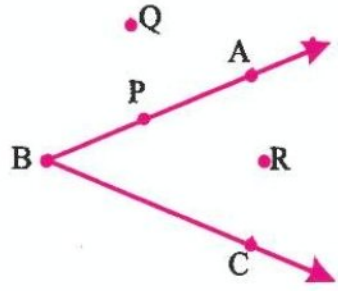
1. नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए–

कोण	शीर्ष	कोण बनाने वाली भुजाएँ	कोण का नाम
			
			
			

2 नीचे की आकृतियों में बनने वाले कोणों की संख्या बताइए–

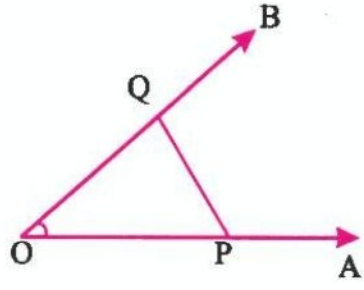


3. चित्र देखकर बताइए कि बिन्दु P, Q तथा R कोण के किस भाग में स्थित हैं?



5.5 त्रिभुज

क्रियाकलाप–2 : एक कोण AOB की रचना कीजिए। अब इस कोण को बनाने वाली भुजा OA पर एक बिन्दु P तथा दूसरी भुजा OB पर एक बिन्दु Q लीजिए। बिन्दु P और Q को स्केल से मिलाइए। बताइए कि बनने वाली आकृति बंद आकृति है या खुली? इस आकृति में कुल कितनी भुजाएँ हैं?



स्पष्टतः आपका उत्तर होगा बनने वाली आकृति OPQ एक बंद आकृति है तथा इसमें कुल तीन भुजाएँ OP, PQ तथा QO हैं। आइए कुछ आकृतियों पर विचार करें।



a b c d e f

ये सभी आकृतियाँ तीन भुजाओं से बनी हैं तथा आकृति a एवं e बंद आकृतियाँ हैं। ये तीन रेखाखण्डों से बनी बंद आकृतियाँ हैं। अतः इन्हें **त्रिभुज** कहते हैं।

क्रियाकलाप–3 : आगे प्रत्येक चित्र में तीन-तीन बिन्दु दिए गए हैं। क्या इन तीन बिन्दुओं को रेखाखंड द्वारा मिलाकर आप त्रिभुज बना सकते हैं?



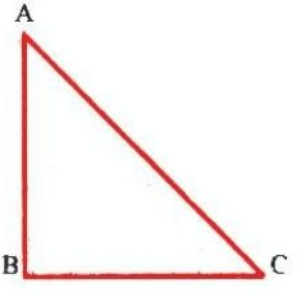
चित्र–1 चित्र–2 चित्र–3

आप चित्र–1 और चित्र–2 के बिन्दुओं को आपस में मिलाकर त्रिभुज तो बना लेते हैं परन्तु चित्र–3 में तीनों बिन्दु एक सरल रेखा में है जिन्हें जोड़ा जाए तो एक सरल रेखा हमें प्राप्त होती है। अतः तीन असंरेखीय बिन्दुओं को एक दूसरे से मिलाने पर जो बंद आकृति बनती है वही त्रिभुज है।

5.5.1 त्रिभुज के भाग

त्रिभुज ABC में कुल कितने कोण शीर्ष और भुजाएँ हैं? नाम बताइए।

यहाँ कुल 3 कोण हैं $\angle ABC$, $\angle BCA$ तथा $\angle CAB$ और शीर्ष भी तीन B,C तथा A हैं। और AB, BC, CA त्रिभुज ABC की तीन भुजाएँ होंगी। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि एक त्रिभुज में –



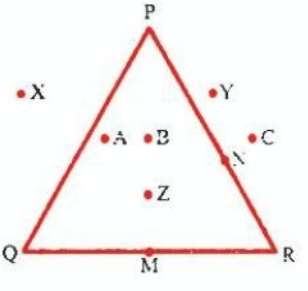
3 शीर्ष होते हैं।

3 भुजाएँ होती हैं।

3 कोण होते हैं।

5.5.2 त्रिभुज का अन्तःभाग तथा बहिर्भाग

किसी तल पर बने त्रिभुज में बिन्दु तीन भागों में रखे जा सकते हैं। पहला भाग जो त्रिभुज के भीतर है, त्रिभुज का **अन्तःभाग**। दूसरा भाग जो त्रिभुज पर है **परिसीमा भाग** और तीसरा जो त्रिभुज के बाहर स्थित है, त्रिभुज का **बहिर्भाग** कहा जाता है। यहाँ A, B तथा Z त्रिभुज के अन्तःभाग में हैं, M, N बिन्दु त्रिभुज पर हैं तथा बिन्दु X, Y तथा C त्रिभुज के बहिर्भाग में स्थित हैं।



कुछ करें

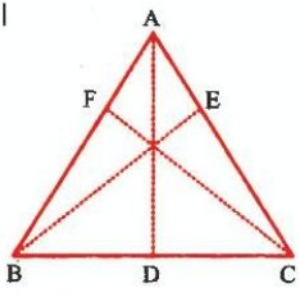
(1) त्रिभुज ABC बनाकर उसके अन्तःभाग को छायांकित करें।

(2) बिन्दु P और Q को इस प्रकार दर्शाएँ कि वे उसके बहिर्भाग में रहें।

(3) बिन्दु M को त्रिभुज पर दर्शाइए।

5.5.3 त्रिभुज के शीर्ष लंब एवं माध्यिका

ABC एक त्रिभुज है जिसमें शीर्ष A से सामने की भुजा BC पर डाला गया लम्ब AD है। AD को शीर्षलम्ब भी कहते हैं। इसी प्रकार शीर्ष B से AC पर तथा शीर्ष C से AB पर शीर्ष लम्ब डाला गया है। यह तीनों त्रिभुज के शीर्ष लंब है। इनकी लम्बाई हर त्रिभुज में समान नहीं होती।

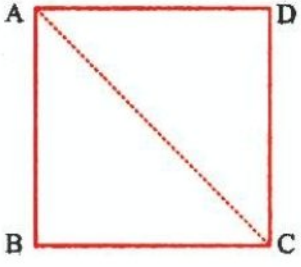


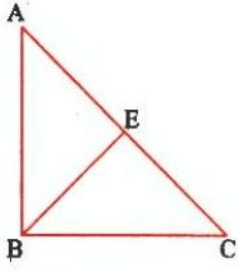
त्रिभुज में 3 शीर्ष लंब होते हैं जो एक ही बिन्दु पर गुजरते हैं, यह बिन्दु त्रिभुज का लम्ब केन्द्र कहलाता है।

क्रियाकलाप–4

कागज का वर्गाकार टुकड़ा लीजिए तथा उसके एक कोण को उसके सामने के कोण पर रखकर मोड़िए। इस मुड़ी हुए जगह से कागज को फाड़िए। अब आपको दो त्रिभुज प्राप्त होते हैं। कागज के बने त्रिभुज के शीर्षों को A, B, C और A, C, D नाम दीजिए। अब त्रिभुज के तीन शीर्षों में से एक शीर्ष C को उठाकर दूसरे शीर्ष A के ऊपर रखकर कागज को मोड़िए। इस प्रकार त्रिभुज की एक भुजा दो समान भागों में बँट जाएगी।







जो बिन्दु भुजा को दो भागों में बाँटता है उसे त्रिभुज के तीसरे शीर्ष B से जोड़ दें। इस प्रकार प्राप्त रेखा BE त्रिभुज ABC की माध्यिका कहलाती है। यह हम त्रिभुज की तीनों भुजाओं के साथ कर सकते हैं।

त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से गुजरती हैं तथा यह बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है।

अब आप अलग-अलग आकार के त्रिभुज बनाइए तथा तीनों भुजाओं की माध्यिका बनाकर केन्द्रक चिह्नित कीजिए।

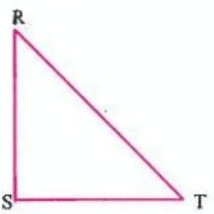
प्रश्नावली – 5.3

(1) दिए गए चित्र में कौन त्रिभुज है और क्यों?

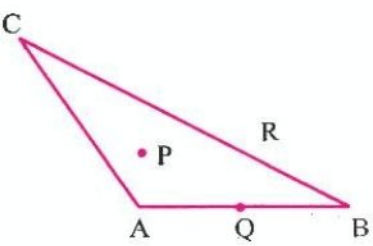


(2) त्रिभुज में कितने शीर्ष, कितनी भुजाएँ एवं कितने कोण होते हैं?

(3) त्रिभुज RST में शीर्ष, कोण और भुजा के नाम लिखिए।



(4) आकृति में त्रिभुज CAB के अन्तःभाग, बहिर्भाग और त्रिभुज पर स्थित बिन्दु बताइए।



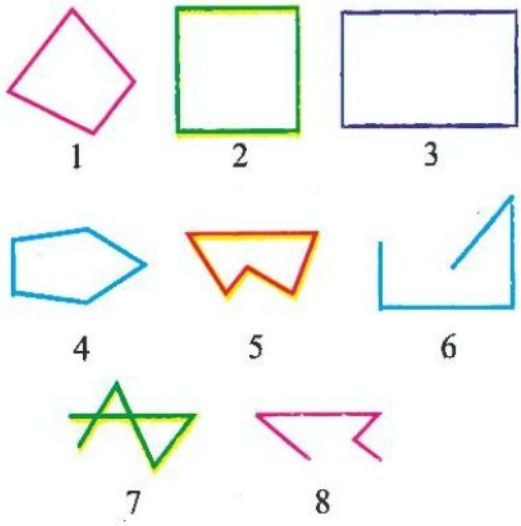
(5) (i) त्रिभुज के शीर्ष से भुजा पर डाला गया लंब त्रिभुज की ———— कहलाती है।

(ii) त्रिभुज के शीर्ष से भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की ———— कहलाती है।

(iii) त्रिभुज में माध्यिकाएँ जिस बिन्दु पर काटती हैं उसे ———— कहते हैं।

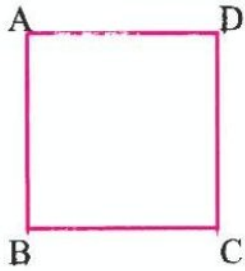
5.6 चतुर्भुज

अपने आस-पास हम बहुत सारी चौकोर आकृतियाँ जैसे पुस्तक-कॉपी का एक पेज, खेल मैदान, पतंग आदि देखते हैं। नीचे बनी आकृतियों में से ऐसी ही चौकोर आकृतियों को छाँटिए–



आपके द्वारा छाँटी गई आकृतियाँ 1, 2 और 3 चतुर्भुज हैं क्योंकि ये चार भुजाओं से बनी बंद आकृति हैं। चतुर्भुज चार भुजाओं से घिरी एक बंद आकृति है।

चतुर्भुज ABCD को देखिए। इसमें चार कोण हैं– ∠ABC, ∠BCD, ∠DAB तथा ∠CDA। इसमें B, C, D तथा A चार शीर्ष हैं तथा चार भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA हैं।



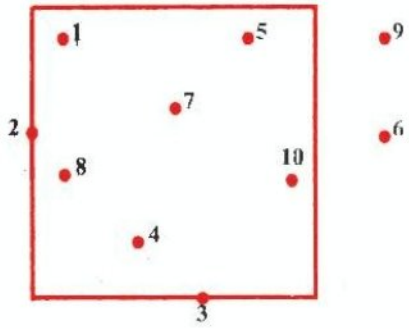
क्रियाकलाप–5

एक चतुर्भुजाकार खेल के मैदान में कुछ खिलाड़ी खेल रहे हैं। यहाँ खिलाड़ियों को बिन्दुओं से दिखाया गया है। आपको बताना है–

(क) कौन-कौन से खिलाड़ी मैदान के अंदर हैं?

(ख) कौन-कौन से खिलाड़ी मैदान के बाहर हैं?

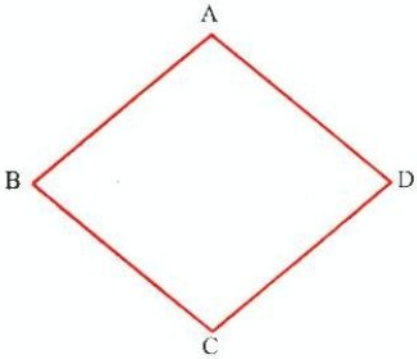
(ग) कौन-कौन से खिलाड़ी मैदान की सीमा रेखा पर हैं?



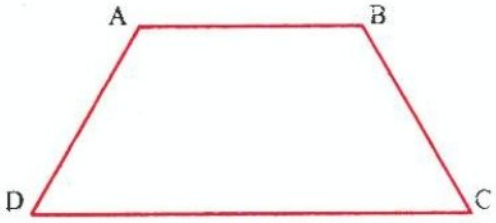
यहाँ खिलाड़ी संख्या 1, 4, 5, 7, 8, 10 अन्तःभाग में तथा खिलाड़ी संख्या 6, 9 बहिर्भाग में और खिलाड़ी संख्या 2, 3 मैदान की सीमा पर हैं।

5.6.1 चतुर्भुज की भुजाएँ

चतुर्भुज की भुजा AB तथा BC दिए गए चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाएँ हैं। यह दोनों भुजाएँ बिन्दु B पर मिलती हैं। ये चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ हैं। आसन्न भुजाएँ एक शीर्ष पर एक दूसरे को काटती हैं। चतुर्भुज ABCD की शेष आसन्न भुजाओं के नाम BC एवं CD, CD एवं DA तथा DA एवं AB हैं।

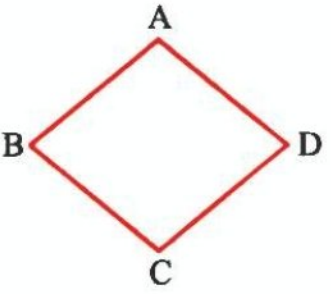


जब चतुर्भुज की भुजाएँ एक दूसरे को किसी बिन्दु पर नहीं काटें या एक दूसरे से नहीं मिलें तब वे सम्मुख भुजाएँ कहलाती हैं। यहाँ AB और CD सम्मुख भुजाएँ हैं। सोचें एक चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के कितने जोड़े होंगे?

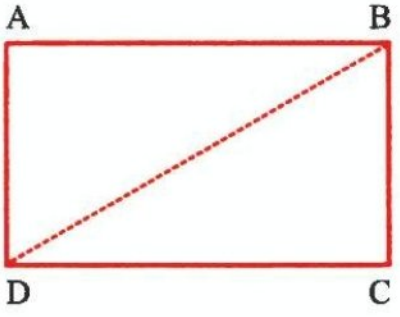


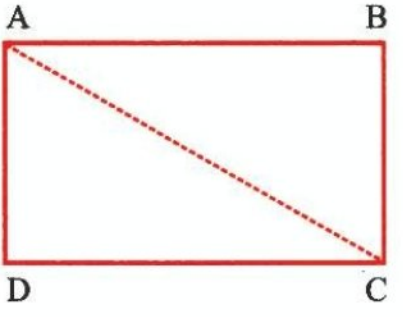
कुछ करें

दिए गए चतुर्भज में आसन्न भुजाओं और सम्मुख भुजाओं के युग्म बताइए–



5.8.2 चतुर्भुज के विकर्ण





एक चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँटने के लिए B बिन्दु को D बिन्दु से या A बिन्दु को C बिन्दु मिलाते हैं। अर्थात् दो सम्मुख शीर्षों को एक रेखाखंड से मिलाने पर चतुर्भुज दो त्रिभुज में बँट जाता है। ये रेखाखंड चतुर्भुज के **विकर्ण** कहलाते हैं। अतः चतुर्भुज ABCD में दो विकर्ण AC तथा BD हैं।

प्रश्नावली – 5.4

(1) एक चतुर्भुज बनाइए और उसमें भुजा, कोण एवं शीर्षों के नाम बताइए।

(2) दिए गए चतुर्भुज में बिन्दु M बहिर्भाग में, बिन्दु N अन्तःभाग में तथा बिन्दु P को चतुर्भुज पर दशाईए।



(3) दिए गए चतुर्भुज में आसन्न भुजाओं एवं सम्मुख भुजाओं के युग्म बताइए।

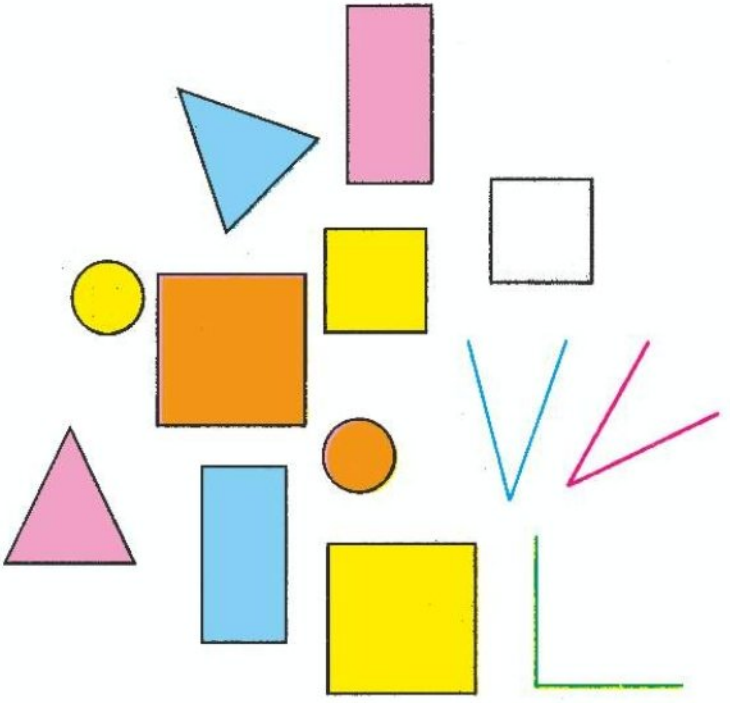


(4) स्वयं से एक चतुर्भुज बनाइए और उसके विकर्ण खींचिए।

अध्याय-6 सरल आकृतियों की समझ

कुछ करें

नीचे के चित्रों में समान आकार की आकृतियों को पेंसिल से मिलाइए–



आपने एक समान आकृतियों को कैसे पहचाना?

इन आकृतियों का मिलान करने हेतु उनके आकार एवं साइज (लम्बाई, चौड़ाई ....) को ध्यान में रखा।

आप अपने आस-पास बहुत सारी वस्तुओं को देखते हैं। ये सभी विभिन्न साइज (मापों) की होती हैं। इनके साइज की तुलना कैसे करें?

6.1 रेखाखंड की माप

रेखाखंड के प्रयोग से आपने कई आकृतियाँ बनाई हैं। त्रिभुज में तीन तथा चतुर्भुज में चार रेखाखंडों का प्रयोग किया है। कई बार आकृतियों को खींचते समय हम विभिन्न माप के रेखाखंडों का प्रयोग करते हैं। हर रेखाखंड की एक निश्चित माप होती है, रेखाखंड की माप अद्वितीय होती है जिसे हम **रेखाखंड की लम्बाई** कहते हैं। दो रेखाखंडों की तुलना आप उनकी लम्बाई के आधार पर कर सकते हैं।

बताइए कौन-सी रेखाखंड बड़ी है? इसका पता आपने कैसे किया?



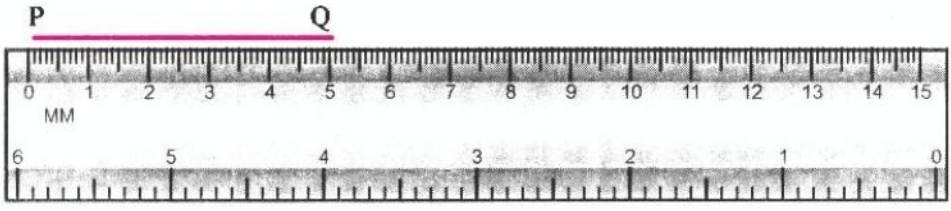
यह तो देखने से ही पता चल जाता है कि रेखाखंड $\overline{AB}$ रेखाखंड $\overline{CD}$ से बड़ी है। दोनों की लम्बाई में काफी अन्तर है। ऐसी परिस्थिति जिसमें रेखाखण्डों की लम्बाई में काफी फर्क है से ही उनमें अंतर जान सकते हैं।



दूसरे उदाहरण में रेखाखंड $\overline{PQ}$ तथा $\overline{RS}$ की लम्बाइयों का अंतर इतना स्पष्ट नहीं है, अतः अनुमान लगाकर या अवलोकन से उनकी तुलना करना मुश्किल है। बताइए $\overline{PQ}$ और $\overline{RS}$ की तुलना आप कैसे करेंगे? आइए $\overline{PQ}$ और $\overline{RS}$ की लम्बाई मापें।

हमारे ज्यामिति बक्सा में स्केल होता है। इसकी सहायता से रेखा की लम्बाई माप सकते हैं। स्केल से रेखाखंड की लम्बाई मापने के लिए रेखाखंड PQ के P बिन्दु पर स्केल का शून्य रखकर रेखाखंड के Q बिन्दु पर स्केल जिस चिह्न पर हो उसे पढ़िए, यही रेखाखंड PQ

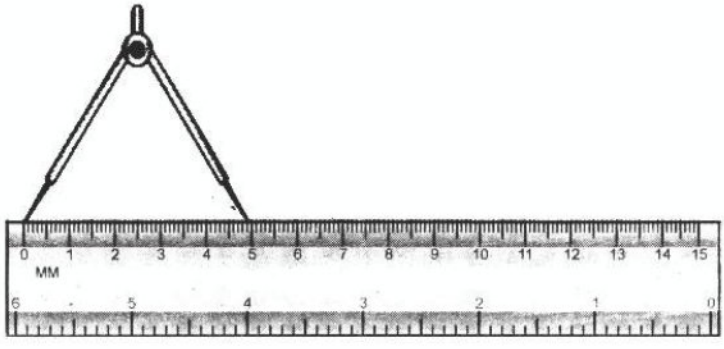
की माप होगी। उसी प्रकार हम रेखाखंड RS को मापकर दोनों रेखाखण्डों के बीच तुलना कर सकते हैं।



स्केल और डिवाइडर द्वारा रेखाखण्ड की तुलना करना



डिवाइडर



सबसे पहले हम डिवाइडर का फैलाव करते हैं तथा उसके एक नुकीले भाग को P पर रखते हैं तथा दूसरे नुकीले भाग को Q पर रखते हैं। पुनः डिवाइडर के फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए उसके एक नुकीले भाग को स्केल के शून्य पर रखते हैं तथा दूसरा नुकीला भाग स्केल के जिस चिह्न पर पड़ता है उसको पढ़ लेते हैं। यही रेखाखंड PQ की लम्बाई होती है। इसी प्रकार रेखाखंड RS की लम्बाई ज्ञात करके दोनों रेखाखंडों की तुलना करते हैं।

स्केल पर अंकित चिह्न बराबर-बराबर भागों में बँटे होते हैं। प्रत्येक बड़े भाग की लम्बाई 1 सेमी है। प्रत्येक 1 सेंटीमीटर को 10 छोटे-छोटे बराबर भागों में विभाजित किया गया है।

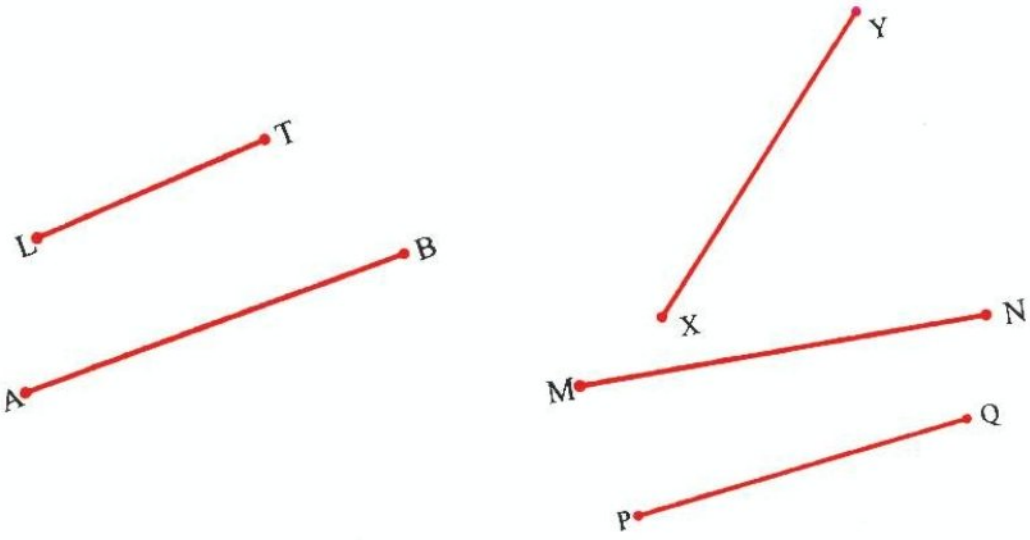
1 छोटा भाग = 1 मिलीमीटर

इसी तरह स्केल के दूसरी ओर भी बराबर-बराबर भाग बँटे हैं जो 1 इंच की दूरी को दर्शाते हैं। आमतौर पर रेखा को सेमी में ही मापा जाता है।

कुछ करें

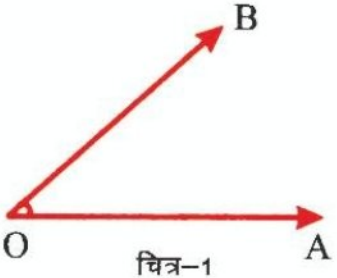
1. स्केल की सहायता से अपने कलम की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

2. निम्न रेखाखंडों के नाम उनकी लम्बाई के बढ़ते क्रम में सजाएँ।



बढ़ता क्रम ——————————————————————————

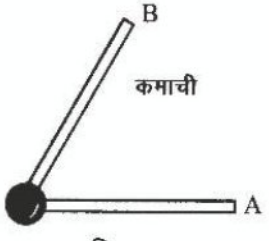
6.2 कोणों की माप



चित्र–1

आप यह जान चुके हैं कि जब दो किरणों का आरम्भिक बिन्दु एक होता है तो उन किरणों के बीच का फैलाव कोण है। यहाँ AOB एक कोण है। इसी तरह आप अपने चारों ओर अनेक वस्तुओं को घूमते हुए अथवा एक वस्तु दूसरी वस्तु पर झुकी हुई देखते हैं। दरवाजा खोलने पर वह अपने कब्जों पर घूमता है। घड़ी की सुइयाँ घूमती रहती हैं। इस प्रकार दैनिक जीवन में हम झुकाव और घुमाव के रूप में कोण को देखते हैं।

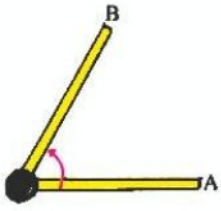
क्रियाकलाप–1



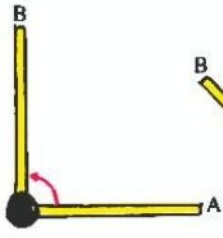
चित्र–2

बाँस की दो कमाचियाँ लीजिए। दोनों कमाचियों के एक-एक सिरे को मिलाकर उस पर एक पिन दिए गए चित्र के अनुसार गाड़ दीजिए। अब कमाची A को स्थिर रखते हुए कमाची B को घुमाइए।

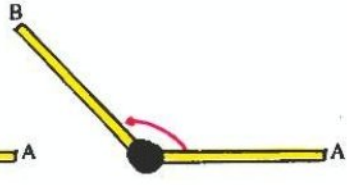
जैसे-जैसे कमाची B ज्यादा घूमती है, दोनों कमाचियों के बीच के कोण का मान बढ़ता जाता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कोण बनाने वाली दोनों भुजाओं के बीच जैसे-जैसे फैलाव बढ़ेगा उनके बीच के कोण का मान भी बढ़ेगा।



चित्र–3



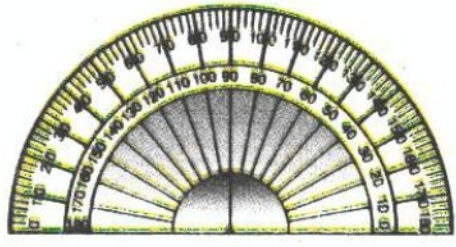
चित्र–4



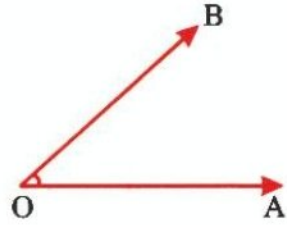
चित्र–5

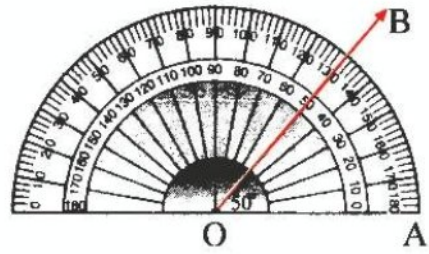
क्या आप ऊपर के चित्रों में सबसे बड़े कोण को बता सकते हैं? यहाँ चित्र 5 में बना कोण सबसे बड़ा है क्योंकि इसकी कोण बनाने वाली भुजाओं में सबसे ज्यादा फैलाव देखा जा सकता है। लेकिन चित्र-2 एवं चित्र-3 में कौन-सा कोण बड़ा है? इसके लिए आपको इन दोनों कोणों की माप करनी होगी। सोचें कोणों की माप कैसे की जा सकती है? जिस तरह रेखाखंड की माप स्केल से की गई, क्या उसी तरह से कोणों की माप की जा सकती है?

कोणों की माप चाँद या प्रोटेक्टर की सहायता से की जा सकती है। आइए जानें चाँद या प्रोटेक्टर क्या है?



प्रोटेक्टर या चाँद एक पारदर्शी उपकरण है जो अर्द्धवृत्ताकार होता है तथा उसके अर्द्ध गोलाकार भाग में ऊपर बाएँ से दाएँ 0° से 180° तक के तथा नीचे दाएँ से बाएँ 0° से 180° तक के चिह्न लगे होते हैं। जिस प्रकार स्केल में समान दूरी पर भाग किए होते हैं, इसी प्रकार चाँद में अर्द्ध वृत्त के घुमाव पर समान झुकाव में भाग बँटे होते हैं। इस घुमाव की इकाई डिग्री में मापी जाती है। आइए इसकी मदद से ∠AOB की माप ज्ञात करें।

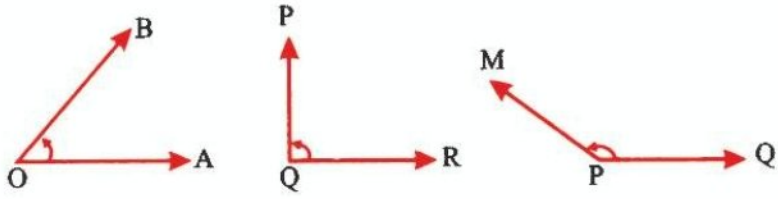




∠AOB की माप प्रोटेक्टर या चाँद की सहायता से करने के लिए ∠AOB के शीर्ष 'O' पर चाँद के केन्द्र को इस प्रकार रखेंगे कि चाँद की 0° – 180° रेखा कोण की भुजा OA पर पड़े। अब OB रेखा चाँद के जिस बिन्दु पर पड़े वहाँ के माप को पढ़ेंगे। यहाँ रेखा OB चाँद पर बिन्दु 50° एवं 130° से गुजर रही है। चूँकि कोण का घुमाव दाएँ से बाएँ है, अतः दाएँ से बाएँ शून्य से 50° तक पढ़ेंगे। इस प्रकार कोण ∠AOB की माप 50° हुआ।

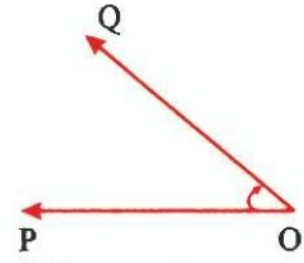
कुछ करें

चाँद या प्रोटेक्टर की सहायता से दिए गए कोण की माप ज्ञात कीजिए तथा कोण का सांकेतिक नाम भी लिखिए।



क्रियाकलाप–2

इस कोण को चाँद से मापें।



यहाँ आधार रेखा PO है जिसका शीर्ष O दाएँ हैं। अतः चाँद पर जब O को पर रखते हैं तब OP के सम्मुख 0° को पढ़ते हैं। अतः बाहर वाले डिग्री मापों को पढ़ते हैं या OQ भुजा 40^0 पर पड़ रही है। अतः $\angle POQ = 40^0$

कुछ करें

रेखाखंड का नाम अक्षर से निरूपित कीजिए। कोण को मापकर कोण के मान ज्ञात कीजिए।



ऊपर आपने कोणों की माप करते समय यह देखा कि कोण विभिन्न माप के होते हैं।

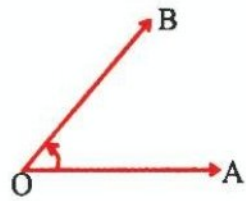
क्या कोणों को उनकी माप के आधार पर नाम भी दिया जा सकता है? आइए कुछ कोणों के प्रकार पर विचार करें।

कोणों के प्रकार

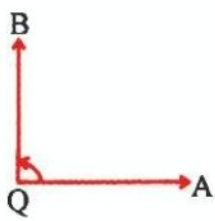
नीचे दिए गए कोणों को देखें। इनकी माप लगभग कितनी हो सकती है, सोचें और लिखें।



कोण की माप



कोण की माप



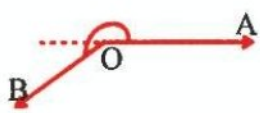
कोण की माप



कोण की माप



कोण की माप

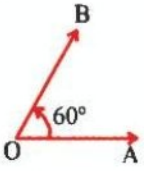
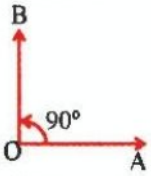
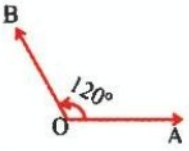
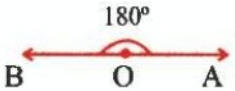
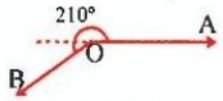


कोण की माप



कोण की माप

यह सभी अलग-अलग प्रकार के कोण हैं। इन्हें अब इनके गुणों के आधार पर सारणीबद्ध करते हैं।

कोण का नाम	कोण का चित्र	कोण का विवरण
शून्यकोण		जिस कोण की माप शून्य हो। कोण बनाने वाली दोनों किरणें एक-दूसरे पर चढ़ी हैं। घूर्णन शून्य है।
न्यूनकोण		जिस कोण की माप 0° से लेकर 90° के बीच हो पर 90° से कम हो। जैसे– 10°, 25°, 45°, 60°, 75° आदि।
समकोण		जिस कोण की माप 90° हो, तथा कोण बनाने वाली किरणें एक दूसरे पर लम्बवत् हों।
अधिककोण		जिस कोण की माप 90° से ज्यादा पर 180° से कम हो। जैसे– 95°, 120°, 135°, 150°, 175° आदि।
सरलकोण या ऋजुकोण		जिस कोण की माप 180° हो। इसमें कोण बनाने वाली दोनों किरणें एक सरल रेखा बनाती हैं। यहाँ B शून्य के दूसरी ओर है।
प्रतिवर्ती या पुनर्युक्तकोण		जिस कोण की माप 180° से ज्यादा तथा 360° से कम हो।
पूर्णकोण		जिस कोण की माप 360° हो। इसमें कोण बनाने वाली किरण OB एक पूर्ण चक्कर लगाने के बाद किरण OA के ऊपर चढ़ जाती है। इसमें और शून्य कोण की स्थिति में कोई अंतर नहीं है।

प्रश्नावली – 6

1. इन्हें परिभाषित करें और प्रत्येक के लिए अधिक से अधिक उदाहरण सोचें।

न्यूनकोण : .....

.....

समकोण : .....

.....

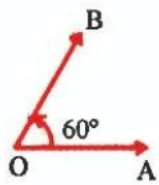
अधिककोण : .....

पुनर्युक्तकोण : .....

.....

2. मिलान करें–

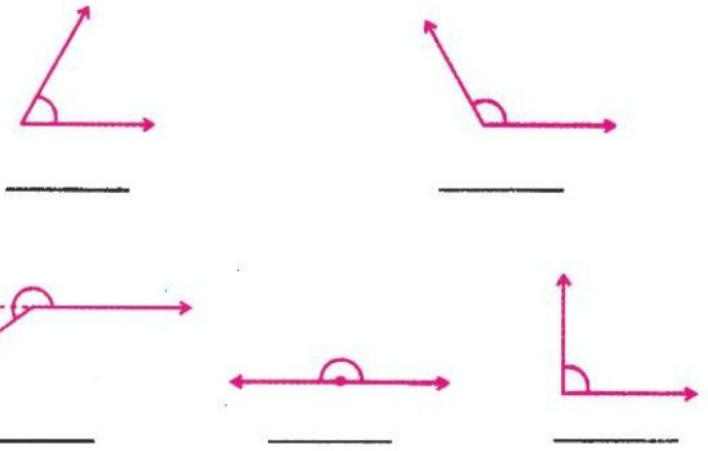
सारणी I

कोण का चित्र	कोण का नाम
I 	I. अधिककोण
II. 	II. पुनर्युक्तकोण
III. 	III. न्यूनकोण

सारणी II

कोण का नाम	माप
न्यूनकोण	180°
अधिककोण	90°
शून्यकोण	360°
समकोण	255°
ऋजुकोण	45°
पूर्णकोण	155°
पुनर्युक्तकोण	0°

3. नीचे दिए गए कोणों को मापें और उनके नाम लिखें–



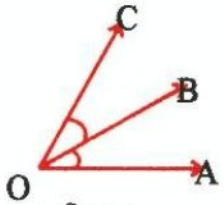
4. स्केल और चाँद (प्रोटेक्टर) की सहायता से 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 120^0, 135^0 का कोण बनाइए तथा रेखाखंड को अक्षर से निरूपित करके कोण का नाम भी दीजिए।

5. घड़ी में मिनट की सुई 15 मिनट में कितनी घूर्णन करती है? इसका अंश माप कितना है? यह सुई 10 मिनट में कितने अंश का कोण और घूम जाएगी? दी गई घड़ी में कोण बनाकर ज्ञात कीजिए।

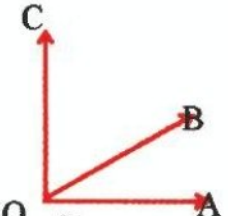


6.3 कोणों के विशेष युग्म

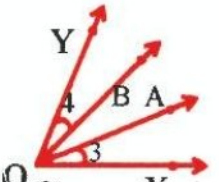
बहुत से कोण युग्म विशेष गुण वाले होते हैं। इन युग्मों के कई ऐसे गुण होते हैं जिनसे हमें ज्यामिति के अध्ययन में मदद मिलती है। ऐसे कुछ युग्मों का हम यहाँ अध्ययन करेंगे।



चित्र–1



चित्र–2



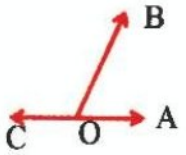
चित्र–3

पीछे के चित्रों में एक शीर्ष पर दो या दो से अधिक कोण बने हैं। चित्र–1 में कोण ∠AOB और ∠BOC बनाने वाली भुजाओं में एक भुजा OB उभयनिष्ठ है तथा शेष दोनों भुजाएँ OB के दोनों तरफ हैं। इस प्रकार बने दो कोण जिनमें एक भुजा उभयनिष्ठ हो और जो एक ही शीर्ष पर बने हों **संलग्न कोण** अथवा **आसन्न कोण** कहलाते हैं।

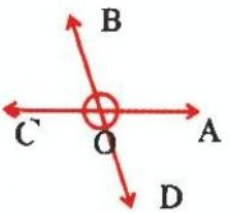
इसी प्रकार चित्र–2 में कोण ∠AOB और ∠BOC को देखकर बताएँ। क्या ये आसन्न कोण हैं?

क्या चित्र--3 में बने कोण ∠XOA और ∠BOY आसन्न कोण कहे जा सकते हैं?

नहीं क्योंकि इनके शीर्ष तो एक हैं पर उनमें कोई भुजा उभयनिष्ठ नहीं है।



चित्र–4



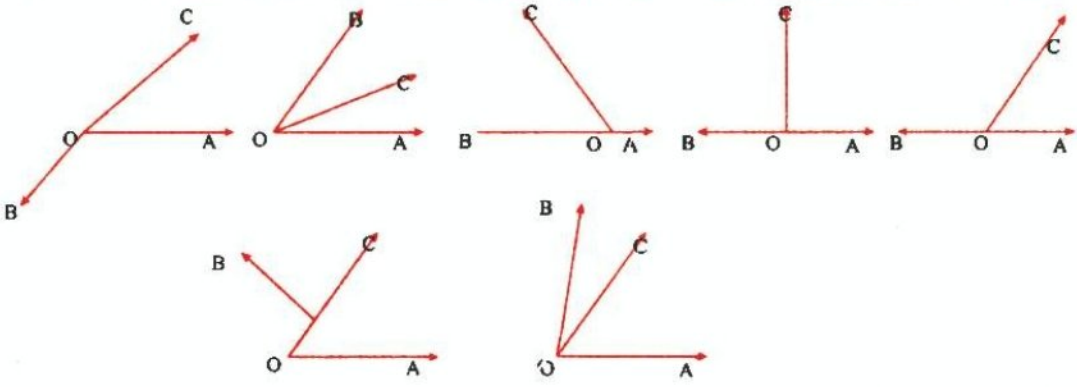
चित्र–5

चित्र-4 में दो संलग्न कोणों का योग 180° है। ऐसे कोणों का जोड़ा **रेखीय युग्म** कहलाता है। यहाँ कोण बनाने वाली भुजाएँ OA तथा OC एक दूसरे के विपरीत हैं तथा OB उभयनिष्ठ है।

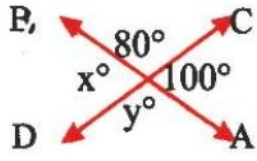
चित्र-5 में चार कोण बने हैं, जो दो रेखीय युग्म बना रहे हैं। इन कोणों को **शीर्षाभिमुख कोण** कहते हैं। अगर आप इसके चारों को मापकर देखेंगे तो इन कोणों के आमने-सामने का जोड़ा बराबर मिलेगा। चित्र में ∠AOB = ∠COD तथा ∠BOC = ∠AOD ।

कुछ करें

1. नीचे दिए गए चित्रों में सभी आसन्न कोण युग्मों और रेखीय कोण युग्मों को पहचानिए–



2. नीचे दिए गए चित्र में क्या दोनों कोण रेखीय युग्म का निर्माण कर रहे हैं। यदि हाँ तो कैसे?

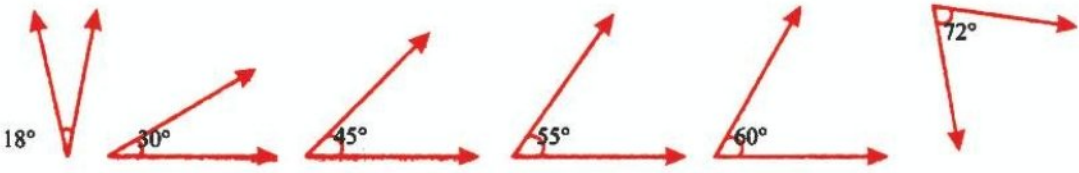


x = ____ y = ____

कारण ----------

6.4 पूरक कोण

दो कोण जिनकी अंश मापों का योग 90^0 हो, **पूरक** या **कोटिपूरक** कोण कहलाते हैं, जैसे– 30^0 और 60^0 के कोण अथवा 18^0 और 72^0 के कोण।

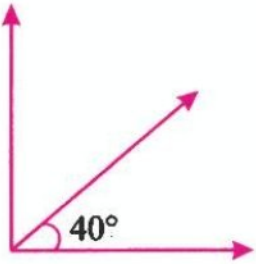


दिए गए चित्रों में कौन-से कोण पूरक कोण के युग्म बनाते हैं?

पूरक कोणों के एक युग्म में एक कोण दूसरे का पूरक कहलाता है। जैसे– 40^0 के कोण का पूरक है = (90-40) = 50^0 का कोण।

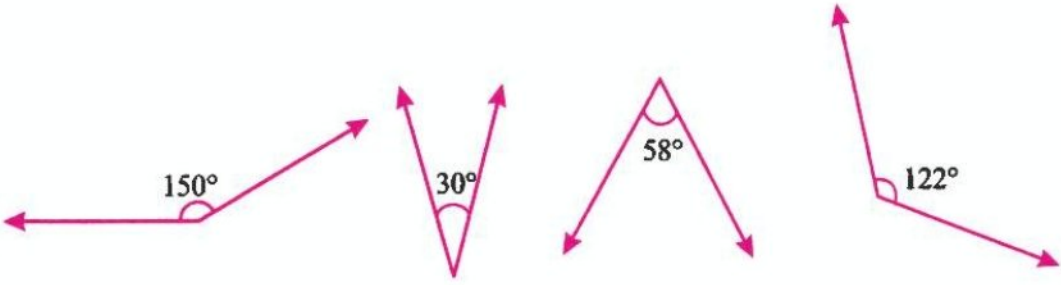
दो पूरक कोणों का आसन्न कोण होना आवश्यक नहीं। लेकिन दो कोण यदि आसन्न कोण भी हैं और पूरक कोण भी, तब वे मिलकर एक समकोण बनाते हैं।

बगल में दिए गए चित्र में पूरक कोण युग्म दिया गया है यदि इसमें एक कोण $\angle 40^0$ हो तो दूसरा कोण क्या होगा?



6.5 संपूरक कोण

दो कोण जिनके अंश मापों का योग 180^0 हो, **संपूरक कोण** या **ऋजुपूरक कोण** कहलाते हैं। जैसे– 30^0 और 150^0 के कोण अथवा 58^0 और 122^0 के कोण।



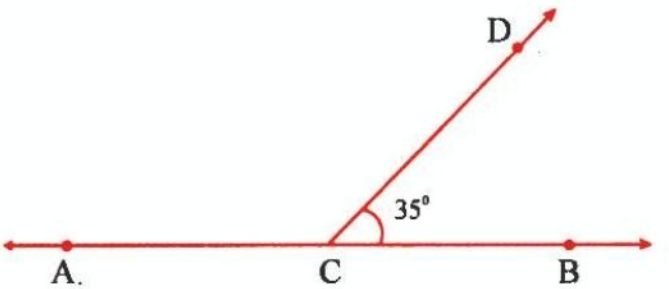
आकृति

संपूरक कोण के युग्म में एक कोण दूसरे का संपूरक कहलाता है; जैसे 40^0 के कोण का संपूरक कोण है 180-40 = 140^0 का कोण।

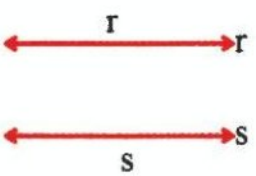
तथा 112^0 के कोण का संपूरक कोण है = 180-112 = 68^0 का कोण।

दो संपूरक कोणों का आसन्न कोण होना आवश्यक नहीं। लेकिन दो कोण यदि संपूरक भी हैं तथा आसन्न भी तब वे मिलकर एक सरल कोण बनाएँगे और वे रेखीय युग्म भी होंगे।

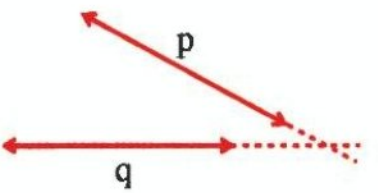
नीचे दिए गए रेखीय युग्म में ∠ACD की माप बताइए।



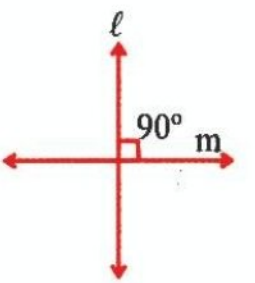
6.6 रेखाओं का प्रतिच्छेदन



चित्र–1



चित्र–2



चित्र–3

चित्र-1 को देखें। यहाँ रेखा r और s को यदि आप आगे बढ़ाते जाएँ तो क्या ये कभी आपस में मिलेंगी?

अब जरा इनके बीच की लम्बवत् दूरी को अलग-अलग बिन्दुओं पर मापिए।

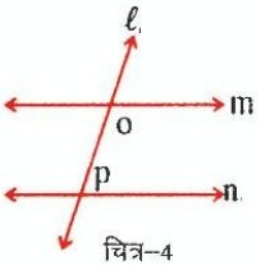
क्या यह सदैव एक समान आती है?

अतः ऐसी रेखाएँ जिनके बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान रहे या ऐसी रेखाएँ जो दोनों सिरों से बढ़ाने पर कभी न मिलें **समांतर रेखाएँ** कहलाती हैं।

चित्र-2 में आप देख रहे हैं कि जब रेखा p और q को आगे बढ़ाया गया तो वे एक दूसरे को काटती हैं? वे रेखाएँ जो किसी बिन्दु पर एक-दूसरे को काटें **प्रतिच्छेदी रेखाएँ** कहलाती हैं। रेखाओं का प्रतिच्छेदन अलग-अलग झुकाव पर हो सकता है।

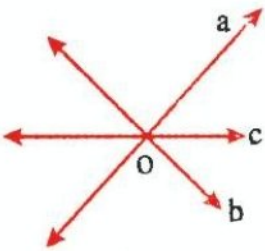
चित्र-3 यहाँ रेखा ℓ और m प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। यहाँ रेखा ℓ का m पर झुकाव 90^0 का है। अतः इसको **लम्बवत् रेखा** कहते हैं।

बगल के चित्र-4 को ध्यान से देखिए। रेखा ℓ, रेखा m तथा n को दो अलग-अलग बिन्दु o तथा p पर काटती है, यहाँ रेखा ℓ, रेखा m तथा n की **तिर्यक् छेदी रेखा** कहलाती है।



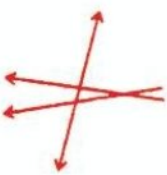
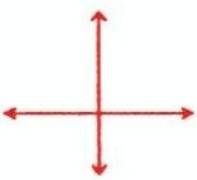
चित्र–4

चित्र–5 में रेखा a, रेखा b और c को O बिन्दु पर काटती है, पर यह रेखा b और c की तिर्यक् छेदी रेखा नहीं है। क्योंकि तिर्यक् छेदी रेखा होने के लिए रेखाओं का अलग-अलग बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदन (काटना) जरूरी है। अतः रेखा a रेखा b और c की तिर्यक् छेदी रेखा नहीं है।



चित्र–5

1. मिलान करें

तिर्यक् छेदी रेखा	
लम्बवत् रेखाएँ	
समांतर रेखाएँ	
प्रतिच्छेदी रेखाएँ	

आपने रेल की पटरी, अपने कमरे की दीवारों, किताब के पृष्ठ के किनारों में लम्बवत् और समान्तर रेखाओं के उदाहरण देखे होंगे।

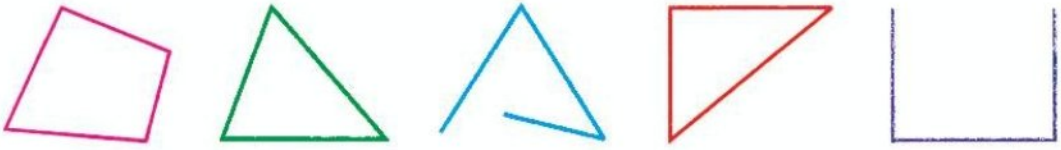
2. ऐसे ही अन्य उदाहरण बताइए–

समांतर रेखाओं के उदाहरण : ....

लम्बवत् रेखाओं के उदाहरण : ....

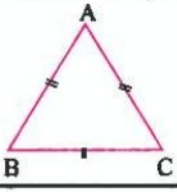
6.7 त्रिभुज

नीचे कुछ आकृतियाँ बनी हैं। इनमें से कौन-कौन सी आकृतियाँ त्रिभुज हैं? उन्हें (✓) करें।

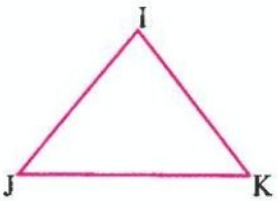


त्रिभुज तीन भुजाओं से घिरी एक बंद आकृति है। इसमें तीन भुजाएँ एवं तीन कोण होते हैं। आपने विभिन्न आकार के त्रिभुजों को देखा होगा।

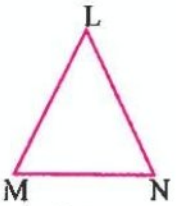
नीचे बने त्रिभुजों को देखें। भुजाओं के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं।

समबाहु त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ बराबर लम्बाई की हों।	
समद्विबाहु त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर लम्बाई की हों।	
विषमबाहु त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ अलग-अलग लम्बाई की हों।	

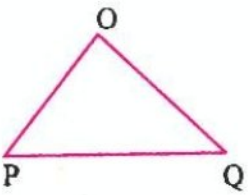
तीनों प्रकार के त्रिभुज पहचानकर उनके नाम अंकित कीजिए–



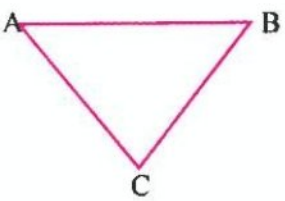
चित्र–1



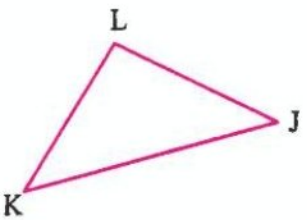
चित्र–2



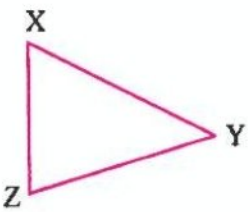
चित्र–3



चित्र–4

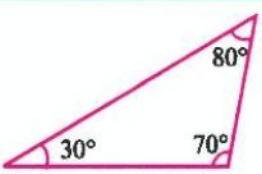
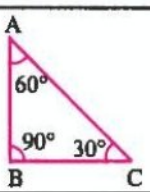
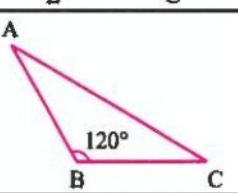


चित्र–5

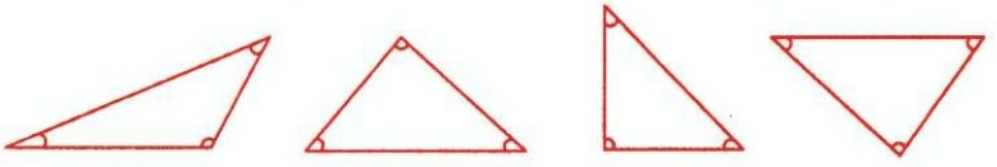


चित्र–6

कोणों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण

त्रिभुज का नाम	त्रिभुज का विवरण	त्रिभुज का चित्र
न्यूनकोण त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसके तीनों कोण न्यूनकोण हों यानी 90° से कम हों।	
समकोण त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण हो यानी 90° का हो।	
अधिककोण त्रिभुज	ऐसा त्रिभुज जिसका एक कोण अधिककोण हो यानी 90° से बड़ा हो।	

1. नीचे दिए गए त्रिभुजों को कोणों के आधार पर वर्गीकृत कीजिए–



2. एक विषमबाहु, एक समद्विबाहु और एक समबाहु त्रिभुज बनाएँ।

3. एक न्यूनकोण, एक समकोण और एक अधिककोण त्रिभुज बनाएँ।

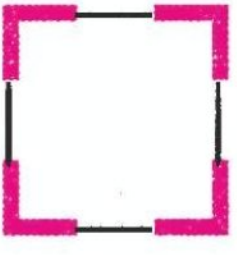
6.8 चतुर्भुज के प्रकार

गतिविधि

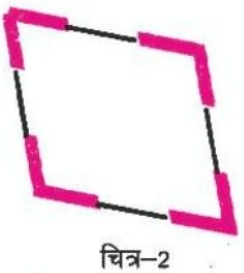
इस खेल हेतु आपको अलग-अलग लम्बाई की बाँस की कमाचियों एवं साइकिल के ट्यूब में उपयोग की जाने वाली वॉल्व ट्यूब की आवश्यकता होगी।

क्रियाकलाप–1

समान लम्बाई की चार कमाचियाँ एवं 4 वॉल्व-ट्यूब लीजिए। एक वॉल्व-ट्यूब में दोनों ओर एक-एक कमाची इस प्रकार घुसाइए कि ट्यूब के अंदर दोनों कमाची एक दूसरे से सट जाए। फिर इसी प्रकार दूसरे वॉल्व-ट्यूब में भी दो कमाचियों को लगाएँ। अब चारों कमाचियों को चित्र-1 के अनुसार आपस में जोड़ें। बताइए यह कैसी आकृति बनी? इस प्रकार बनी आकृति में चारों भुजाएँ तथा कोण बराबर दिखाई दे रहे हैं और सभी कोण 90^0 के हैं। अतः यह एक वर्ग है। अब इसके दो शीर्षों को चित्र के अनुसार अँगूठे से थोड़ा दबाएँ। आपको चित्र–2 की आकृति मिलती है। यहाँ सभी भुजाएँ तो समान हैं परन्तु सभी कोण समान नहीं हैं। इस आकृति को **समचतुर्भुज** कहते हैं।



चित्र–1



चित्र–2

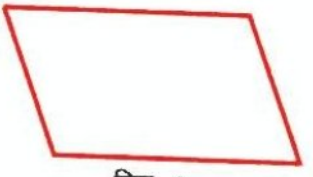
क्रियाकलाप–2

अलग-अलग लम्बाई की दो कमाचियाँ लीजिए। इन दोनों के बराबर की एक-एक और कमाची लीजिए। अलग-अलग लम्बाई वाली एक-एक कमाची को वॉल्व-ट्यूब से जोड़िए। इस



चित्र–3

प्रकार प्राप्त दोनों जोड़ों को आपस में वॉल्व-ट्यूब से जोड़िए। आपको चित्र-3 की आकृति प्राप्त होगी। इसमें आमने-सामने की भुजाएँ समान लम्बाई की हैं तथा सभी कोण समान और 90° के हैं। यह **आयत** है। अब इसके दो शीर्षों को चित्रानुसार दबाइए। बनी आकृति की आमने सामने की भुजा बराबर तथा समांतर है। यह **समांतर चतुर्भुज** है।



चित्र–4

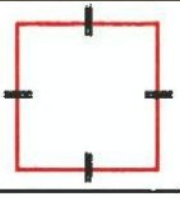
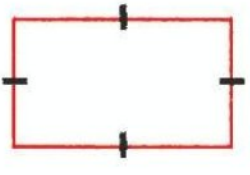
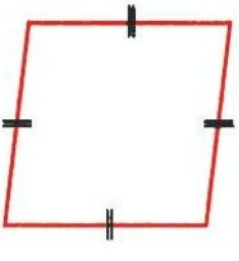
क्रियाकलाप–3

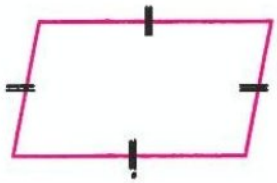
असमान लम्बाई की चार कमाचियों को वॉल्व-ट्यूब की सहायता से चित्र-5 के अनुसार आपस में जोड़िए। प्राप्त आकृति की चारों भुजाएँ असमान लम्बाई की हैं, परंतु आमने-सामने की भुजाओं के जोड़े में से एक जोड़ा समांतर है। यह **समलंब चतुर्भुज** है।



चित्र–5

प्राप्त चतुर्भुजों की सारणी

चित्र	नाम	विवरण
	वर्ग	चारों भुजाएँ बराबर, चारों कोण बराबर यानी 90°
	आयत	आमने-सामने की भुजाएँ बराबर तथा समांतर। चारों कोण बराबर यानी 90°
	समचतुर्भुज	चारों भुजाएँ बराबर, आमने-सामने की भुजाएँ समांतर तथा सम्मुख कोण बराबर।

	समांतर चतुर्भुज	आमने-सामने की भुजाएँ बराबर तथा समांतर। आमने-सामने के कोण अर्थात् सम्मुख कोण बराबर।
	समलंब चतुर्भुज	आमने-सामने की भुजाओं के जोड़े में एक जोड़ा समांतर।

कुछ करें

सही कथन के लिए (✓) तथा गलत कथन के लिए **X** का चिह्न लगाएँ। गलत को सही करके लिखें।

(क) आयत के चारों कोण बराबर होते हैं।

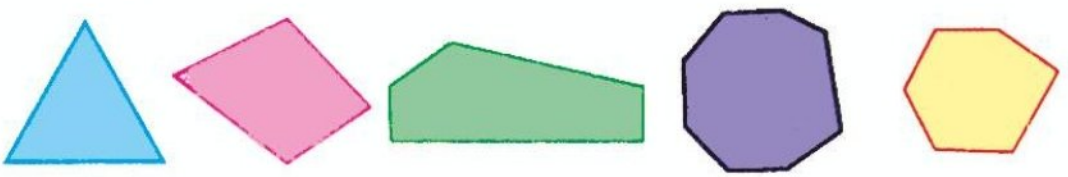
(ख) समचतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज है।

(ग) समांतर चतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

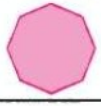
(घ) सभी आयत एक समांतर चतुर्भुज है।

(ङ) समलंब चतुर्भुज में आमने-सामने की भुजाएँ समांतर होती हैं।

6.9 बहुभुज



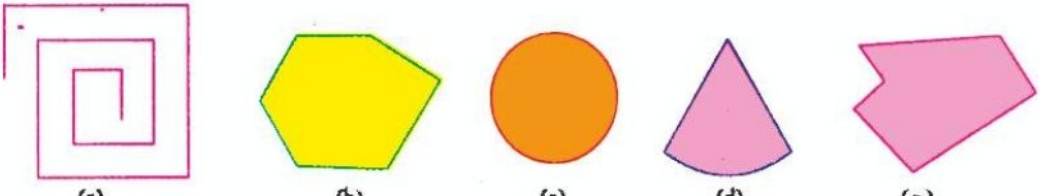
ऊपर के चित्रों को ध्यान से देखिए। ये सभी बंद आकृतियाँ हैं तथा रेखाखंडों से बनी हैं। ऐसी आकृतियाँ बहुभुज कहलाती हैं। बहुभुजों को उनकी भुजाओं की संख्या के आधार

चित्र	भुजाओं की संख्या
	त्रिभुज
	चतुर्भुज
	पंचभुज
	षड्भुज
	अष्टभुज

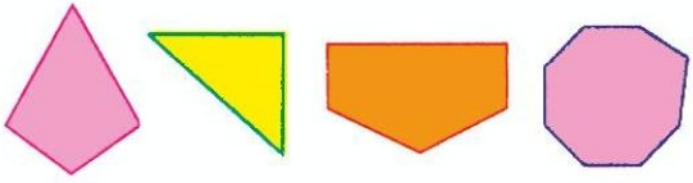
कुछ करें

1. प्रकृति से बहुभुज के पाँच उदाहरण ढूंढकर लिखें।

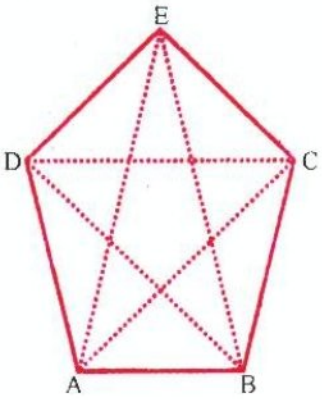
2. नीचे दी गई आकृतियों में से बहुभुज आकृतियों को छाँटें–



3. नीचे दिए गए बहुभुज का नामकरण करें–



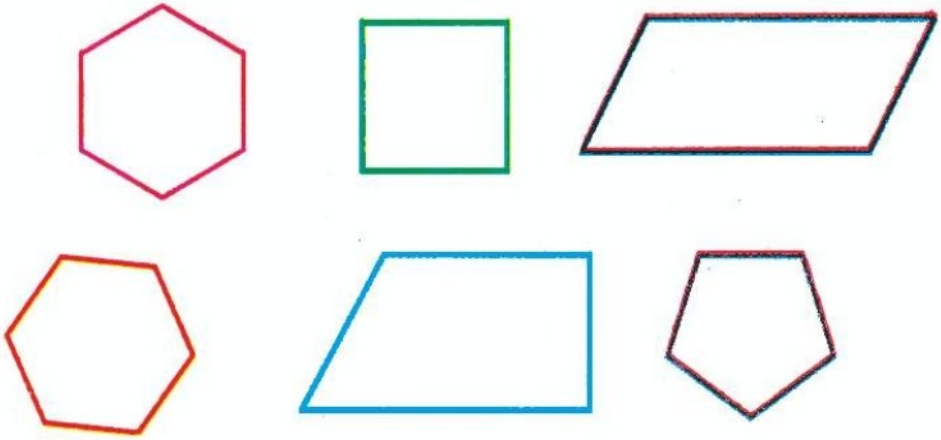
6.9.1 बहुभुज के विकर्ण



दी गई आकृति को देखिए। यह एक पंचभुज है। इस पंचभुज के शीर्ष A, B, C, D तथा E हैं। इसमें शीर्ष A तथा शीर्ष B आसन्न शीर्ष हैं क्योंकि यह शीर्ष एक ही भुजा AB के अन्त बिन्दु हैं। कोई दो शीर्ष लीजिए जो आसन्न नहीं हैं। ऐसे शीर्षों को मिलाने से बने रेखाखंड **बहुभुज के विकर्ण** (Diagonals) कहलाते हैं। पंचभुज में रेखाखंड $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ और $\overline{DC}$ बहुभुज के विकर्ण हैं।

कुछ करें

1. निम्नलिखित बहुभुज आकृतियों में विकर्ण को खींचिए तथा विकर्ण को नामांकित कीजिए–



अध्याय-7 भिन्न

भूमिका

सोनू, सकीला, रेशमा और सुग्रीव चारों खाना खा रहे थे। टिफिन खोलने पर उसमें कुल 10 पूड़ियाँ निकलीं। अब इन चारों के बीच 10 पूड़ियों को बराबर-बराबर कैसे बाँटा जाए।

इसके लिए रेशमा ने पहले सबको दो-दो पूड़ियाँ दीं। अब शेष बची दो पूड़ियों को बाँटना था। उसने दोनों पूड़ियों को आधे-आधे हिस्से में बाँटकर चार टुकड़े बनाए। हर एक को एक हिस्सा दे दिया। इस प्रकार सभी को दो पूरी और एक आधी पूड़ी मिली।

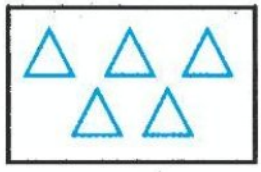


स्वयं करके देखिए

निम्न आकृतियों के नीचे लिखी गई संख्या के अनुसार उपयुक्त भाग को पेंसिल से छायांकित कीजिए–



$\frac{1}{2}$ भाग



$\frac{3}{5}$ भाग



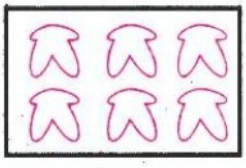
$\frac{1}{2}$ भाग



$\frac{1}{4}$ भाग



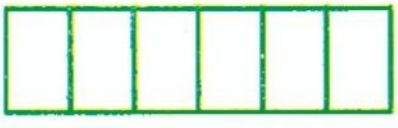
$\frac{1}{3}$ भाग



$\frac{5}{6}$ भाग



$\frac{3}{4}$ भाग



$\frac{2}{6}$ भाग

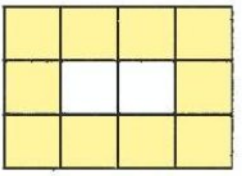
7.2 भिन्न

एक सम (उचित) भिन्न का अर्थ है किसी एक समूह का अथवा एक क्षेत्र (Region) अथवा वस्तु का हिस्सा। $\frac{5}{8}$ एक सम (उचित) भिन्न है। हम इसे पाँच बटे आठ अथवा पाँच-अठांश (Five-eigth) पढ़ते हैं। इस भिन्न $\frac{5}{8}$ में किसी एक पूर्ण को 8 बराबर भागों में बाँटा गया है और उसमें से "5" भाग ले लिए गए हैं। यहाँ 5 अंश (Numerator) और 8 हर (Denominator) कहलाता है।

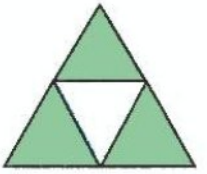
भिन्न $\frac{4}{9}$ का अंश और हर बताइए। यह भी बताइए कि वस्तु कितने बराबर भागों में बाँटी

प्रश्नावली – 7.1

1. छायांकित भाग को निरूपित करने वाली भिन्न लिखिए–



(i)



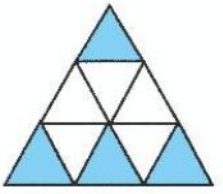
(ii)



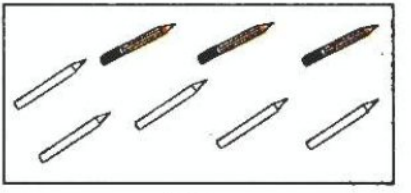
(iii)



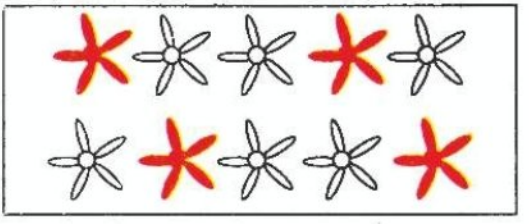
(iv)



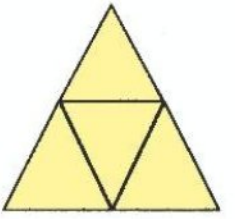
(v)



(vi)



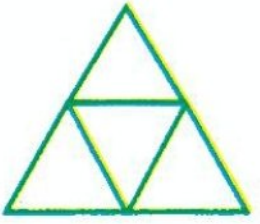
(vii)

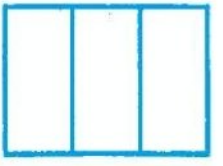


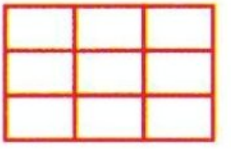
(viii)

2. दी गई भिन्न के अनुसार, भागों को छायांकित कीजिए–





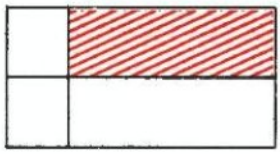




3. नीचे कुछ आकृतियाँ बनी हुई हैं। क्या आकृतियों के नीचे लिखीं भिन्न संख्याएँ, आकृतियों के रँगे हुए हिस्से को दर्शा रही हैं? क्यों या क्यों नहीं?



$\frac{1}{2}$



$\frac{1}{4}$



$\frac{3}{4}$

4. 6 घंटे एक दिन का कौन-सा हिस्सा है?

5. 2 दिन, एक सप्ताह का कौन-सा हिस्सा है?

6. सोनू, सलमा और आर्या मिलकर दो सैंडविच खरीदते हैं– एक सब्जी वाला और दूसरा जैम (Jam) वाला।

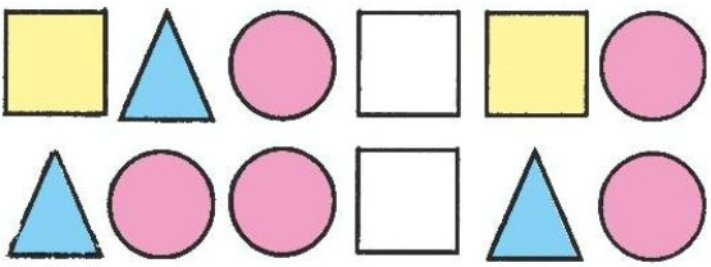
   (a) तीनों उन्हें किस प्रकार बाँटें कि प्रत्येक को बराबर मिले?

   (b) प्रत्येक को एक सैंडविच का कौन-सा भाग मिलेगा?

7. विवेक को 12 प्रश्न हल करने थे। उसने अब तक 8 प्रश्न हल कर लिए। उसने प्रश्नों का कितना भाग कर लिया है?

8. 5 से 15 तक की प्राकृत संख्याएँ लिखिए। इनमें कुल कितनी अभाज्य संख्याएँ हैं? यह 5 से 15 तक कुल संख्याओं का कौन-सा हिस्सा है?

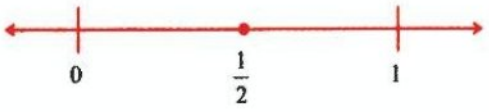
9. नीचे बनी आकृतियों में गोल, चौकोर और तिकोन कुल आकृतियों के कौन-कौन से भाग (भिन्न) को दर्शाते हैं?



7.3 संख्या रेखा पर भिन्न

आप किसी संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं 0, 1, 2, 3, 4, 5 ..... को दर्शाना जानते हैं। अब हम भिन्नों को संख्या रेखा पर दर्शाना सीखते हैं।

हम जानते हैं कि $\frac{1}{2}$, ऐसी संख्या है जो 0 से बड़ी और 1 से छोटी है। इसलिए यह 0 से 1 के बीच में ही होगी। इसलिए हम 0 और 1 के बीच की दूरी को दो बराबर भागों में विभाजित करते हैं और एक भाग से $\frac{1}{2}$ को दर्शाते हैं। (चित्र–1)



चित्र–1

इसी प्रकार $\frac{1}{3}$ को दर्शाने के लिए हम 0 और 1 के बीच की दूरी को 3 बराबर भागों में विभाजित करते हैं और एक भाग से $\frac{1}{3}$ को दर्शाते हैं। (चित्र–2)



चित्र–2

क्या हम इस संख्या रेखा पर $\frac{2}{3}$ को दर्शा सकते हैं? $\frac{2}{3}$ का अर्थ है 3 बराबर भागों में से 2 भाग।



चित्र–3

इसी प्रकार $\frac{0}{3}$ को कहाँ दिखाएँ? यहाँ कोई हिस्सा नहीं **लिया गया है। अतः इसे संख्या रेखा** पर बिन्दु 0 से दर्शाया जा सकता है। $\frac{3}{3}$ एक पूर्ण है, **इसलिए इसे संख्या रेखा पर बिंदु 1 से** दर्शाया जा सकता है।



चित्र–4

स्वयं करके देखिए

1. संख्या रेखा पर $\frac{1}{12}, \frac{0}{12}, \frac{6}{12}$ और $\frac{12}{12}$ को दर्शाइए।
2. क्या आप संख्या रेखा पर 0 और 1 के बीच किसी **अन्य संख्या को दर्शा** सकते हैं? ऐसी पाँच भिन्न संख्याएँ संख्या रेखा पर दर्शाइए।
3. 0 और 1 के बीच कितनी भिन्न है?

7.4 सम भिन्न (Proper fraction)

आप अलग-अलग संख्या रेखाओं पर $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, \frac{0}{3}, \frac{5}{8}$ दर्शाइए। क्या इनमें से कोई भी भिन्न 1 के दाईं ओर है? नहीं ये सभी भिन्न 1 के बाईं ओर **स्थित हैं, क्योंकि ये 1 से छोटी हैं**। **जो भिन्न संख्या एक पूर्ण (Whole) के भाग को निरूपित करती है, सम भिन्न (Proper fraction) कहलाती है।** एक सम भिन्न में अंश **सदैव** हर से छोटा होता है।

स्वयं करके देखिए

1. संकेत '>', '<' या '=' का प्रयोग करके, रिक्त स्थानों को भरिए–

(a) $\frac{4}{4} \square 1$ (b) $\frac{1}{2} \square 1$ (c) $1 \square \frac{7}{8}$

(d) $\frac{3}{5} \square 1$ (e) $\frac{0}{6} \square 0$ (f) $\frac{101}{101} \square 1$

2. एक भिन्न को देखकर आप कैसे बता सकते हैं कि यह भिन्न–

(a) 1 से छोटी है? (b) 1 के बराबर है?

3. एक सम भिन्न लीजिए, जिसके अंश और हर का योग 10 हो, जैसे– $\frac{3}{7}$। आप इस प्रकार की कितनी और सम भिन्न बना सकते हैं?

7.5 विषम भिन्न और मिश्रित भिन्न (संख्याएँ)

मोनू के पास पाँच सेब हैं जिसे वह अपने दोस्तों के साथ बराबर-बराबर बाँटकर खाना चाहता है। वे चारों आपस में पाँच सेबों को किस प्रकार बाँट सकते हैं?



रमीला : हम सभी एक-एक पूरा सेब और पाँचवें सेब का एक-चौथाई ले सकते हैं।



मोनू श्यामू रमीला रागिनी

रागिनी- परन्तु हम प्रत्येक सेब को चार बराबर भागों में भी बाँट सकते हैं और प्रत्येक सेब का एक-चौथाई ले सकते हैं।



मोनू श्यामू रमीला रागिनी

नोनू– दोनों तरीकों से प्रत्येक को बराबर भाग ही मिलेगा और वह है, 5 चतुर्थांश (quarters) अथवा पाँच बटे 4 । चूँकि 4 चतुर्थांशों से एक पूर्ण बनता है, इसलिए हम चार भागों को जोड़कर एक पूरा सेब बना लेते हैं। एक भाग और रह जाएगा यानी कह सकते हैं कि हममें से प्रत्येक को एक पूर्ण और एक चतुर्थांश (चौथाई) मिलेगा। इसे हम $\frac{5}{4}$ लिख सकते हैं। $\frac{5}{4}$ में अंश, हर से बड़ा है।

वे भिन्न जिनमें अंश हर से बड़ा होता है **विषम भिन्न (Improper fraction)** कहलाते हैं।

इसी प्रकार $\frac{3}{2}, \frac{12}{5}, \frac{16}{7}$ प्रत्येक विषम भिन्न हैं।

हर 5 वाली पाँच विषम भिन्न लिखिए।

नोनू– इस भाग को लिखने की कोई अन्य विधि क्या है?

श्यामू – रमीला की विधि में प्रत्येक साथी का हिस्सा (भाग) एक पूर्ण और एक चौथाई मिल कर बना है।



यह 1 है

(एक)



इनमें से प्रत्येक $\frac{1}{4}$

(एक चौथाई)

हमने रँगा भाग लिया है जो कि $1 + \frac{1}{4}$ है, जिसे $1\frac{1}{4}$ भी लिखा जाता है। $1\frac{1}{4}$ जैसी भिन्न **मिश्रित भिन्न (Mixed fraction)** कहलाती है। एक मिश्रित भिन्न में एक भाग पूर्ण होता है और एक भाग भिन्न होता है।

आपको मिश्रित संख्याएँ अपने आस-पास कहाँ-कहाँ मिलती हैं? कुछ उदाहरण दीजिए।

7.5.1 विषम भिन्न को मिश्रित भिन्न (संख्या) में व्यक्त करना

इसके लिए हम अंश को हर से भाग देकर भागफल और शेषफल प्राप्त करते हैं, फिर संख्या को **भागफल** $\frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$ के रूप में लिखते हैं। यही विषम भिन्न का मिश्रित संख्या (भिन्न) रूप है।

उदाहरण–1 : **निम्न को मिश्रित संख्याओं के रूप में व्यक्त कीजिए–**

(a) $\frac{17}{4}$ (b) $\frac{11}{3}$ (c) $\frac{27}{5}$ (d) $\frac{7}{3}$

हल : (a) $\frac{17}{4}$

$$4\overline{)17}\ \begin{matrix}4\\ \\ \end{matrix}$$
$$\underline{16}$$
$$01$$

अर्थात् इसमें 4 पूर्ण और $\frac{1}{4}$ अधिक है। यानी यह $4\frac{1}{4}$

(b) $\frac{11}{3}$

$$3\overline{)11}\ \begin{matrix}3\\ \\ \end{matrix}$$
$$\underline{9}$$
$$2$$

अर्थात् 3 पूर्ण और $\frac{2}{3}$ अधिक या $3\frac{2}{3}$

प्रश्न (c) और (d) को आप स्वयं हल करें।

7.5.2 मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में बदलना

अब हमें उलटा करना है। यानी यह पता करना है कि पूर्णों से कितने बराबर भाग बनेंगे।

(a) जैसे $2\frac{3}{4}$ में दो पूर्ण हैं और $\frac{3}{4}$ और है। यानी $2+\frac{3}{4}$ है।

यह हुआ $\frac{(2\times4)+3}{4}=\frac{11}{4}$

(b) $7\frac{1}{9}=\frac{(7\times9)+1}{9}=\frac{64}{4}$

(c) $5\frac{3}{7}=\frac{(5\times7)+3}{7}=\frac{38}{7}$

प्रश्नावली – 7.2

1. संख्या रेखाएँ खींचिए और उन पर निम्नलिखित को बिंदु रूप में दर्शाइए–

(a) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{4}{4}$ (b) $\frac{1}{8},\frac{2}{8},\frac{3}{8},\frac{7}{8}$ (c) $\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{8}{5},\frac{4}{5}$

2. निम्नलिखित को मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए–

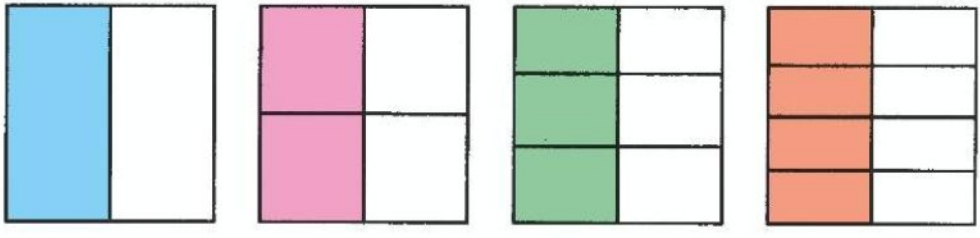
(a) $\frac{20}{3}$ (b) $\frac{11}{5}$ (c) $\frac{17}{7}$ (d) $\frac{19}{6}$ (e) $\frac{35}{9}$

3. निम्नलिखित को विषम भिन्नों के रूप में व्यक्त कीजिए–

(a) $7\frac{3}{4}$ (b) $5\frac{6}{7}$ (c) $2\frac{5}{7}$ (d) $10\frac{3}{5}$ (e) $9\frac{3}{7}$

7.6 तुल्य भिन्न (Equivalent fractions)

नीचे $\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{6}{12}$ का चित्रात्मक निरूपण किया गया है।



अगर हम इन चित्रों को एक दूसरे पर रखें, तो रँगे भाग बराबर (तुल्य) होंगे। क्या आप यह देख पा रहे हैं? यहाँ $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ सभी तुल्य भिन्न हैं। ये एक पूर्ण के समान भाग निरूपित करती हैं। ऐसी भिन्न **तुल्य भिन्न** कहलाती है।

तुल्य भिन्न एक पूर्ण का समान (तुल्य) भाग क्यों निरूपित करती है? सोचिए।

हम देखते हैं कि $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1\times2}{2\times2}$ है।

इसी प्रकार $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1\times3}{2\times3}$

तथा $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1\times4}{2\times4}$

स्पष्ट है **किसी भिन्न की तुल्य भिन्न ज्ञात करने के लिए, आप उसके अंश और हर को एक समान शून्येतर संख्या (शून्य को छोड़कर) जैसे– 1, 2 .... से गुणा कर सकते हैं।**

$\frac{1}{3}$ की समतुल्य भिन्न है : $\frac{1\times2}{3\times2} = \frac{2}{6}$ है। और समतुल्य भिन्न हैं $\frac{3}{9}, \frac{4}{12}$

क्या आप इससे सहमत हैं? कारण सहित स्पष्ट कीजिए।

स्वयं करके देखिए

1. प्रत्येक की पाँच तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{4}{9}$

उदाहरण–2 : $\frac{2}{5}$ के तुल्य ऐसे भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका अंश 6 है।

हल : हम जानते हैं कि 2 x 3 = 6 है। अर्थात् हमें दी हुई भिन्न के अंश और हर को 3 से गुणा करना होगा।

इस प्रकार $\frac{2}{5}=\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{6}{15}$

अतः वांछित तुल्य भिन्न $\frac{6}{15}$ है।

उदाहरण–3 : $\frac{15}{35}$ की तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका हर 7 हो

हल : हमारी संख्या $\frac{15}{35}=\frac{\square}{7}$

हरों को देखने से स्पष्ट है कि 35 ÷ 5 = 7 है। अतः $\frac{15}{35}$ के अंश और हर को 5 से भाग देंगे तो हमें प्राप्त होगा $\frac{15}{35}=\frac{15\div5}{35\div5}=\frac{3}{7}$

रोचक तथ्य

सारणी को पूरा करें और तथ्य ढूँढ़ें–

तुल्य भिन्न	पहली के अंश और दूसरी के हर का गुणनफल	दूसरी के अंश और पहली के हर का गुणनफल	क्या गुणनफल समान हैं?
$\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$	1 X 9 = 9	3 X 3 = 9	हाँ
$\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$			
$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$			
$\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$			

तुल्य भिन्नों के युग्मों में पहली के अंश और दूसरी के हर का गुणनफल दूसरी के अंश और पहली के हर के गुणनफ़ल बराबर होते हैं। ये दोनों गुणनफल **कैंची गुणनफल (Cross products)** कहलाते हैं।

क्या आप इस नियम से तुल्य भिन्नों के छूटे अंश/हर ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण–4 : $\frac{2}{9}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका हर 63 है।

हल : हमें प्राप्त है : $\frac{2}{9}=\frac{\square}{63}$

इसके लिए, $9 \times \square = 2 \times 63$ होगा

$= 2 \times 9 \times 7 = 14 \times 9$

तुलना करने पर $\square = 14$ अतः $\frac{2}{9}=\frac{14}{63}$ है।

7.6.1 भिन्न का सरलतम रूप (Simplest form)

एक भिन्न $\frac{12}{18}$ लें। इसके तुल्य एक ऐसी भिन्न प्राप्त करने का प्रयत्न करें जिसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो।

$\frac{12}{18}=\frac{12\div 2}{18\div 2}=\frac{6}{9}$ क्योंकि 12 और 18 दोनों 2 से विभाज्य हैं। परन्तु 6 और 9 में भी 1 के अतिरिक्त अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं।

अतः $\frac{6}{9}=\frac{6\div 3}{9\div 3}=\frac{2}{3}$

इस प्रकार $\frac{2}{3}$ वांछित भिन्न है, क्योंकि 2 और 3 में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

इस प्रकार, **जब एक भिन्न के अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, तो वह सरलतम रूप (Simplest form) या न्यूनतम रूप (Lowest form) कहा जाता है।**

सबसे छोटा रास्ता

उदाहरण : भिन्न $\frac{18}{12}$ लें। 18 और 12 दोनों 6 के गुणक हैं।

अतः $\frac{18 \div 6}{12 \div 6} = \frac{3}{2}$

क्या आप ऐसी दो और समतुल्य भिन्न ज्ञात कर सकते हैं?

मजे की बात

नीचे की तुल्य भिन्नों में अंक 1 से 9 तक एक बार प्रयोग किए गए हैं।

$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}$

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}$

स्वयं करके देखिए

1. निम्न भिन्नों को सरलतम रूप में लिखिए–

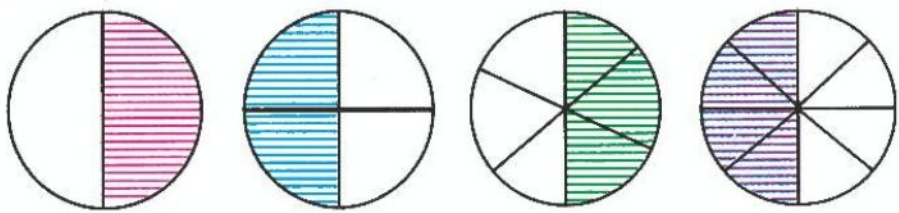
(i) $\frac{36}{54}$ (ii) $\frac{36}{24}$ (iii) $\frac{17}{51}$

2. क्या $\frac{49}{64}$ अपने सरलतम रूप में है?

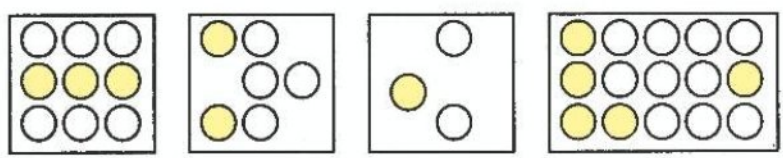
प्रश्नावली – 7.3

1. प्रत्येक चित्र में छायांकित भागों के लिए भिन्न लिखिए। क्या ये सभी तुल्य भिन्न हैं? क्यों?

(a)

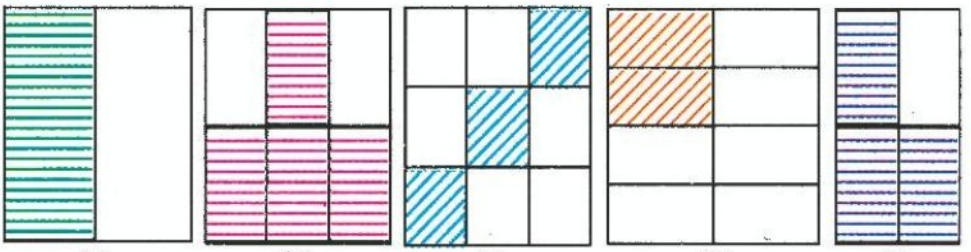


(b)

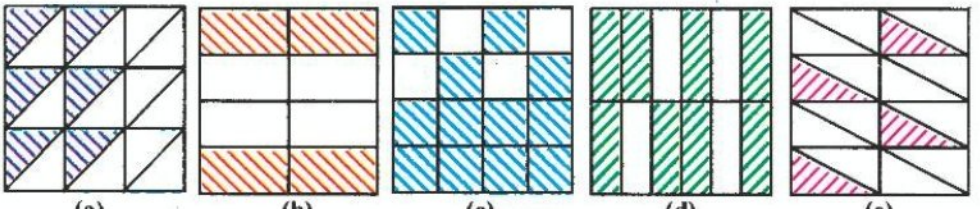


2. छायांकित भागों के लिए भिन्नों को लिखिए और पंक्ति (i) के प्रत्येक भिन्न का तुल्य भिन्न पंक्ति (ii) से चुनकर जोड़ा बनाइए।

(i)



(ii)



3. खाली डिब्बों (☐) को सही संख्या से भरिए–

(a) $\frac{3}{5}=\frac{\square}{20}$ (b) $\frac{2}{7}=\frac{8}{\square}$

(c) $\frac{4}{9}=\frac{12}{\square}$ (d) $\frac{49}{35}=\frac{\square}{5}$

4. $\frac{3}{4}$ के तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए जिनका–

(a) हर 20 है। (b) अंश 33 है।

(c) हर 8 है। (d) अंश 27 है।

5. $\frac{36}{48}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिनका–

(a) अंश 9 है। (b) हर 4 है।

6. जाँच कीजिए कि निम्न भिन्न तुल्य हैं या नहीं–

(a) $\frac{5}{9}, \frac{30}{54}$ (b) $\frac{3}{10}, \frac{12}{50}$ (c) $\frac{7}{13}, \frac{5}{11}$

7. निम्न भिन्नों को सरलतम रूप में बदलिए–

(a) $\frac{48}{60}$ (b) $\frac{150}{60}$ (c) $\frac{7}{28}$

8. रमेश के पास 20 पेंसिलें थीं। नीलू के पास 50 पेंसिलें और अजहर के पास 80 पेंसिलें थीं। 5 महीने के बाद रमेश ने 10 पेंसिलें, नीलू ने 25 पेंसिलें और अजहर ने 40 पेंसिलें प्रयोग कर लीं। प्रत्येक ने अपनी पेंसिलों का कितना-कितना हिस्सा प्रयोग कर लिया? क्या प्रत्येक ने अपनी पेंसिलों का समान हिस्सा भिन्न प्रयोग किया है?

9. तुल्य भिन्नों का मिलान कीजिए और प्रत्येक के लिए दो भिन्न और लिखिए–

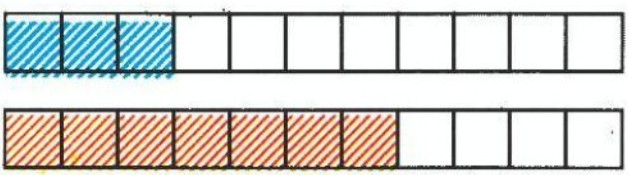
(i)	$\frac{250}{400}$	(a)	$\frac{2}{3}$
(ii)	$\frac{660}{990}$	(b)	$\frac{2}{5}$
(iii)	$\frac{180}{360}$	(c)	$\frac{1}{2}$
(iv)	$\frac{220}{550}$	(d)	$\frac{5}{8}$

7.7 समान भिन्न (Like fraction)

एक ही हर वाली भिन्न **समान भिन्न** कहलाती है। इस प्रकार $\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \frac{6}{16}$ सभी समान भिन्न हैं। $\frac{7}{25}$ और $\frac{7}{28}$ में हर असमान हैं, अतः ये **असमान भिन्न (Unlike fraction)** हैं। समान भिन्नों के पाँच युग्म और असमान भिन्नों के पाँच युग्म लिखिए।

7.7.1 भिन्नों की तुलना

निम्न आकृतियों को देखें –



$\frac{3}{11}$

$\frac{7}{11}$

दोनों भिन्नों में पूर्ण को 11 बराबर भागों में बाँटा गया है। स्पष्ट है $\frac{7}{11} > \frac{3}{11}$। अतः समान हरों वाली दो भिन्नों में बड़े अंश वाली संख्या बड़ी होती है।

$\frac{4}{5}$ और $\frac{3}{5}$ में $\frac{4}{5}$ बड़ी संख्या है। इसी तरह $\frac{9}{20}$ और $\frac{13}{20}$ में $\frac{13}{20}$ बड़ी है।

स्वयं करके देखिए

1. कौन-सी भिन्न बड़ी है?

(i) $\frac{5}{10}$ या $\frac{7}{10}$ (ii) $\frac{13}{24}$ या $\frac{15}{24}$ (iii) $\frac{21}{102}$ या $\frac{29}{102}$

ऐसी संख्याओं की तुलना करना क्यों सरल है?

2. इन संख्याओं को आरोही और अवरोही क्रम में लिखिए–

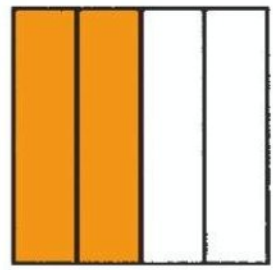
(a) $\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{9}{10}, \frac{5}{10}, \frac{8}{10}, \frac{2}{10}$ (b) $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}, \frac{11}{7}, \frac{4}{7}$

7.7.2 असमान भिन्नों की तुलना

दो भिन्न असमान होती हैं यदि उनके हर अलग-अलग हों। जैसे– $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{6}$ असमान भिन्न हैं और $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{5}$ भी असमान भिन्न हैं।

समान अंश वाली असमान भिन्न





$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$

स्पष्ट है, इनमें अंश समान हैं और हर अलग-अलग हैं। दूसरी संख्या में पूर्ण का टुकड़ा छोटा हो गया है। अतः यदि दो भिन्नों में अंश समान हों तो दोनों में से छोटे हर वाली संख्या बड़ी होती है।

इस प्रकार $\frac{2}{3} > \frac{2}{4}$

आइए $\frac{2}{1}, \frac{2}{13}, \frac{2}{9}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$ को आरोही क्रम में सजाएँ। चूँकि सभी के अंश बराबर हैं, अतः छोटे हर वाली संख्याएँ बड़ी होंगी और बड़े हर वाली संख्याएँ छोटी होंगी।

अतः आरोही क्रम- $\frac{2}{13}, \frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{2}{1}$ है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित भिन्नों को आरोही और अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए–

(a) $\frac{1}{10}, \frac{1}{13}, \frac{1}{18}, \frac{1}{9}, \frac{1}{7}, \frac{1}{50}$ (b) $\frac{5}{6}, \frac{5}{19}, \frac{5}{15}, \frac{5}{2}, \frac{5}{9}, \frac{5}{12}$

7.8 असमान अंश और हर वाली भिन्न

मान लीजिए हम $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ की तुलना करना चाहते हैं। इन दोनों के अंश और हर

अलग-अलग हैं। हम समान हर वाली भिन्नों की तुलना करना जानते हैं। अतः इनके हरों को तुल्य भिन्नों की पद्धति से समान करेंगे। अतः

$\frac{2}{3}$ का तुल्य भिन्न $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=----$

$\frac{3}{4}$ का तुल्य भिन्न $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=----$

स्पष्ट है $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ और $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$

चूँकि समान हर वाली संख्या में बड़े अंश वाली संख्या बड़ी होगी। अतः $\frac{9}{12}>\frac{8}{12}$

इसलिए $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$ होगी।

ध्यान दीजिए कि तुल्य भिन्नों का समान हर 12 है जो 3 x 4 के बराबर है। यह 3 और 4 का एक सार्वगुणज है।

उदाहरण–2 : $\frac{5}{6}$ और $\frac{13}{15}$ की तुलना कीजिए।

हल : पहले 6 और 15 के सार्वगुणज वाली तुल्य संख्याएँ ज्ञात करेंगे।

अब $\frac{5}{6}=\frac{5\times5}{6\times5}=\frac{25}{30}$ तथा $\frac{13}{15}=\frac{13\times2}{15\times2}=\frac{26}{30}$

चूँकि $\frac{26}{30}>\frac{25}{30}$ इसलिए $\frac{13}{15}>\frac{5}{6}$ है।

असमान भिन्नों की तुलना में इनको समान भिन्न में बदला जाता है। इसे करने के लिए भिन्नों के हर का लघुतम समापवर्तक (ल.स) उपयोग कर सकते हैं।

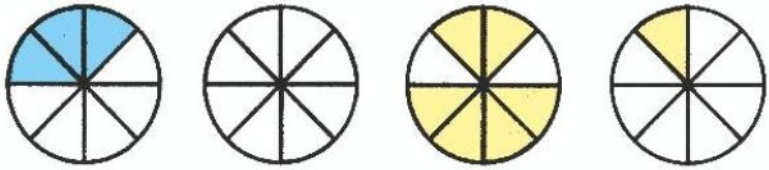
ल.स. ही क्यों? : 6 और 15 का गुणनफल 90 है। स्पष्टतः 90 भी 6 और 15 का सार्वगुणज है। हम 90 का भी प्रयोग कर सकते हैं, परन्तु 30 भी 6 और 15 का सार्वगुणज है और इसके उपयोग से हमारा कार्य सरल हो जाएगा।

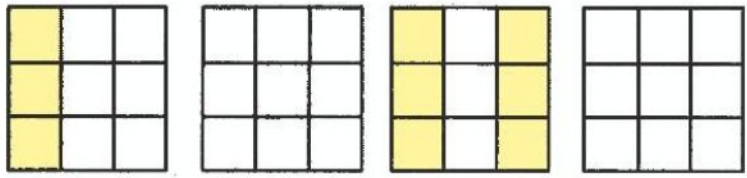
प्रश्नावली – 7.4

1. इन संख्याओं को आरोही क्रम में जमाएँ–

$$\frac{3}{8}, \frac{6}{8}, \frac{4}{8}, \frac{1}{8}$$

2. प्रत्येक चित्र के लिए भिन्न को लिखिए। भिन्नों के बीच में सही चिह्न '<', '>' का प्रयोग करते हुए, इन्हें आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए–

(a) 

(b) 

3. एक ही संख्या रेखा पर $\frac{2}{6}, \frac{4}{6}, \frac{8}{6}$ और $\frac{6}{6}$ को दर्शाइए।

4. दी हुई संख्याओं के बीच में उचित चिह्न '<' या '>' भरिए–

(a) $\frac{5}{6} \square \frac{2}{6}$ (b) $\frac{3}{6} \square 0$ (c) $\frac{1}{6} \square \frac{6}{6}$ (d) $\frac{8}{6} \square \frac{5}{6}$

(e) $\frac{3}{6} \square \frac{5}{6}$ (f) $\frac{1}{7} \square \frac{1}{4}$ (g) $\frac{4}{5} \square \frac{5}{5}$ (h) $\frac{3}{5} \square \frac{3}{7}$

5. निम्नलिखित के उत्तर लिखिए और दर्शाइए कि आपने इन्हें कैसे हल किया है–

(a) क्या $\frac{12}{15}, \frac{3}{30}$ के बराबर है?

(b) क्या $\frac{4}{5}, \frac{5}{9}$ के बराबर है?

(c) क्या $\frac{3}{5}, \frac{9}{15}$ के बराबर है?

(d) क्या $\frac{9}{16}, \frac{5}{9}$ के बराबर है?

6. रोहित कुल 8 रोटियों में से 4 रोटियाँ खाता है। रोहिणी कुल 8 रोटियों का $\frac{1}{4}$ भाग खाती है। किसने कम खाया?

7 40 विद्यार्थियों की एक कक्षा A में 15 विद्यार्थी 'प्रथम श्रेणी में पास हुए और 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा B में 12 विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में पास हुए। किस कक्षा में विद्यार्थियों का अधिक भाग प्रथम श्रेणी में पास हुआ?

8. रीतेश एक घंटे के $\frac{5}{6}$ भाग तक पढ़ा, जबकि सर्वेश एक घंटे के $\frac{11}{12}$ भाग तक पढ़ा। किसने लम्बे समय तक पढ़ाई की?

7.9 भिन्न की सक्रियाएँ

7.9.1 भिन्नों का योग (जोड़)

क्या दो या अधिक भिन्न संख्याओं को जोड़ा जा सकता है? यदि हाँ, तो कैसे? हम समान हर वाली भिन्नों को मौखिक रूप से भी जोड़ सकते हैं। अगर भिन्नों के हर समान नहीं हैं, तो हमें पहले उनको समान हर वाली भिन्नों में बदलना होगा। हमें जोड़ना है $\frac{5}{14}$ और $\frac{3}{14}$ को। हम समान भिन्नों के योग से प्रारंभ करते हैं–

एक 7 x 2 की ग्रिड शीट (Grid sheet) लेते हैं। इस शीट की प्रत्येक पंक्ति में 7 खाने हैं और प्रत्येक स्तंभ में 2 खाने हैं। इसमें कुल 14 खाने हैं। इनमें से 5 खानों में हरा रंग भरिए। हरा क्षेत्र एक पूर्ण का $\frac{5}{14}$ भिन्न है। अब शीट के 3 खानों में लाल रंग भरिए। लाल क्षेत्र एक पूर्ण का $\frac{3}{14}$ भिन्न है। इससे स्पष्ट है कि $\frac{5}{14}+\frac{3}{14}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$



दो या दो से अधिक समान हर वाली भिन्नों का योग = $\frac{\text{अंशों का योग}}{\text{समान हर}}$

स्वयं करके देखिए–

1. आपकी माँ सुबह $1\frac{1}{4}$ लीटर दूध और शाम को $\frac{1}{2}$ लीटर दूध लेती है। वह एक दिन में कितना दूध लेती है?
2. ब्रजेश अपनी पेन्टिंग को रँग रहा था। उसने सुबह $\frac{1}{4}$ भाग को रँगा, दोपहर को $\frac{1}{4}$ भाग रँगा, तो उसने अभी तक कुल कितने भाग को रँगा?
3. मेरी माँ ने एक नारंगी को चार बराबर भागों में बाँटा। उसने मुझे दो भाग और मेरे भाई को एक भाग दिया। उन्होंने हम दोनों को कुल का कितना भाग दिया?
4. $\frac{2}{5}$ और $\frac{1}{5}$ को जोड़ें।

7.9.2 असमान हर वाली भिन्नों का जोड़

हम जानते हैं कि जिन भिन्नों के हर समान नहीं हैं, उन्हें हम बगैर उनका रूप बदले जोड़ नहीं सकते। हम पहले उन भिन्नों के हर को समान करते हैं अर्थात् समान हरों वाली भिन्नों में बदलते हैं। फिर पूर्व की भाँति आगे जोड़ते हैं। जैसे– $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$

समान हर करने पर $\frac{1\times5}{3\times5}=\frac{5}{15}$ और $\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{6}{15}$ (हम समान हर करने के लिए ल. स. लेते हैं। यहाँ 3 और 5 का ल.स. 15 है।)

अतः योग $\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$

इसी प्रकार $\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{6}$ को जोड़ने के लिए हम समान हर वाली तुल्य भिन्न बनाने की आवश्यकता है।

चूँकि यहाँ हर 4 और 6 का ल.स. 12 है।

अतः $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\times2}{6\times2}+\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}$

स्वयं करके देखिए

(a) $\frac{1}{5}$ और $\frac{4}{7}$ को जोड़िए। (b) $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{7}$ को जोड़िए।

7.9.3 समान भिन्नों को घटाना

रेशमा के पास एक रोटी का $\frac{5}{6}$ भाग था। उसने $\frac{2}{6}$ भाग अपने छोटे भाई को दिया। उसके पास रोटी का कितना भाग बचा?

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

इस प्रकार दो समान भिन्नों का अंतर पता करने के लिए–

$$\frac{\text{बड़ा अंश} - \text{छोटा अंश}}{\text{उभयनिष्ठ हर (सम हर)}}$$

स्वयं करके देखिए

1. $\frac{5}{8}$ और $\frac{3}{8}$ का अन्तर ज्ञात कीजिए।
2. मेरी माँ ने एक तरबूज को 12 बराबर भागों में विभाजित किया। मैंने इसके 5 टुकड़े खा लिए। मेरे मित्र ने चार टुकड़े खाए। हमने मिलकर कुल कितने तरबूज खाए? मैंने अपने मित्र से कितना अधिक तरबूज खाया? कितना तरबूज शेष रह गया?
3. इस प्रकार के पाँच प्रश्न और बनाइए और अपने मित्रों के साथ हल कीजिए।

7.9.4 असमान हरों वाली भिन्नों को घटाना

सोचें $\frac{1}{5}$ में क्या जोड़ने पर $\frac{1}{2}$ प्राप्त होगा? यहाँ वांछित संख्या प्राप्त करने के लिए $\frac{1}{2}$ में से $\frac{1}{5}$ को घटाना होगा।

चूँकि $\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{2}$ असमान भिन्न हैं, इसलिए घटाने के लिए पहले हम इन्हें समान हरों वाली भिन्नों में बदलते हैं।

$\frac{1}{2}=\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{5}{10}$ और $\frac{1}{5}=\frac{1\times2}{5\times2}=\frac{2}{10}$ (चूँकि 2 और 5 का ल.स. 10 है।)

अतः $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{3}{10}$

स्वयं करके देखिए

(a) $\frac{5}{7}$ में से $\frac{2}{5}$ को घटाइए। (b) $\frac{5}{6}$ में से $\frac{3}{4}$ को घटाइए।

7.9.5 मिश्रित भिन्नों का जोड़ और घटाव

मिश्रित भिन्नों को या तो एक पूर्ण भाग और एक उचित भिन्न के जोड़ के रूप में (जैसे $2\frac{4}{5}$) या एक अनुचित भिन्न (विषम भिन्न) के रूप में (जैसे लिखा जाता है– $\frac{14}{5}$)।

दो विधियों से संयुक्त भिन्नों को जोड़ा (या घटाया) जाता है–

(1) इसमें पूर्ण भागों और भिन्नीय भागों पर संक्रियाएँ अलग-अलग करते हैं।

(2) इनमें भिन्नों को अनुचित भिन्नों में बदलकर सीधे जोड़ा (या घटाया) जाता है।

उदाहरण–1 : $2\frac{3}{4}$ और $5\frac{4}{5}$ को जोड़िए।

हल : $2\frac{3}{4}+5\frac{4}{5}=2+\frac{3}{4}+5+\frac{4}{5}=7+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$

अब $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{15+16}{20}=\frac{31}{20}$ (चूँकि 4 और 5 का ल.स. = 20)

$=1\frac{11}{20}=1+\frac{11}{20}$

इस प्रकार कुल जोड़ $7+1+\frac{11}{20}=8\frac{11}{20}$

अतः $2\frac{3}{4}+5\frac{4}{5}=8\frac{11}{20}$

उदाहरण–2 : $4\frac{2}{5}-2\frac{1}{5}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $4\frac{2}{5}-2\frac{1}{5}=(4-2)+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)$ (यहाँ $4>2$)

$=2+\frac{1}{5}=2\frac{1}{5}$

उदाहरण–3 : $8\frac{1}{4}-2\frac{5}{6}$ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $8>2$ परन्तु $\frac{1}{4}<\frac{5}{6}$। इस प्रश्न को अनुचित भिन्न में बदलकर हल कर सकते हैं।

$8\frac{1}{4}=\frac{33}{4}$ तथा $2\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$

अब $\frac{33}{4}-\frac{17}{6}=\frac{33\times3}{4\times3}-\frac{17\times2}{6\times2}=\frac{99}{12}-\frac{34}{12}$

$=\frac{99-34}{12}=\frac{65}{12}=5\frac{5}{12}$

प्रश्नावली – 7.5

1. हल कीजिए–

(a) $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}$ (b) $1-\frac{2}{3}\left(1=\frac{3}{3}\right)$ (c) $\frac{1}{4}+\frac{0}{4}$

(d) $3-\frac{12}{5}$ (e) $\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$ (f) $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$

(g) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ (h) $8\frac{1}{4}-2\frac{5}{6}$ (i) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$

(j) $1\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}$ (k) $4\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}$ (l) $\frac{16}{5}-\frac{7}{5}$

2. लीला ने $\frac{3}{8}$ मी रबर का फीता खरीदा और सीमा ने $\frac{4}{5}$ मी रबर का फीता खरीदा। दोनों ने कुल कितना फीता खरीदा?

3. रिक्त स्थान भरिए–

(a) $\frac{7}{10}-\square=\frac{3}{10}$ (b) $\square-\frac{3}{21}=\frac{5}{21}$

(c) $\square-\frac{3}{6}=\frac{3}{6}$ (d) $\square+\frac{5}{27}=\frac{12}{27}$

(e) $\square-\frac{5}{8}=\frac{1}{4}$ (f) $\frac{1}{2}-\square=\frac{1}{6}$

4. तालिका को पूरा कीजिए–

(a)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

(b)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

5. $\frac{7}{8}$ मीटर तार के दो टुकड़े हो जाते हैं। इसमें से एक टुकड़ा $\frac{2}{4}$ मीटर है। दूसरे टुकड़े की लम्बाई क्या है?

6. रश्मि का घर उसके विद्यालय से $\frac{9}{10}$ किमी दूर है। वह कुछ दूर पैदल चलती है और फिर $\frac{1}{2}$ किमी की दूरी बस द्वारा तय करके स्कूल पहुँचती है। वह कितनी दूरी पैदल चलती है?

7. करीना स्कूल के मैदान का चक्कर $3\frac{1}{5}$ मिनट में लगाती है और कमलेश इसी मैदान का चक्कर लगाने में $\frac{12}{5}$ मिनट का समय लेता है। कौन कम समय लेता है और कितना?

हमने सीखा

1. भिन्न एक संख्या है, जिसमें पूर्ण का भाग भी सम्मिलित है। इन संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। पूर्ण एक अकेली वस्तु भी हो सकती है और वस्तुओं का समूह भी।
2. भिन्न $\frac{7}{9}$ में 7 अंश तथा 9 भिन्न का हर कहलाता है। भिन्न के सभी भाग बराबर होते हैं।
3. प्रत्येक भिन्न के लिए संख्या रेखा पर एक निश्चित बिन्दु होता है। अतः भिन्नों को संख्या रेखा पर भी दर्शाया जा सकता है।
4. जिस भिन्न के अंश और हर में 1 के अलावा कोई दूसरा उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो, वह भिन्न का सरलतम या न्यूनतम रूप होता है।
5. दो भिन्न तुल्य भिन्न कहलाती हैं यदि वे समान मात्रा को निरूपित करती हैं। एक दी हुई भिन्न की तुल्य भिन्न निकालने के लिए हम भिन्न के अंश तथा हर दोनों को समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग करते हैं।
6. उचित भिन्न में अंश, हर से छोटा होता है, जबकि विषम भिन्न में अंश हमेशा हर से बड़ा होता है।
7. समान हर बनाने के लिए हरों का ल.स. निकालना सुविधाजनक होता है।

अध्याय-8 दशमलव

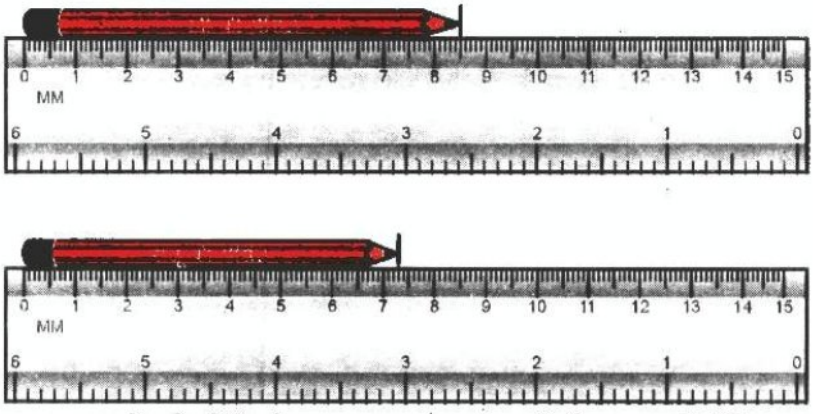
8.1 भूमिका

उमा और रमा बाजार जा रहे थे। उन्हें अपना गणित का गृहकार्य करने के लिए रबर और पेन्सिल खरीदने थे। उमा ने कहा, "मेरे पास 3 रुपये 50 पैसे हैं।" रमा ने कहा "मेरे पास 4 रुपये 75 पैसे हैं।" वे दशमलव का उपयोग करना जानते थे। इसलिए उमा ने कहा, मेरे पास 3.50 रुपये हैं और रमा ने कहा, मेरे पास 4.75 रुपये हैं। क्या उन दोनों ने सही लिखा था? इसे इस प्रकार पढ़ा जाता है– तीन दशमलव पाँच शून्य रुपये। इसी प्रकार आप रमा के रुपयों को पढ़िए।

हम जानते हैं कि दशमलव संख्या वे संख्या हैं, जिन्हें दशमलव बिन्दु के साथ लिखा जाता है। इस अध्याय में, हम दशमलव के विषय में और अधिक सीखेंगे।

8.2 इकाई एवं दशांश

रवि तथा राजू ने अपनी-अपनी पेंसिलों की लम्बाई मापी। रवि की पेंसिल 8 सेमी 5 मिमी लम्बी थी और राजू की 7 सेमी 3 मिमी लम्बी थी।



क्या आप इन लम्बाइयों को सेमी के साथ दशमलव रूप में लिख सकते हैं?

हम जानते हैं कि 10 मिमी = 1 सेमी। अतः 1 मिमी = $\frac{1}{10}$ सेमी

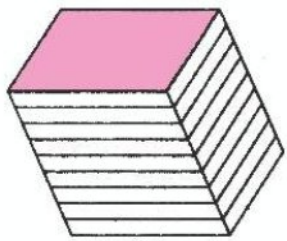
अब रवि के पेंसिल की लम्बाई = 8 सेमी 5 मिमी

$= 8\frac{5}{10}$ सेमी अर्थात् 8 सेमी और 1 सेमी का पाँच दशांश भाग

राजू की पेंसिल की लम्बाई = 7 सेमी 3 मिमी

$= 7\frac{3}{10}$ सेमी अर्थात् 7 सेमी और 1 सेमी का तीन दशांश भाग

हम जानते हैं कि यदि इकाइयों को खंडों द्वारा दर्शाएँ तो एक इकाई एक खंड को, दो इकाई दो खंड को और इसी प्रकार आगे भी।



एक खंड (इकाई)



इकाई का एक भाग

एक खंड को यदि दस बराबर भागों में बाँटें तो प्रत्येक भाग एक इकाई (खंड) का $\frac{1}{10}$ (एक दशांश अर्थात् दसवाँ भाग) है। दो भाग, दो दशांश $\frac{2}{10}$ को दर्शाते हैं और इसी तरह आगे $\frac{3}{10}, \frac{4}{10} \ldots\ldots \frac{9}{10}$ दशांश लिखेंगे। यदि पूरे दस भाग को लेंगे तो क्या होगा? तब दस (10) का दशांश अर्थात् $10 \times \frac{1}{10} = 1$ (एक इकाई) हो जायेगा।

इसी प्रकार दो खंडों (इकाई) और तीन भाग (दशांश) इस प्रकार लिखा जाएगा--

इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$
2	3

1 इकाई + 1 इकाई + 1 भाग + 1 भाग + 1 भाग

यानी 2 इकाई + एक इकाई का 3 भाग

अर्थात् 2 इकाई और $\frac{3}{10}$ (दशांश) = $2\frac{3}{10}$

अर्थात् इसे $2\frac{3}{10}$ लिखेंगे। हम $2\frac{3}{10}$ को 2.3 लिख सकते हैं। इससे पता चलता है कि 2 इकाइयाँ और 3 दसवें भाग हैं। इसे **दो दशमलव तीन** पढ़ा जाएगा। इस बिन्दु (.) को **दशमलव बिन्दु** कहते हैं। दशमलव बिन्दु का इस्तेमाल करके संख्या लिखने के तरीके को **दशमलव प्रणाली** कहते हैं।

अगर इकाई के स्थान में शून्य और दसवें भाग के स्तंभ में 5 लिख दें, तो दशमलव पद्धति में यह संख्या 0.5 (शून्य दशमलव पाँच) होगी।

अब संख्या 2.3 को भिन्न के रूप में कैसे लिखेंगे? $2\frac{3}{10}$ या $\frac{23}{10}$?

यहाँ $2\frac{3}{10} = 2\times1+3\times\frac{1}{10}$

स्वयं करके देखिए

1. आप निम्न को दशमलव रूप में लिखिए–

दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$
2	3	5
3	8	1
7	3	4
5	4	6
0	0	8

2. संख्या 41.6, 52.7, 48.3, 47.9, 73.3 में इकाई, दहाई और दशांश का मान ज्ञात कीजिए।

8.3 संख्या रेखा पर निरूपण

आइए 0.6 को संख्या रेखा पर निरूपित करें। हम जानते हैं कि 0.6 शून्य से बड़ा है लेकिन एक से कम। इसमें 6 दशांश हैं। अब एक संख्या रेखा खींचें और संख्या रेखा पर 0 और 1 के बीच की लंबाई को 10 बराबर भागों में विभाजित कीजिए और उनमें से छः भाग लीजिए। जैसा कि नीचे दिखाया गया है।



अब आप 0 और 1 के बीच पाँच संख्याएँ लिखिए और उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाइए।

ऊपर 1.2 को संख्या रेखा पर दर्शाया गया है। अवलोकन कीजिए कि 1.2 में कितनी इकाई और कितने दशांश हैं तथा यह संख्या रेखा पर कहाँ स्थित है?

अब 2.3 को संख्या रेखा पर दर्शाएँ।

उदाहरण–1 : **निम्न संख्याओं को स्थानीय मान सारणी में लिखिए–**

(a) 30.6 (b) 7.2

हल : **स्थानीय मान सारणी**

संख्या	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$
30.6	3	0	6
7.2	0	7	2

उदाहरण 2 : निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) तीन इकाइयाँ और 6 दशांश

(b) बीस इकाइयाँ और 2 दशांश

हल : (a) तीन इकाइयाँ और 6 दशांश $= 3 + \frac{6}{10} = 3.6$

(b) बीस इकाइयाँ और 2 दशांश $= 20 + \frac{2}{10} = 20.2$

उदाहरण 3 : दशमलव रूप में लिखिए–

(a) $10 + 5 + \frac{2}{10}$ (b) $300 + 1 + \frac{8}{10}$

हल : (a) यहाँ 1 दहाई, 5 इकाइयाँ और दो दशांश हैं। अतः दशमलव रूप 15.2 होगा।

(b) इसमें तीन सैकड़ा, शून्य दहाई, एक इकाई और 8 दशांश है। अतः दशमलव रूप 301.8 होगा।

8.4 भिन्न, दशमलव रूप में

हम देख चुके हैं कि एक भिन्न जिसका हर 10 हो, को किस प्रकार दशमलव रूप में बदल सकते हैं। जैसे $\frac{13}{5}$ को दशमलव रूप में बदलने के लिए हर को 10 करेंगे।

अर्थात् $\frac{13}{5} = \frac{13 \times 2}{5 \times 2} = \frac{26}{10} = \frac{20}{10} + \frac{6}{10} = 2 + \frac{6}{10} = 2.6$

अतः $\frac{13}{5} = 2.6$ दशमलव रूप में होगा।

8.5 दशमलव, भिन्न रूप में

हमने देखा कि 2.6 का भिन्न रूप $\frac{13}{5}$ है। इसी प्रकार 1.3 का भिन्न रूप $= 1 + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = \frac{13}{10}$ होगा।

स्वयं करके देखिए

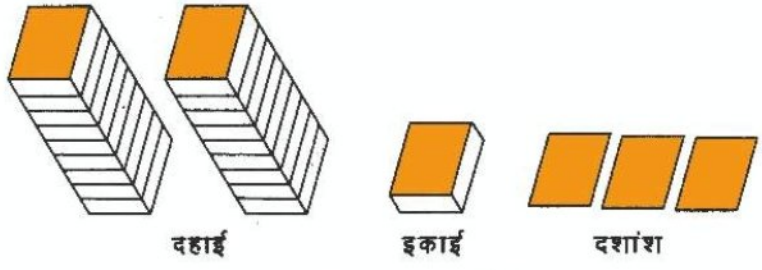
1. $\frac{9}{5}, \frac{8}{2}, \frac{4}{5}$ को दशमलव रूप में लिखिए।

2. 11.6, 9.5, 0.2 को भिन्न रूप में लिखिए।

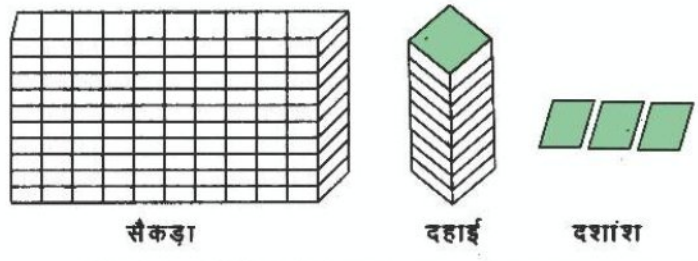
प्रश्नावली – 8.1

1. निम्न के लिए दी गई सारणी में संख्याएँ लिखिए–

(i)



(ii)



	सैकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$
(i)				
(ii)				

2. निम्न दशमलव संख्याओं का स्थानीय मान सारणी में लिखिए–

(a) 0.4 (b) 17.3 (c) 10.5 (d) 206.8

3. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) 5 दहाई 7 दशांश (b) 8 दशांश

(c) बारह दशमलव तीन (d) दो सौ और 2 इकाई

(e) पाँच सौ सात दशमलव आठ

4. निम्न को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए–

(a) $200+60+5+\frac{7}{10}$ (b) $70+8+\frac{8}{10}$ (c) $\frac{88}{10}$

(d) $4\frac{2}{10}$ (e) $\frac{3}{2}$ (f) $\frac{12}{5}$

(g) $3\frac{3}{5}$ (h) $4\frac{1}{2}$

5. निम्न दशमलव संख्याओं को भिन्न के रूप में लिखकर न्यूनतम (सरलतम) रूप में बदलिए–

(a) 0.6 (b) 2.5 (c) 1.0 (d) 3.8

(e) 13.7 (f) 21.2 (g) 6.4

6. सेमी का प्रयोग कर निम्न को दशमलव रूप में बदलिए–

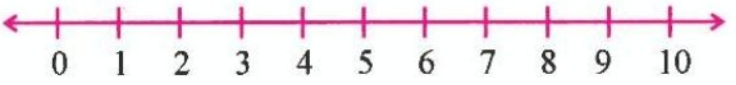
(a) 3 मिमी (b) 40 मिमी (c) 117 मिमी

(d) 3 सेमी 2 मिमी (e) 11 सेमी 53 मिमी (f) 83 मिमी

7. निम्न को संख्या रेखा पर दर्शाइए–

(a) 0.4 (b) 2.8 (c) 1.2 (d) 2.6

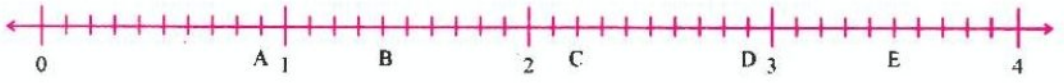
8. संख्या रेखा पर किन दो पूर्ण संख्याओं के बीच निम्न संख्याएँ स्थित है और इनमें से कौन-सी पूर्ण संख्या दी हुई दशमलव संख्या के अधिक निकट है?



(a) 0.7 (b) 2.5 (c) 6.3

(d) 5.0 (e) 1.0 (f) 6.1

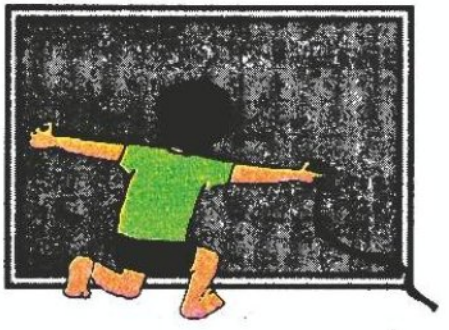
9. दी हुई संख्या रेखा पर स्थित A, B, C, D, E बिन्दुओं के लिए दशमलव संख्या लिखें और आरोही क्रम में सजाएँ।



10. (a) रघु की कॉपी की लम्बाई 8 सेमी 6 मिमी है। सेमी में इसकी लम्बाई क्या होगी?

(b) एक छोटे पौधे की लम्बाई 75 मिमी है। इसकी लम्बाई सेमी में व्यक्त कीजिए।

8.6 शतांश

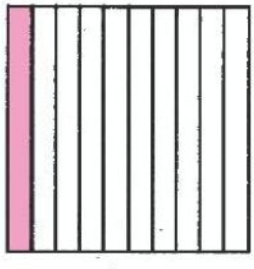


श्याम अपने कक्षा में श्यामपट्ट की लम्बाई माप रहा था। उसने मापने पर श्यामपट्ट की लम्बाई 2 मी और 25 सेमी पाई। वह इस लम्बाई को मीटर में लिखना चाहता था। क्या आप उसकी मदद कर सकते हैं?

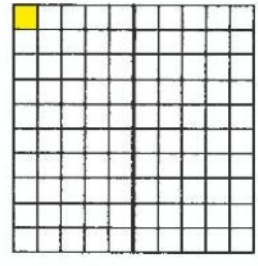
हम जानते हैं कि एक सेमी, एक मीटर का सौवाँ भाग है जिसे शतांश भी कहते हैं।

अर्थात् 1 सेमी $= \frac{1}{100}$ मी

चित्र–1 में एक वर्ग को दस बराबर भागों में बाँटा गया है। छायांकित आयत इस वर्ग का $\frac{1}{10}$ या एक दशांश या 0.1 हैं। चित्र–2 में एक वर्ग को 100 छोटे-छोटे वर्ग में बाँटा गया है। इसमें प्रत्येक छोटा वर्ग बड़े वर्ग का 100वाँ हिस्सा या $\frac{1}{100}$ या एक शतांश है।



चित्र–1



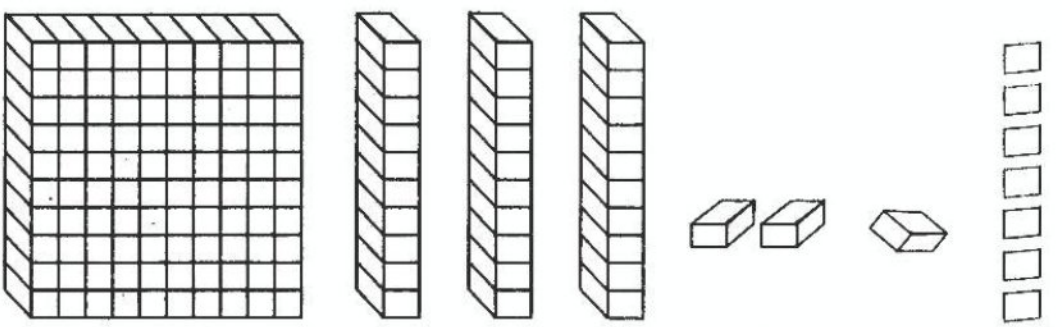
चित्र–2

दशमलव रूप में हम $\frac{1}{100} = 0.01$ लिखते हैं और इसे "शून्य दशमलव शून्य एक" पढ़ते हैं।

अब एक बड़े वर्ग के क्रमशः 7 वर्ग, 16 वर्ग, 40 वर्ग, 98 वर्ग छायांकित करें, तो वह पूरे वर्ग का कौन-सा भाग होगा?

छायांकित भाग	भिन्न संख्या	दशमलव संख्या
7 वर्ग	$\frac{7}{100}$	0.07
16 वर्ग	$\frac{16}{100}$	0.16
40 वर्ग	.....	.....
98 वर्ग	.....	.....

आगे खंडों के आधार पर स्थानीय मान सारणी बनाई गई है। आप सारणी के आधार पर संख्या को दशमलव रूप में लिख सकते हैं।



स्थानीय मान सारणी

सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश
(100)	(10)	(1)	$\left(\frac{1}{10}\right)$	$\left(\frac{1}{100}\right)$
1	3	2	1	7

अतः दशमलव में संख्या होगी $100+30+2+\frac{1}{10}+\frac{7}{100}$

$=132.17$

इसे "एक सौ बत्तीस दशमलव एक सात" पढ़ते हैं। सारणी को ध्यान से देखने पर हम पाते हैं कि जैसे-जैसे बाईं से दाईं ओर जाते हैं, हर चरण पर गुणनखंड पिछले गुणन का $\frac{1}{10}$ हो जाता है।

अतः स्वाभाविक रूप से हम स्थानीय मान को शतांश से हजारवें (सौवें का $\frac{1}{10}$) हिस्से से छोटे हिस्सों तक भी बढ़ा सकते हैं।

सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	हजारवें
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

दशमलव संख्या में दशमलव बिंदु हमेशा इकाई और दसवें स्थानों के बीच लगाया जाता है।

उदाहरण–1 : प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{8}{1000}$

हल : (a) हमें $\frac{3}{2}$ के तुल्य ऐसी भिन्न संख्या प्राप्त करनी होगी, जिसका हर 10 हो

$$\frac{3}{2}=\frac{3\times5}{2\times5}=\frac{15}{10}=\frac{10}{10}+\frac{5}{10}=1.5$$

(b) यहाँ $\frac{3}{4}$ के तुल्य एक ऐसी संख्या निकालनी है जिसका हर 10 हो। लेकिन 4 को किसी भी पूर्ण संख्या से गुणा करने पर हमें 10 प्राप्त नहीं होता है। अतः हमें हर को 100 में बदलना होगा।

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times25}{4\times25}=\frac{75}{100}=0.75$$

(c) $\frac{8}{1000}=0.008$

उदाहरण–2 : प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) $100+40+6+\frac{3}{10}+\frac{6}{100}$ (b) $58+\frac{1}{10}+\frac{7}{100}$

हल : (a) $100+40+6+\frac{3}{10}+\frac{6}{100}$

$=146+3\times\frac{1}{10}+6\times\frac{1}{100}$

$=146.36$

(b) $58+\frac{1}{10}+\frac{7}{100}$

$=58+\frac{1}{10}+7\times\frac{1}{100}$

$=58.17$

उदाहरण–3 : भिन्न में बदलकर सरलतम रूप में लिखिए–

(a) 0.05 (b) 2.75

हल : (a) $0.05=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$

(b) $2.75=2+\frac{75}{100}=2+\frac{75\div25}{100\div25}$

$=2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}$

उदाहरण–4 : प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) दो सौ चार और छः शतांश (b) सात और पन्द्रह हजारवें भाग

(c) तेरह दशमलव सात पाँच तीन

हल : (a) दो सौ चार और छः शतांश

$$= 204 + \frac{6}{100}$$

$$= 204 + 0 \times \frac{1}{10} + 6 \times \frac{1}{100} = 204.06$$

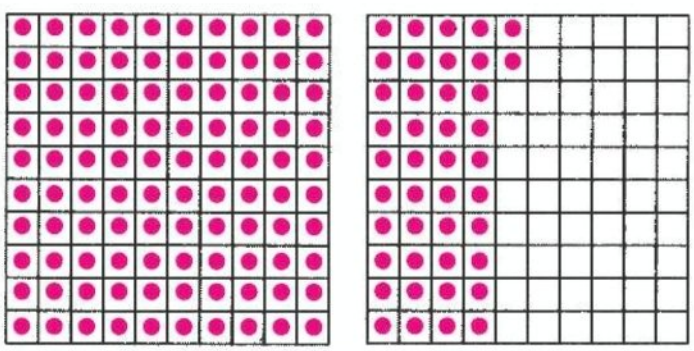
(b) सात और पन्द्रह हजारवें भाग

$$= 7 + \frac{15}{1000} = 7 + \frac{0}{10} + \frac{1}{100} + \frac{5}{1000} = 7.015$$

(c) तेरह दशमलव सात पाँच तीन

$$= 13 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000} = 13.753$$

उदाहरण–5 : तालिका को पूरा कर दशमलव रूप में लिखिए–



इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$

हल :

इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$
1	4	2

अतः संख्या 1.42 है।

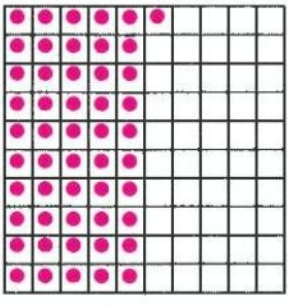
प्रश्नावली – 8.2

1. निम्न दशमलव संख्याओं को शब्दों में लिखिए –

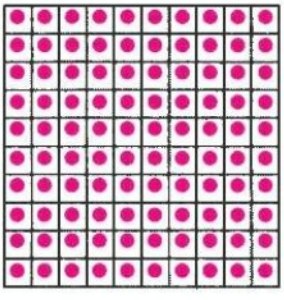
(a) 0.05 (b) 0.75 (c) 5.10

(d) 22.56 (e) 0.032 (f) 6.008

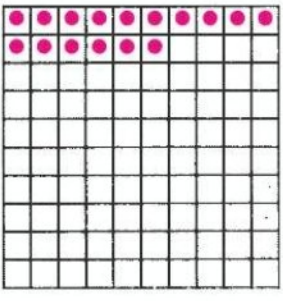
2. इन बक्सों की सहायता से सारणी को पूरा कर दशमलव रूप में लिखिए–



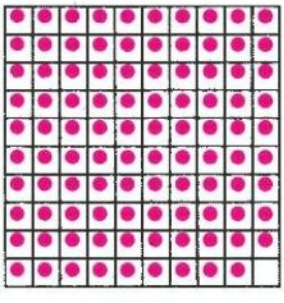
(a)



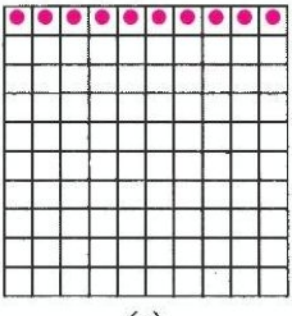
(b)



(c)



(d)



(e)

	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$	अंक
(a)				
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				

3. स्थानीय मान सारणी को देखकर दशमलव रूप में लिखिए–

स्थानीय मान	सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	हजारवाँ
	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
(a)	2	1	1	9	0	2
(b)	0	0	2	3	4	0
(c)	0	4	0	0	1	5
(d)	0	1	2	3	4	2
(e)	4	7	2	9	6	0

4. निम्न दशमलवों को स्थानीय मान सारणी बनाकर लिखिए–

(a) 0.18 (b) 3.07 (c) 26.70

(d) 125.36 (e) 186.186

5. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए–

(a) $10+9+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$ (b) $11+\frac{5}{100}$

(c) $\frac{6}{10}+\frac{7}{100}+\frac{3}{1000}$ (d) $25+\frac{3}{10}+\frac{5}{1000}$

(e) $700+50+6+\frac{8}{100}$

6. जिस प्रकार 0.16 दो दशमलव संख्याओं 0.1 और 0.2 के बीच स्थित है, उसी प्रकार निम्न संख्याएँ किन दो दशमलव संख्याओं के बीच हैं?

(a) 0.05 (b) 0.15 (c) 0.19

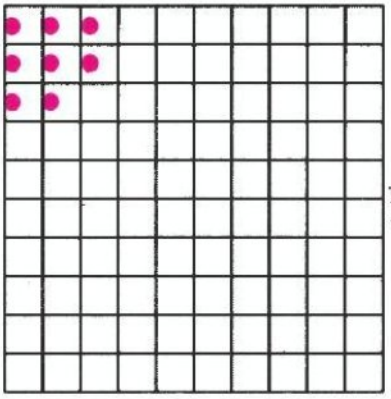
(d) 0.33 (e) 0.92 (f) 0.67

7. भिन्न संख्या में बदलिए–

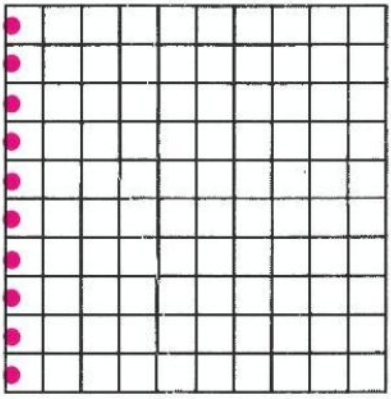
(a) 0.50 (b) 0.05 (c) 0.75 (d) 0.125

8.7 दशमलव संख्या की तुलना

हम स्थानीय मान सारणी में देख चुके हैं कि जैसे-जैसे बाईं से दाईं ओर जाते हैं तो प्रत्येक चरण पिछले का $\frac{1}{10}$ हो जाता है। अर्थात् इकाई स्थान के दाईं ओर दशमलव के बाद का पहला अंक पूर्ण का दसवाँ हिस्सा होता है तथा दूसरा अंक पूर्ण का सौवाँ हिस्सा। नीचे के चित्र को देखें –



$\frac{8}{100} = 0.08$



$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

$= 0.1$

इस प्रकार $0.1 > 0.08$

आइए अब संख्या 105.66 और संख्या 105.63 को लें। यहाँ हम सबसे पहले पूर्ण भाग को देखते हैं और पाते हैं कि दोनों संख्याओं के पूर्ण भाग समान हैं। अब इसके दशांश भाग की तुलना करते हैं, ये भी समान हैं। अब इसके शतांश भाग की तुलना करते हैं तो पाते हैं कि 105.66 में 6 शतांश है जबकि 105.63 में 3 शतांश है। अर्थात् 6>3

अतः 105.66 > 105.63

उदाहरण 1 : **कौन सी संख्या बड़ी है?**

(a) 1 या 0.99 (b) 2.09 या 2.093

हल : (a) $1 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100}$

तथा $0.99 = 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100}$

स्पष्ट है $1 > 0.99$

(b) $2.09 = 2 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{0}{1000}$

$2.093 = 2 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000}$

स्पष्ट है दोनों संख्याओं के शतांश स्थान तक के सभी अंक समान है। परन्तु 2.093 के हजारवें में अंक 3 है जो 2.09 के हजारवें में अंक 0 से बड़ा है।

अतः $2.093 > 2.09$

प्रश्नावली – 8.3

1. कौन-सी संख्या बड़ी है? कारण भी लिखिए–

(a)	0.2 या 0.3	(b)	0.07 या 0.05
(c)	2 या 0.9	(d)	0.4 या 0.04
(e)	1.32 या 1.3	(f)	0.099 या 0.199
(g)	1.6 या 1.60	(h)	5.54 या 5.504

2. पाँच और दशमलव संख्या के युग्म लिखकर उनमें से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए।

8.8 दशमलव का प्रयोग

8.8.1 रुपया-पैसा

हम जानते हैं कि 100 पैसा = 1 रुपया

अतः 1 पैसा = $\frac{1}{100}$ रुपया = 0.01 रुपया

इसी प्रकार 8 पैसे $= \frac{8}{100} = 0.08$ रुपया

तथा 65 पैसे $= \frac{65}{100} = 0.65$ रुपया

स्वयं प्रयास कीजिए

1. 105 पैसे कितने रूपये होंगे?
2. 2 रुपये 5 पैसे और 2 रुपये 50 पैसों को दशमलव में लिखिए।
3. 15 रुपये 25 पैसे और 75 रुपये 75 पैसे को दशमलव में लिखिए।

8.8.2 लम्बाई

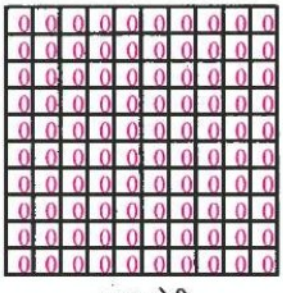
रीया ने अपनी मेज की ऊपरी सतह की लम्बाई मापने पर 138 सेमी पायी। इसकी लम्बाई मीटर में कितनी होगी। चित्र द्वारा इसे समझें।

हम जानते हैं 1 सेमी $= \frac{1}{100}$ मी

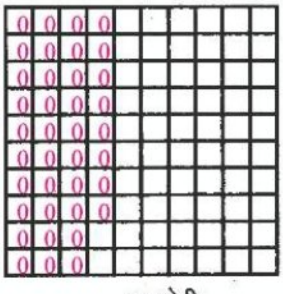
$= 0.01$ मी

अतः 38 सेमी $= \frac{38}{100}$ मी

$= 0.38$ मी



100 सेमी
= 1 मी



38 सेमी
$= \frac{38}{100}$ मी

138 सेमी $= 100$ सेमी $+ 38$ सेमी

$= 1$ मी $+ \frac{38}{100}$ मी

$= 1$ मी $+ .38$ मी

स्वयं करके देखिए

1. 2 मी और 28 सेमी को दशमलव का प्रयोग कर मीटर में लिखिए।
2. 7 सेमी 6 मिमी को दशमलव का प्रयोग कर सेमी में लिखें।
3. 62 मी को दशमलव का प्रयोग करके किमी में लिखिए। (1 किमी = 1000 मी)

8.8.3 वजन या भार

हम जानते हैं कि 1000 ग्राम = 1 किग्रा

अतः 1 ग्राम = $\frac{1}{1000}$ किग्रा

= 0.001 किग्रा

अब, 1352 ग्राम को किग्रा में कैसे बदलेंगे?

1352 ग्राम = 1000 ग्राम + 352 ग्राम

= $\frac{1000}{1000}$ किग्रा + $\frac{352}{1000}$ किग्रा

= 1.352 किग्रा

स्वयं करके देखिए

1. 2500 ग्राम को दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में लिखिए।
2. 9 ग्राम को दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में लिखिए।

प्रश्नावली – 8.4

1. दशमलव का प्रयोग कर रुपयों में बदलिए :

(a) 5 पैसे (b) 50 पैसे (c) 725 पैसे

(d) 3 रुपये 30 पैसे (e) 50 रुपये 45 पैसे

2. दशमलव का प्रयोग कर मीटर में व्यक्त कीजिए :

(a) 25 सेमी (b) 3 सेमी (c) 217 सेमी

(d) 1 मी 35 सेमी (e) 829 सेमी

3. दशमलव का प्रयोग कर सेमी में बदलिए :

(a) 7 मिमी (b) 60 मिमी (c) 154 मिमी

(d) 9 सेमी 5 मिमी (e) 99 मिमी

4. दशमलव का प्रयोग कर किमी में लिखिए :

(a) 6 मी (b) 66 मी

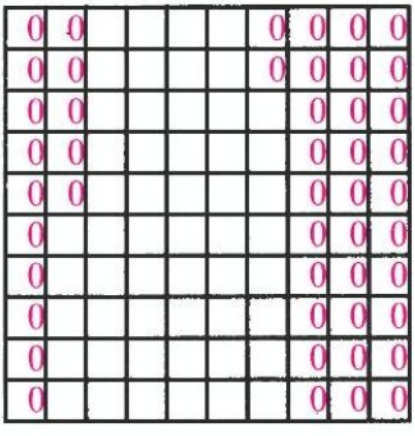
(c) 2222 मी (d) 75 किमी 7 मी

5. दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में लिखिए :

(a) 2 ग्राम (b) 20 ग्राम (c) 200 ग्राम

(d) 2000 ग्राम (e) 4 किग्रा 8 ग्रा

8.9 दशमलव संख्याओं का जोड़



0.15 और 0.32 को कैसे जोड़ेंगे? एक वर्ग लेकर उसे 100 समान भागों में बाँटिए।

इस वर्ग में 0.15 को दर्शाने के लिए 1 दशांश और 5 शतांश को रंगते हैं। फिर इसी वर्ग में 0.32 को दिखाने के लिए 3 दशांश और 2 शतांश को रंगते हैं। अवलोकन से स्पष्ट है कि वर्ग में कुल (जोड़) 4 दशांश और 7 शतांश रंगे भाग हैं।

अतः $0.15 + 0.32 = 0.47$

इस प्रकार जैसे हम पूर्ण संख्याओं को जोड़ते हैं, ऐसे ही दशमलव संख्याओं को भी जोड़ सकते हैं।

क्या अब आप 0.78 और 0.64 को जोड़ सकते हैं?

	इकाई	दशांश	शतांश
	0	7	8
+	0	6	4
=	1	4	2

अतः $0.78 + 0.64 = 1.42$

स्वयं करके देखिए

(a) 0.47 + 0.32 (b) 0.78 + 0.96

(c) 0.5 + 0.05 (d) 1.34 + 2.30

(e) 3.45 + 4.55 (f) 9.50 + 2.50

उदाहरण–1 :लता ने 12.50 रुपये का एक किताब खरीदा और 4.75 रुपये की एक कॉपी खरीदी। उसने कुल कितने रुपये खर्च किये?

हल : किताब पर खर्च = 12.50 रुपये

कॉपी पर खर्च = 4.75 रुपये

कुल खर्च = 12.50 रुपये

\+ 4.75 रुपये

= 17.25 रुपये

उदाहरण–2 :शर्मिला पटना घुमने गई तो उसने 15 किमी 32 मी की दूरी ट्रेकर से, 3 किमी 160 मी टेम्पों से और शेष 1 किमी 15 मी पैदल तय की। उसने कुल कितनी दूरी तय की?

हल : ट्रेकर द्वारा तय की गई दूरी = 15 किमी 32 मी

= 15.032 किमी

टेम्पो द्वारा तय की गई दूरी = 3 किमी 160 मी

= 3.160 किमी

पैदल तय की गई दूरी = 1 किमी 15 मी

= 1.015 किमी

15.032 किमी

कुल तय की गई दूरी है = + 3.160 किमी

+ 1.015 किमी

19.207 किमी

उदाहरण–3 : प्रशांत ने सरस्वती पूजा के लिए 4 किग्रा 9 ग्रा. लड्डू, 2 किग्रा 60 ग्राम जलेबी और 5 किग्रा 300 ग्राम फल खरीदे। खरीदे गए कुल सामग्री का वजन कितना था?

हल : लड्डू का वजन = 4 किग्रा 9 ग्रा

= 4.009 किग्रा

जलेबी का वजन = 2 किग्रा 60 ग्रा = 2.060 किग्रा

फलों का वजन = 5 किग्रा 300 ग्रा = 5.300 किग्रा

अतः सामग्रियों का कुल वजन है :

4.009 किग्रा

+ 2.060 किग्रा

+ 5.300 किग्रा

11.369 किग्रा

प्रश्नावली – 8.5

1. निम्न में से प्रत्येक का जोड़ ज्ञात करें :

(i) 0.35 + 9.425 + 27

(ii) 0.003 + 6.2 + 15.02

(iii) 15 + 0.345 + 11.2

(iv) 26.025 + 0.44 + 0.004

2. राधा की माँ ने उसे 15.75 रुपये दिये और पिता ने 16.25 रुपये दिये। उसके माता-पिता द्वारा दिया गया कुल धन ज्ञात कीजिए।
3. उमा ने परदे के लिए 15 मी 25 सेमी कपड़ा खरीदा और रमा ने 16 मी 85 सेमी कपड़ा खरीदा। दोनों के द्वारा खरीदें गये कुल कपड़े की लम्बाई ज्ञात करें।
4. मोहन ने 45.25 रुपये खर्च किये और शेष 30.85 रुपये बचे, तो उसके पास कुल कितने रुपये थे।
5. सकीला सुबह में 2 किमी 25 मी चलती है और शाम में 1 किमी 9 मी चलती है। वह कुल कितनी दूरी चलती है।
6. रमेश के घर और उसके मित्र के घर की दूरी पता करें यदि वह 12 किमी 168 मी की दूरी बस से, 5 किमी 7 मी की दूरी कार से और 400 मी की दूरी पैदल तय करता हो।
7. एक विद्यालय के मध्याह्न भोजन में 10 किग्रा 400 ग्रा चावल, 2 किग्रा 200 ग्रा दाल और, 5 किग्रा 750 ग्रा आलू का उपयोग हुआ, तो उपयोग की गई कुल सामग्रियों का वज़न ज्ञात कीजिए।

8.10 दशमलव संख्याओं का घटाव

घटाने में भी (जोड़ की तरह) शतांश में से शतांश स्थान का अंक, दशांश में से दशांश स्थान का अंक और इकाई में से इकाई अंक और आगे इसी प्रकार घटाते हैं।

निम्न सारणी को देखें

	इकाई	दशांश	शतांश
	2	6	9
−	1	4	3
	1	2	6

स्पष्ट है 2.69 − 1.43 = 1.26

स्वयं करके देखिए

1. 4.32 में से 1.20 घटाएँ
2. 6.46 में से 3.85 घटाएँ
3. 1.39 में से 0.95 घटाएँ
4. 5.68 में से 1.25 घटाएँ

उदाहरण–1 अन्नु के पास 9.35 रुपये हैं। वह 2.30 रुपये की टॉफी खरीदता है। अब उसके पास कितने रुपये शेष बचे?

हल : कुल धन = 9.35 रुपये

टॉफी पर किया गया खर्च = 2.30 रुपये

शेष धन = 9.35 रुपये
− 2.30 रुपये

= 7.05 रुपये

प्रश्नावली – 8.6

1. बड़ी दशमलव भिन्न में से छोटी दशमलव भिन्न को घटाइए–

(a) 4.21 एवं 2.21 (b) 1.23 एवं 2.12

(c) 2.04 एवं 2.01 (d) 1.2 एवं 1.002

(e) 2.45 एवं 2.456 (f) 2 एवं 1.5

2. हल करें–

(a) 1.23 – 0.23 (b) 2.45 – 2.45

(c) 3.40 – 3.04 (d) 2.004 – 1.999

(e) 4 – 1.6 (f) 2.3 – 2

3. शालिनी की उम्र 12.5 वर्ष है, अकबर की उम्र 10.25 वर्ष है, दोनों में से कौन छोटी उम्र का है और कितना?

4. पलक ने भाषा में 62.23 प्रतिशत एवं मौली ने उसी विषय में 60.23 प्रतिशत अंक प्राप्त किये। पलक ने मौली से कुल कितने प्रतिशत अधिक अंक प्राप्त किये।

5. अफशाना 50 रु. लेकर बाजार जाती है। वह 12.50 रु. की पुस्तक, 8.50 रु. की कॉपी एवं 2.25 रु. की लीड खरीदती है। अब उसके पास शेष कितना रुपया बचा रहता है?

'पर्यावरण एवं वन विभाग, बिहार सरकार'
बिहार पृथ्वी दिवस (9 अगस्त) के अवसर पर 11 सूत्री संकल्प।

मैं संकल्प लेता / लेती हूँ कि

1. पृथ्वी के संरक्षण तथा पर्यावरण संतुलन को बनाये रखने के लिए सदैव कार्य करूँगा।
2. वर्ष में कम से कम एक पौधा अवश्य लगाऊँगा, इसे बचाऊँगा तथा पेड़–पौधों के संरक्षण में सहयोग करूँगा।
3. तालाब, नदी एवं पोखर आदि को प्रदूषित नहीं करूँगा।
4. जल का दुरुपयोग नहीं होने दूँगा एवं इस्तेमाल के तुरंत बाद सावधानीपूर्वक नल को बंद करूँगा।
5. बिजली का अनावश्यक उपयोग नहीं करूँगा तथा आवश्यकता नहीं रहने पर बिजली के बल्ब, पंखा एवं अन्य उपकरणों को बंद रखूँगा।
6. कूड़ा–कचरा को निर्धारित स्थानों पर रखे डस्टबिन में डालूँगा तथा अन्य लोगों से भी इसके लिए अनुरोध करूँगा।
7. अपने घर तथा स्कूल को साफ रखूँगा।
8. प्लास्टिक/पॉलीथीन का उपयोग बंद कर इसके स्थान पर कपड़े या कागज के बने झोलों/थैलों का उपयोग करूँगा।
9. पशु–पक्षियों के प्रति दया का भाव रखूँगा।
10. नजदीक के कार्यों के लिए साइकिल का उपयोग करूँगा अथवा पैदल जाऊँगा।
11. आवश्यकतानुसार कागज का उपयोग करूँगा तथा इसका दुरुपयोग नहीं होने दूँगा।

अध्याय-9

आँकड़ों का प्रयोग

9.1 भूमिका

आपने अपने शिक्षक को कक्षा में रजिस्टर पर प्रतिदिन उपस्थिति बनाते अवश्य ही देखा होगा। क्या आपने कभी सोचा कि इससे हम क्या-क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? हम एक उदाहरण लेकर विचार करें। किसी सप्ताह में, एक कक्षा के 50 विद्यार्थियों की उपस्थिति नीचे सारणी में दर्शाई जा रही है–

दिन	उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या
सोमवार	45
मंगलवार	50
बुधवार	40
बृहस्पतिवार	29
शुक्रवार	35
शनिवार	25

अब आप सप्ताह में विद्यार्थियों की संख्या के आधार पर बताएँ कि (1) किस दिन सबसे कम उपस्थिति रही? (2) सबसे अधिक उपस्थिति किस दिन रही? (3) आप यह भी ज्ञात कर सकते हैं कि विद्यार्थियों की कक्षा में उपस्थिति 30 से अधिक कितने दिन रही।

अतः आप विद्यार्थियों की उपस्थिति से सम्बन्धित कई महत्त्वपूर्ण बातों का पता लगा सकते हैं।

इसी प्रकार अपने दैनिक जीवन में निर्णय लेते समय हमें कुछ-न-कुछ पुराने अनुभवों की आवश्यकता होती है। आपने इस सब से सम्बन्धित अनेक प्रकार की सारणियाँ (Tables) भी देखी होंगी। ये सारणियाँ आँकड़े (Data) एकत्रित करने और संक्षेप में उपलब्ध कराने का साधन हैं।

9.2 आँकड़ों को प्रदर्शित करना

कक्षा का आज पहला दिन था, सभी बच्चे उत्साहित थे, नई किताबें, नई कक्षा सभी बच्चे अपने दोस्तों से बातचीत कर रहे थे। इतने में शिक्षक ने कक्षा में प्रवेश किया। कक्षा का ऐसा माहौल देख शिक्षक ने बच्चों से पूछा चलो बताओ आज क्या पढ़ना चाहोगे?

बच्चों की ओर से अलग-अलग आवाजें आने लगीं। कोई बोला अंग्रेजी तो कोई विज्ञान, किसी ने गणित कहा तो कोई हिन्दी पढ़ने की बात करने लगा।

शिक्षक जी सोच में पड़ गए। कैसे तय करूँ? तभी उन्हें एक उपाय सूझा, उन्होंने ब्लैकबोर्ड पर सभी बच्चों का नाम लिखा और सामने वह विषय, जो वे उस समय पढ़ना चाहते हैं, लिखने को कहा। सारणी इस प्रकार बनी–

क्र. सं.	विद्यार्थी का नाम	अभी कौन-सा विषय पढ़ें?
1	कमल	गणित
2	रमेश	हिन्दी
3	रीता	गणित
4	मोईन	विज्ञान
5	मनजीत	अंग्रेजी

क्र. सं.	विद्यार्थी का नाम	पसंदीदा विषय
6	रोशन	हिन्दी
7	मोनिका	विज्ञान
8	ट्विंकल	अंग्रेजी
9	बीरम	विज्ञान
10	किशोर	हिन्दी
11	आतिफ	विज्ञान
12	नीतीश	हिन्दी
13	कालू लाल	अंग्रेजी
14	राजेश	हिन्दी
15	बलवंत	गणित
16	रुचि	विज्ञान
17	गरिमा	हिन्दी
18	लक्ष्मण	गणित
19	आरिफ	हिन्दी

सारणी के आधार पर शिक्षक ने प्रश्न किया कि क्या अब हम तय कर सकते हैं हमें कौन-सा विषय पढ़ना चाहिए? बच्चे सोचने की कोशिश कर रहे थे कि कैसे तय करें।

तभी रोशन को एक विचार सूझा। उसने ब्लैकबोर्ड पर खाली जगह में विषयों के नाम लिखे और उसके सामने वे बच्चों के नाम लिखे–

क्र. सं.	विद्यार्थी के नाम
गणित	कमल, रीता, बलवन्त, लक्ष्मण
हिन्दी	रमेश, रोशन, किशोर, नीतीश, राजेश, गरिमा, आरिफ
विज्ञान	मोईन, मोनिका, बीरम, आतिफ, रुचि
अंग्रेजी	मनजीत, ट्विंकल, कालू लाल

किशोर सारणियों को बार-बार देख रहा था और सोच रहा था कि इन सारणियों में नाम लिखने का क्या मतलब है? हमें तो मात्र यह गिनना है कि माँगी गई जानकारी के पक्ष में कितने विद्यार्थी हैं? नाम न लिखकर उसके स्थान पर संकेत का भी उपयोग किया जा सकता है।

क्या आप किशोर की सोच से सहमत हैं? क्या ऐसा कोई तरीका सोच सकते हैं, जिसमें नाम के स्थान पर केवल किसी चिह्न का उपयोग करके ही गणना की जा सके?

इसके तुरंत बाद राजेश ने एक सुझाव दिया कि क्यों न प्रत्येक नाम के स्थान पर एक-एक खड़ी लकीर का उपयोग किया जाए और अन्त में सभी खड़ी लकीरों की गिनती कर ली जाए। सभी विद्यार्थी इस सुझाव से सहमत थे।

विषय	टैली चिह्न (खड़ी लकीर)
गणित	||||
हिन्दी	||||| ||
विज्ञान	|||||
अंग्रेजी	||||

इस तालिका के आधार पर कैसे पता करें कि अभी कौन-सा विषय पढ़ना चाहिए?

खेलों की लोकप्रियता का क्रम पता करने के लिए एक शिक्षक ने इसकी सूचना पूरे स्कूल में एकत्रित करने का कार्य रीता को सौंपा है, रीता ने बोर्ड पर 4 खेलों के नाम लिखे और अपने-अपने पसंद के खेल के सामने प्रत्येक विद्यार्थी को खड़ी लकीर खींचने को कहा।

सारणी कुछ इस प्रकार बनी –

खेल का नाम	टैली चिह्न (खड़ी लकीर)	विद्यार्थियों की संख्या
फुटबॉल	||||||||||||||||||	18
क्रिकेट	||||||||||||||||||||||	22
वॉलीबॉल	|||||||||||||	14
कबड्डी	||||||||||||||||	16

उपर्युक्त सारणी को देखकर कक्षा के दूसरे विद्यार्थी सुनील ने कहा कि विद्यार्थियों को गिनने के लिए चिह्नों (।) को दस-दस के समूहों में निम्न प्रकार व्यवस्थित कर सकते हैं–

खेल का नाम	टैली चिह्न (खड़ी लकीर)	विद्यार्थियों की संख्या
फुटबॉल	।।।।।।।।।। ।।।।।।।।	18
क्रिकेट	।।।।।।।।।। ।।।।।।।।।। ।।	22
वॉलीबाल	।।।।।।।।।। ।।।।	14
कबड्डी	।।।।।।।।।। ।।।।।।	16

गिनने की समस्या देख शेखर ने इसको और अधिक सरल बनाने के लिए सुनील से कहा कि वह दस-दस के समूहों के स्थान पर पाँच-पाँच के समूह बनाए, जैसा नीचे दिखाया जा रहा है–

खेल का नाम	टैली चिह्न (खड़ी लकीर)	विद्यार्थियों की संख्या
फुटबॉल	।।।।। ।।।।। ।।।।। ।।।	18
क्रिकेट	।।।।। ।।।।। ।।।।। ।।।।। ।।	22
वॉलीबाल	।।।।। ।।।।। ।।।।	14
कबड्डी	।।।।। ।।।।। ।।।।। ।	16

शिक्षक ने सुझाव दिया कि पाँच-पाँच के प्रत्येक समूह में पाँचवाँ चिह्न एक तिरछी रेखा के रूप में प्रयोग किया जाए, ऐसे ' 𝍸 इन चिह्नों को मिलान चिह्न (Tally marks) कहते हैं। इस प्रकार 𝍸 ।।। यह दर्शाता है कि गिनने पर यह पाँच जमा तीन (अर्थात आठ) है। और 𝍸 𝍸 यह दर्शाता है कि यह पाँच जमा पाँच (अर्थात् दस) है।

इसके साथ उपर्युक्त सारणी निम्न प्रकार की दिखती है–

खेल का नाम	टैली चिह्न (खड़ी लकीर)	विद्यार्थियों की संख्या
फुटबॉल	𝍸 𝍸 𝍸 III	18
क्रिकेट	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	22
वॉलीबाल	𝍸 𝍸 IIII	14
कबड्डी	𝍸 𝍸 𝍸 I	16

प्रवीण ने अपने जन्म दिन पर कक्षा VI के 25 बच्चों को उनकी पसंद के उपहार देना तय किया। सभी को चार उपहारों पेन, गेंद, कार, बाक्स में से एक उपहार चुनना था। चार टोकरियों में हरेक को अपनी पसंद की गोटी डालनी थी। इससे जो आँकड़े मिले उनसे मिलान चिह्नों का प्रयोग कर प्रवीण ने एक सारणी तैयार की–

उपहार का नाम	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों के सेट
पेन	𝍸 III	8
गेंद	𝍸	5
कार	III	3
बॉक्स	𝍸 IIII	9

(i) किस उपहार को कक्षा VI के सबसे ज्यादा बच्चों ने पसंद किया?

(ii) किस उपहार को कक्षा VI के सबसे कम बच्चों ने पसंद किया?

(iii) पेन पसंद करने वाले विद्यार्थी कितने हैं?

इन्हें कीजिए

1. अपनी कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा गणित विषय में प्राप्त अंक पता कीजिए और उन्हें एक सारणी के रूप में निरूपित कीजिए।

प्राप्तांक	मिलान चिह्न	प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या

पता कीजिए

– सबसे अधिक प्राप्तांक कितने थे और यह कितने बच्चों को मिले?

2. अपनी कक्षा VI के सभी विद्यार्थियों का जन्म कौन-से महीने में हुआ है पता कीजिए और उसे एक सारणी के रूप में निरूपित कीजिए। अब ज्ञात कीजिए–

(अ) कौन-से महीने में सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

(ब) किस महीने में सबसे कम विद्यार्थियों का जन्म हुआ?

(स) ऐसे कौन-कौन से महीने हैं, जिनमें जन्म लेने वाले विद्यार्थियों की संख्या समान है?

9.3 चित्रालेख (Pictograph)

किसी विद्यालय के एक सप्ताह में 25 विद्यार्थियों वाली एक कक्षा में अनुपस्थित रहने वाले विद्यार्थियों की संख्या निम्न प्रकार से प्रदर्शित की गई है–

दिन	चित्र	अनुपस्थित विद्यार्थी
सोमवार		
मंगलवार		
बुधवार		
बृहस्पतिवार		
शुक्रवार		
शनिवार		

अनुपस्थित विद्यार्थी = 

किस दिन अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या सबसे अधिक है? किस दिन अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या सबसे कम है? क्या ऐसा भी कोई दिन है, जिस दिन एक भी छात्र अनुपस्थित नहीं है?

आप उपर्युक्त आलेख को देखकर इन प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं। इसमें प्रयुक्त चित्र आँकड़ों को समझने में आपकी सहायता करते हैं। इसमें चित्रों को देखकर आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं। इसे हम **चित्रालेख (Pictograph)** कहते हैं।

चित्रालेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भाग अथवा उसके प्रतीक के रूप में निरूपित करता है।

इन्हें कीजिए–

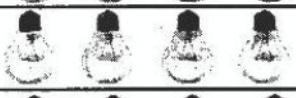
पत्रिकाएँ एवं समाचार पत्रों में प्रकाशित चित्रालेखों को एकत्रित कर अपनी कक्षा में प्रदर्शित कीजिए। यह समझने का प्रयत्न कीजिए कि ये चित्रालेख क्या-क्या दर्शाते हैं?

एक चित्रालेख द्वारा दी गई सूचनाओं को समझने के लिए कुछ अभ्यास।

9.3.1 चित्रालेख की व्याख्या–

उदाहरण–1 : एक सप्ताह के विभिन्न दिवसों में बल्ब की बिक्री नीचे दर्शाई गई है–

(1 बल्ब = )

दिनों का नाम	बिक्री हुए बल्बों की संख्या
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	
शनिवार	
रविवार	

चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) शुक्रवार को कितने बल्ब बेचे गए?

(b) किस दिन बेचे गए बल्बों की संख्या अधिकतम थी और यह कितनी थी?

(c) यदि एक बल्ब 8 रु. में बेचा गया हो, तो रविवार को कुल कितने की बिक्री हुई?

(d) आप पूरे सप्ताह में हुई कुल बिक्री बल्बों में और प्राप्त रुपयों में ज्ञात करें।

(e) यदि एक बड़े डिब्बे में 7 बल्ब आते हैं, तो इस सप्ताह कितने बड़े डिब्बों की आवश्यकता पड़ी?

हल : (a) शुक्रवार को बेचे गए बल्बों की संख्या 4 है।

(b) शनिवार को बेचे गए बल्बों की संख्या सबसे अधिक थी। उस दिन 9 बल्ब बिके।

(c) रविवार को बेचे गए बल्बों की संख्या 4 है।

8 रु. प्रति बल्ब के दर से 4 बल्बों की कीमत = (4 x 8) रु. = 32 रु.। अतः रविवार को कुल 32 रु. की बिक्री हुई।

(d) पूरे सप्ताह में कुल 35 बल्बों की बिक्री हुई और इनसे प्राप्त रुपये 35×8 = 280 रु. हैं।

(e) 7 बल्ब रखने के लिए 1 डिब्बे की आवश्यकता है।

इस प्रकार 35 बल्ब रखने के लिए 35 ÷ 7 = 5 डिब्बों की आवश्यकता होगी।

उदाहरण–2 : सात गाँवों में पशुओं की कुल संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा दर्शाई गई है–

(एक चित्र–  = 10 पशु)

गाँव	पशुओं की संख्या
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	

(a) किस गाँव में पशुओं की संख्या सबसे कम है?

(b) गाँव F में पशुओं की संख्या, गाँव B में पशुओं की संख्या से कितनी अधिक है?

(c) क्या गाँव A और गाँव D में पशुओं की संख्या गाँव G में पशुओं की संख्या के बराबर है?

(d) सभी गाँवों में पशुओं की कुल संख्या बताइए।

हल :

(a) गाँव D में पशुओं की संख्या सबसे कम 40 है।

(b) गाँव F में पशुओं की संख्या गाँव B में पशुओं की संख्या से 150-80 = 70 अधिक है।

(c) गाँव A और गाँव D में पशुओं की कुल संख्या = 60 + 40 = 100 है।
यह गाँव G में पशुओं की संख्या के बराबर है।

(d) सभी गाँवों में पशुओं की कुल संख्या = 60 + 80 + 120 + 40 + 80 + 150 + 100 = 630 है।

प्रश्नावली – 9.1

(1) एक कक्षा के 20 छात्रों ने गणित की जाँच परीक्षा में निम्नलिखित अंक प्राप्त किए।

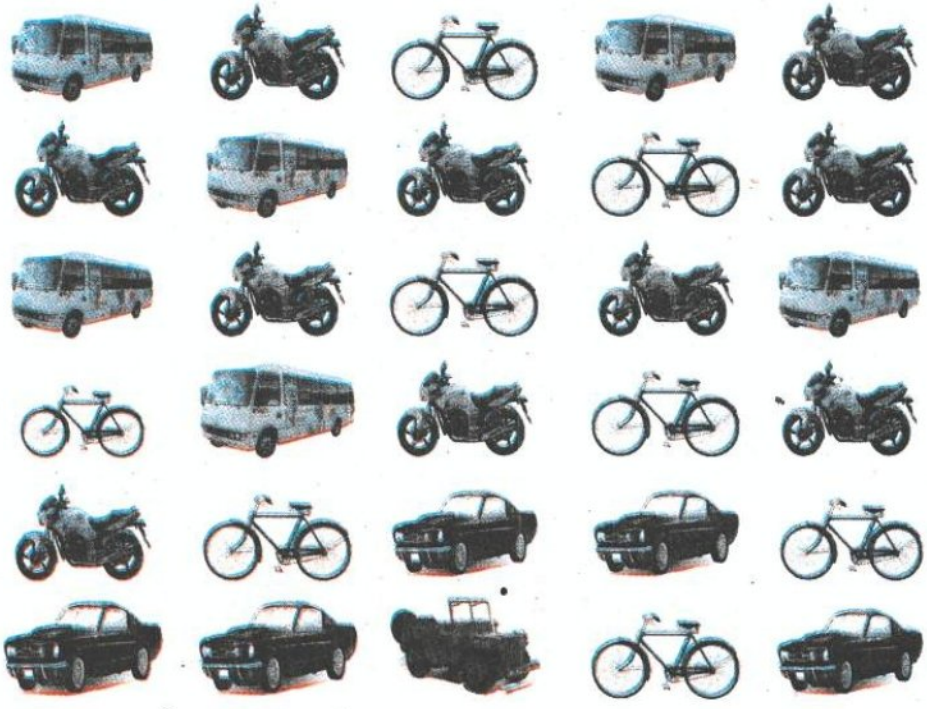
3, 2, 5, 4, 0, 7, 2, 3, 5, 2, 2, 7, 8, 4, 1, 0, 3, 2, 5, 4

इन प्राप्तांकों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करके एक सारणी के रूप में व्यवस्थित कीजिए।

(a) ज्ञात कीजिए कि कितने छात्रों ने 5 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए?

(b) कितने छात्रों ने 4 से कम अंक प्राप्त किए?

(2) **कक्षा VI के 30 विद्यार्थियों को जो-जो वाहन पसंद है, उनके चित्र नीचे दिए गए हैं–**



(a) वाहनों के चित्रों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए एक सारणी में व्यवस्थित कीजिए।

(b) कौन-सा वाहन विद्यार्थियों द्वारा अधिक पसंद किया गया?

(3) राधा ने एक पासा (dice) लिया। उसने पासे को 20 बार उछाला और प्रत्येक बार प्राप्त संख्या को निम्न प्रकार लिखा–

3 4 6 1 5 6 2 3 5 2

मिलान चिह्नों का प्रयोग करके एक सारणी बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखिए–

(a) न्यूनतम बार आने वाली संख्या यह संख्या कितनी बार आई?

(b) अधिकतम बार आने वाली संख्या यह संख्या कितनी बार आई?

(c) समान बार आने वाली संख्याएँ।

(4) सारणी को पूरा कीजिए–

क्र. सं.	भोजन रुचि	मिलान चिह्न	लोगों की संख्या
(a)	केवल रोटी	𝍸 | |	7
(b)	केवल चावल	𝍸 𝍸 | |	12
(c)	दाल और चावल दोनों	.....	16
(d)	रोटी और चावल दोनों	.....	14

(5) कक्षा VI के 30 विद्यार्थियों ने अपने-अपने परिवार में सदस्यों की संख्या को एक साथ लिखा। यह संख्या नीचे दर्शाई गई है:

4 6 7 6 5 4 3 6 7 6 4 6 5 5 7

7 4 5 6 4 6 5 4 7 5 3 6 4 5 3

मिलान चिह्नों का प्रयोग करके एक सारणी बनाइए। अब, ज्ञात कीजिए–

(a) कितने परिवार ऐसे हैं जिनमें सदस्य संख्या 7 है?

(b) कितने ऐसे हैं जिनमें सदस्य संख्या 3 है?

(c) कौन-सी सदस्य संख्या सबसे अधिक परिवारों की है?

(6) किसी सप्ताह में एक फैक्टरी द्वारा निर्मित कलमों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित है–

 = 1000 कलमें

दिन	
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	
शनिवार	

ज्ञात कीजिए–

(a) किस दिन न्यूनतम कलमें निर्मित की गईं? यह सख्या कितनी है?

(b) किस दिन निर्मित कलमों की संख्या अधिकतम थी? यह कितनी कलमें थीं?

(c) इस सप्ताह निर्मित कलमों की कुल संख्या कितनी है?

(7) गया शहर के एक सब्जी बाजार में 6 सब्जी विक्रेताओं द्वारा बेची गई सब्जी की टोकरियों की संख्या निम्न चित्रालेख में प्रदर्शित है–

 = 5 टोकरियाँ

मोहन	
अनवर	
नरेश	
गोपाल	
सुरेश	

इस चित्रालेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) किस सब्जी विक्रेता ने अधिकतम सब्जी की टोकरियाँ बेचीं? उसने कितनी टोकरियाँ बेचीं?

(b) नरेश ने सब्जी की कितनी टोकरियाँ बेचीं?

(c) सबसे कम कितनी टोकरियाँ बिकीं?

9.3.2 चित्रालेखों को प्रदर्शित करना

आपने दैनिक जीवन में प्रयोग होने वाली कई वस्तुओं की तस्वीरें अवश्य ही बनाई होंगी। उनमें से कुछ तस्वीरें तो आसानी से बन जाती हैं। कुछ तस्वीरों को बनाने में कठिनाई

होती है। चित्रालेखों से आँकड़े दर्शाना एक रोचक क्रिया है, परन्तु किसी-किसी संकेत को बनाने में समय लगता है। ऐसी स्थिति में, हम सरल संकेतों का प्रयोग कर सकते हैं। ऐसे में हम एक चित्र से कई वस्तु को इंगित कर देते हैं। जैसे एक संकेत  = 10 विद्यार्थियों को निरूपित कर सकता है। हमने पहले भी 10 पशुओं के लिए एक चित्र का उपयोग किया है और हजार कलम के लिए भी एक का, हम इस तरह के कुछ और अभ्यास करेंगे।

उदाहरण–3 : एक मध्य विद्यालय की प्रत्येक कक्षा में लड़कियों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित है–

( = 2 लड़की)

कक्षा का नाम	लड़कियों की संख्या
I पहली	
II दूसरी	
III तीसरी	
IV चौथी	
V पाँचवीं	
VI छठी	
VII सातवीं	
VIII आठवीं	

इस चित्रालेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) किस कक्षा में लड़कियों की संख्या अधिकतम है?

(b) क्या कक्षा VI में लड़कियों की संख्या कक्षा V की लड़कियों की संख्या से कम है?

(c) कक्षा VIII में कितनी लड़कियाँ हैं?

(d) कक्षा III से अधिक लड़कियाँ किस कक्षा में हैं?

हल :

(a) सबसे अधिक लड़कियाँ कक्षा I में हैं।

 = 2 लड़कियाँ। इसलिए इस कक्षा में 2 x 6 = 12 लड़कियाँ दर्शाते हैं।

(b) नहीं, क्योंकि कक्षा VI में लड़कियों की संख्या 2 x 4 = 8 जबकि कक्षा V में लड़कियों की संख्या 2 x 2 = 4 है।

(c) कक्षा VIII में लड़कियों की संख्या 2 x 3 = 6 है।

(d) कक्षा III से अधिक कक्षा I में हैं क्योंकि कक्षा III में 2 x 5 = 10 तथा कक्षा 1 में 2 x 6 = 12 लड़कियाँ हैं।

उदाहरण–4 : शिवहर जिले के सात गाँवों में गन्ने की पैदावार (टन में) इस प्रकार है–

गाँव A	:	70
गाँव B	:	100
गाँव C	:	120
गाँव D	:	60
गाँव E	:	40
गाँव F	:	110
गाँव G	:	90

संकेत ⊖ का प्रयोग करके जो 10 टन (1 टन = 1000 किलोग्राम) को निरूपित करता है। इस पैदावार का एक चित्रालेख बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) गाँव F की पैदावार को कितने संकेत निरूपित करते हैं?

(b) किस गाँव में पैदावार अधिकतम है?

(c) गाँव A या गाँव D में से किस गाँव में पैदावार अधिक है?

हल :

गाँव	पैदावार टन में
A	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
B	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
C	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
D	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
E	⊖ ⊖ ⊖ ⊖
F	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
G	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖

(a) गाँव F की पैदावार को 11 संकेत निरूपित करते हैं।

(b) C गाँव में पैदावार अधिकतम है।

(c) A गाँव में पैदावार अधिक है।

प्रश्नावली – 9.2

1. गत वर्ष के अंतिम चार महीनों में किसी होटल के लिए खरीदे गए बिजली के बल्बों की संख्या निम्नलिखित है–

महीना	बल्बों की संख्या
सितम्बर	45
अक्टूबर	60
नवम्बर	75
दिसम्बर	15

उपर्युक्त सारणी को एक चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए। एक चित्र को कितने बल्ब के बराबर लेंगे?

2. पटना शहर के एक माध्यमिक विद्यालय में पढ़ने वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या विभिन्न वर्षों में निम्न सारणी द्वारा प्रदर्शित है–

वर्ष	विद्यार्थियों की संख्या
2004	250
2005	300
2006	450
2007	350
2008	400

(A) एक संकेत  का प्रयोग करके, जो 50 विद्यार्थियों को निरूपित करता है, एक चित्रालेख बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) वर्ष 2006 में कुल विद्यार्थियों की संख्या को कितने संकेत निरूपित कर रहे हैं?

(b) वर्ष 2004 में कुल विद्यार्थियों की संख्या को कितने संकेत निरूपित कर रहे हैं?

(B) कोई और संकेत लेकर, जो 100 विद्यार्थियों को निरूपित करता है एक चित्रालेख बनाइए। साथ में यह भी बताइए कि कौन-सा चित्रालेख अधिक सूचनाप्रद है?

3. किसी पाँच गाँवों में ट्रैक्टरों की संख्या इस प्रकार है–

गाँव	ट्रैक्टरों की संख्या
गाँव A	5
गाँव B	4
गाँव C	6
गाँव D	7
गाँव E	2

संकेत का प्रयोग करके एक चित्रालेख बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) किस गाँव में ट्रैक्टरों की संख्या न्यूनतम है?

(b) किस गाँव में ट्रैक्टरों की संख्या अधिकतम है?

(c) पाँचों गाँवों में कुल मिलाकर कितने ट्रैक्टर हैं?

9.4 दंड आलेख (Bar Graph)

चित्रालेख बनाने में समय लगता है और हमें ऐसे प्रतीक सोचने होते हैं जो सरल है।

आइए आँकड़ों को निरूपित करने की एक अन्य विधि पर विचार करें। हम एक समान चौड़ाई के क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर दंड इस प्रकार से खींचते कि इनके बीच में समान दूरी बनी रहे। खींचे गए प्रत्येक दंड की लम्बाई दी हुई संख्या के अनुसार बना लेने से यह आँकड़ों को स्पष्ट प्रदर्शित कर पाता है।

आँकड़ों का यह निरूपण **दंड आरेख (Bar diagram)** या **दंड आलेख (Bar graph)** कहलाता है।

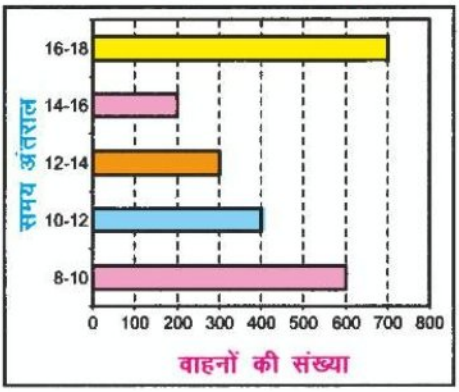
9.4.1 दंड आलेख की व्याख्या

यातायात पुलिस द्वारा पटना के डाक बंगला चौराहे पर एक दिन सुबह आठ बजे से शाम 6 बजे तक गुजरने वाले वाहनों की संख्या का अध्ययन किया गया। आगे दी गई तालिका में यह दर्शाया गया है।

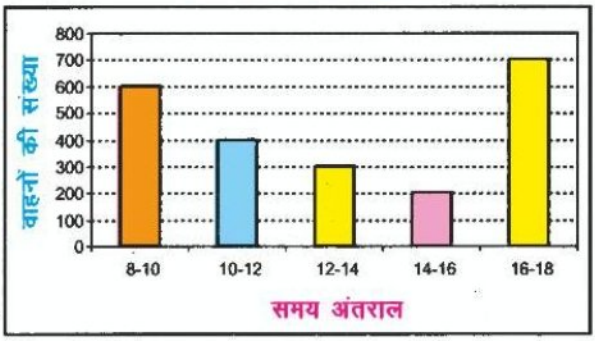
समय	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
वाहन संख्या	600	400	300	200	700

इसे हम दण्डालेख के रूप में दो तरह से प्रस्तुत कर सकते हैं। इसके लिए 100 वाहनों को एक इकाई मान कर सांकेतिक रूप से, एक खाने से निरूपित किया गया है। पैमाना है : 1 इकाई लम्बाई = 100 वाहन।

क्षैतिज दण्ड आलेख
(Horizontal Bar Graph)



ऊर्ध्वाधर दण्ड आलेख
(Vertical Bar Graph)



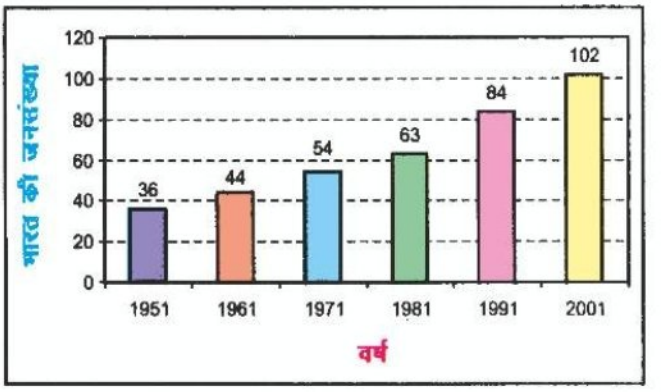
16 से 18 बजे के बीच का दण्ड सबसे लम्बा है। यह दिखाता है कि इस समय यातायात अधिकतम होता है। इसी तरह 14 से 16 बजे के बीच का दण्ड सबसे छोटा है। हम कह सकते हैं कि न्यूनतम यातायात इसी समय में होता है।

इस प्रकार हम पाते हैं कि दण्ड आलेख दिए गए आँकड़ों को सुविधा से समझने में सहायता करते हैं। इससे निष्कर्ष केवल एक दृष्टि में निकाला जा सकता है।

पैमाने का चुनाव

यहाँ एक बात ध्यान देने योग्य है कि यदि आँकड़ों में संख्याएँ बड़ी हों, तो आपको एक भिन्न पैमाने (scale) की आवश्यकता पड़ेगी। उदाहरण के लिए हम भारत की जनसंख्या का अध्ययन करें तो ये संख्या करोड़ों में है। इसलिए यदि आप 1 इकाई = 1 व्यक्ति लेंगे या

1000 भी लेंगे तो दंड खींचना संभव नहीं होगा। अतः इस तरह का पैमाना चुनिए कि वह आपके कागज में फिट हो। इस के लिए 1 इकाई = 10 करोड़ निरूपित कर सकते हैं जैसा दंडालेख में लिया गया है।



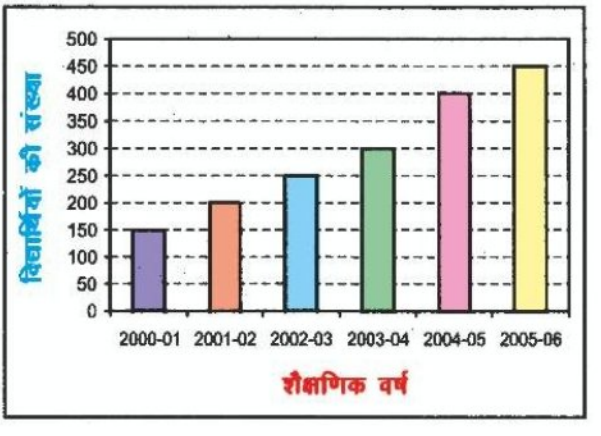
उदाहरण 1 : एक विद्यालय के शैक्षणिक वर्ष 2000 – 2001 से 2005 – 2006 तक कक्षा VI के विद्यार्थियों की संख्या का एक दंड आलेख दिया गया है। इसे पढ़िए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(a) इस आलेख का पैमाना क्या है?

(b) किस वर्ष में विद्यार्थियों की संख्या में अधिकतम वृद्धि हुई?

(c) क्या शैक्षणिक वर्ष 2002–03 में विद्यार्थियों की संख्या शैक्षणिक वर्ष 2001–02 के विद्यार्थियों की संख्या की दोगुनी है?

1 इकाई लम्बाई = 50 विद्यार्थी



हल : (a) पैमाना है–

1 इकाई लम्बाई = 50 विद्यार्थी

(b) शैक्षणिक वर्ष 2004–05 में विद्यार्थियों की संख्या में अधिकतम वृद्धि हुई। क्योंकि इस वर्ष पिछले वर्ष से 100 अधिक विद्यार्थी थे।

(c) शैक्षणिक वर्ष 2002–03 में विद्यार्थियों की संख्या = 250,

शैक्षणिक वर्ष 2001–02 में विद्यार्थियों की संख्या = 200

$\frac{250}{200}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}\neq 2$, अतः विद्यार्थियों की संख्या दोगुनी नहीं है।

9.4.2 दंड आलेख को खींचना

आइए एक सारणी लें जो किसी परिवार की विभिन्न मदों में होने वाले मासिक व्यय को निरूपित करती है–

मद	व्यय (रु. में)
मकान किराया	2000
भोजन	2500
बिजली	500
शिक्षा	1500
परिवहन	500
विविध	1000

इन आँकड़ों को एक दंड आलेख के रूप में इस प्रकार निरूपित किया जाता है :

(a) परस्पर दो लम्ब रेखाएँ खींचिए, एक ऊर्ध्वाधर और एक क्षैतिज।

(b) क्षैतिज रेखा के अनुदिश समान दूरी पर 'मद' अंकित कीजिए। ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश संगत व्यय (रु. में) अंकित किए जाएँगे।

(c) समान चौड़ाई के दंड बनाइए।

(d) ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश एक सुविधाजनक पैमाना लीजिए।

मान लीजिए 1 इकाई लम्बाई = 500 रु. है। इसके अनुसार संगत मान अंकित करने के लिए दण्ड की लम्बाई निकालेंगे।

विभिन्न मदों के लिए दंडों की लम्बाई परिकल्पित कीजिए जैसा कि नीचे दिखाया जा रहा है–

मकान किराया : 2000 ÷ 500 = 4 इकाई

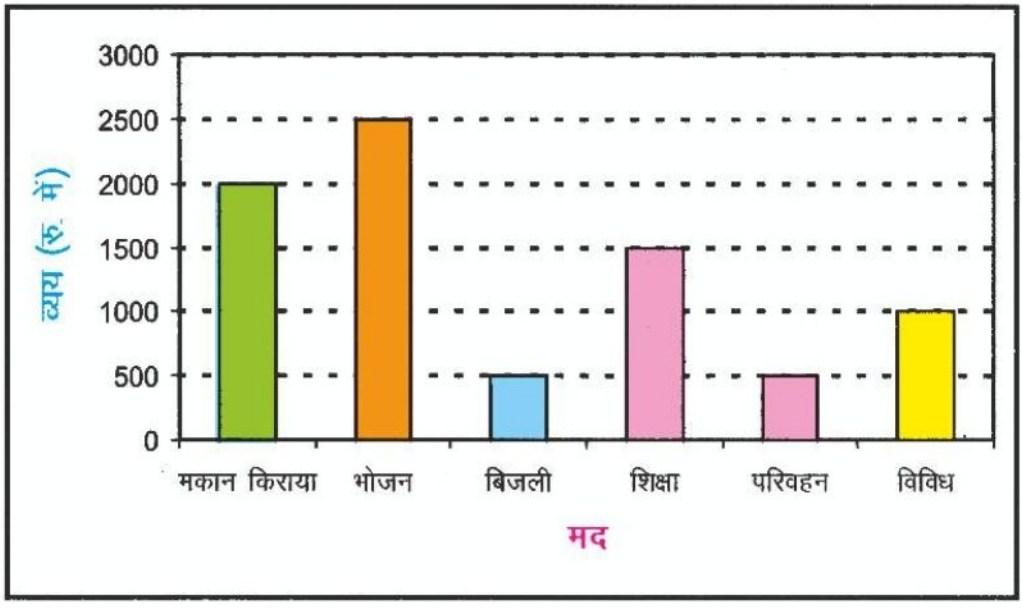
भोजन : 2500 ÷ 500 = 5 इकाई

बिजली : 500 ÷ 500 = 1 इकाई

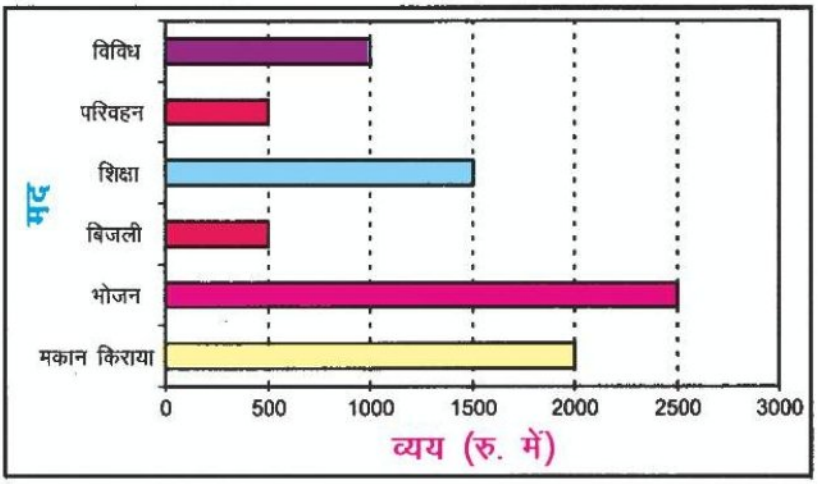
शिक्षा : 1500 ÷ 500 = 3 इकाई

परिवहन : 500 ÷ 500 = 1 इकाई

विविध : 1000 ÷ 500 = 2 इकाई



इन्हीं आँकड़ों को 'मद' और 'व्यय' मद की स्थितियों को अक्षों पर परस्पर बदलकर, निम्न प्रकार भी दर्शाया जा सकता है–



इन्हें कीजिए

आप अपनी कक्षा में एक सर्वे कीजिए जिसमें आप उनसे किसी विषय में उनकी पसन्द के बारे में पूछ सकते हैं (a) आपका मनपसन्द हीरो, हिरोइन कौन हैं? (b) आपका मनपसंद रंग कौन-सा है? (c) आपका मनपसन्द विषय कौन-सा है? अब इन आँकड़ों को एक सारणी में व्यवस्थित कीजिए तथा उन्हें एक दंडालेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

प्रश्नावली – 9.3

1. छः क्रमागत दिनों में किसी दुकानदार द्वारा बेची गई फ्रिजों की संख्या नीचे दी गई है। अपनी पसंद का पैमाना चुनते हुए, उपर्युक्त सूचना के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

दिन	बेचे गए रेफ्रीजरेटर की संख्या
सोमवार	15
मंगलवार	5
बुधवार	10
वृहस्पतिवार	25
शुक्रवार	15
शनिवार	20
रविवार	35

2. वर्ष 2000 से 2005 तक एक फैक्टरी द्वारा निर्मित कारों की संख्या निम्नलिखित सारणी द्वारा दर्शाई गई है–

वर्ष	निर्मित कारों की संख्या
2000	900
2001	600
2002	1500
2003	1200
2004	1800
2005	2400

इन आँकड़ों के लिए उपयुक्त पैमाना चुनते हुए एक दंड आलेख खींचिए और बताइए–

(a) किस वर्ष सबसे अधिक कारें निर्मित की गईं ?

(b) वर्ष 2000 से 2005 तक कुल कितनी कारें निर्मित हुईं?

3. बिहार राज्य के किसी शहर के व्यक्तियों की संख्या विभिन्न आयु समूहों के अनुसार नीचे सारणी में दी हुई है–

आयु समूह (वर्षों में)	1–14	15–29	30–44	45–59	60–74	75 और उससे ऊपर
व्यक्तियों की संख्या	3 लाख	2 लाख 50 हजार	1 लाख 50 हजार	1 लाख 50 हजार	2 लाख	25 हजार

इन आँकड़ों को उपयुक्त पैमाना चुनकर एक दंड आलेख बनाइए और बताइए कि –

(a) किन दो आयु समूहों की जनसंख्या बराबर है?

(b) 60 वर्ष और उससे अधिक आयु के सभी व्यक्ति वरिष्ठ नागरिक कहलाते हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इस शहर में कितने वरिष्ठ नागरिक हैं?

4. एक स्कूल के 150 विद्यार्थियों का सर्वेक्षण इस आशय से किया गया कि वे अपने खाली समय में किस क्रियाकलाप को पसंद करते हैं। निम्न आँकड़े प्राप्त हुए–

पसंद का क्रियाकलाप	विद्यार्थियों की संख्या
खेलना	50
कहानी की पुस्तक पढ़ना	30
टी.वी. देखना	35
संगीत सुनना	20
पेंटिंग	15

1 इकाई लम्बाई = 5 विद्यार्थी का पैमाना लेकर एक दंड आलेख बनाइए। खेलने के अतिरिक्त कौन-सा क्रियाकलाप सबसे अधिक विद्यार्थियों द्वारा पसंद किया जाता है?

हमने क्या सीखा–

1. आँकड़ों से विशेष सूचना तुरंत प्राप्त करने के लिए, उन्हें मिलान चिह्नों का प्रयोग करके सारणी में प्रस्तुत किया जा सकता है।
2. हमने सीखा कि आँकड़ों को चित्रालेख एवं दंड आलेख द्वारा निरूपित किया जाता है। इसे करने का तरीका भी हमने सीखा। हमने यह भी जाना कि चित्रालेख को केवल देखकर ही आँकड़ों से संबंधित प्रश्नों के उत्तर दिए जा सकते हैं।
3. हमने चर्चा की है कि किसी आँकड़े का एक दंड आलेख में समान दूरी पर समान चौड़ाई के दंड क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रूप से खींचे जाते हैं। प्रत्येक दंड की लम्बाई वांछित सूचना दर्शाती है।
4. हमने आलेख के लिए एक पैमाना चुनने की प्रक्रिया की भी चर्चा की, उदाहरणार्थ 1 इकाई = 5 विद्यार्थी।
5. हमने दंड आलेखों को पढ़ने का अभ्यास भी किया है। हमने इसकी व्याख्या करके निष्कर्ष निकालना भी सीखा है।



अध्याय-10 अनुपात और समानुपात

10.1 भूमिका

रीना और रमेश ने अपनी-अपनी गुल्लकों में कुछ रुपये इक्ट्ठे किए थे। आज वे उनको गिन रहे थे। रीना– रमेश तुम्हारे पास कुल कितने रुपये जमा हुए?

रमेश – कुल मिलाकर 40 रु. और तुम्हारे पास!

रीना– मेरे पास तो 10 रु. ही जमा हुए।



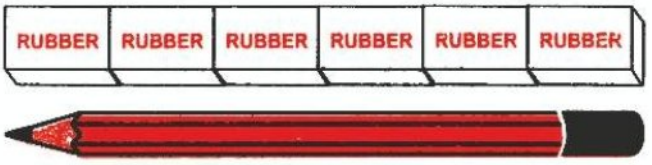
रमेश – अभी तो शुरुआत है। हम और रुपये जोड़ने की कोशिश करेंगे। रीना, तुम्हारे रुपये मेरे रुपयों से कम हैं। जरा देखें तो कितने कम हैं?

40-10 = 30 रुपये

रीना– तुम ठीक कहते हो। मेरे पास तुमसे तीस रुपये कम हैं। अरे! रमेश 10 के पहाड़े में 40, 10 को 4 बार गुणा करने पर आता है। अगर मैं कहूँ कि तुम्हारे पास मेरे से 4 गुना पैसे हैं तो क्या मैं ठीक हूँ।

क्या रीना ठीक कह रही है?

यदि हम एक पेंसिल और एक मिटाने वाले रबर के टुकड़े की लम्बाई की तुलना करना चाहें तो दोनों लम्बाइयों में अंतर द्वारा तुलना करना उचित नहीं होगा। पेंसिल की लम्बाई 18 सेमी होती है जो कि रबर की लम्बाई से बहुत अधिक है। यदि हम पेंसिल की लम्बाई के बराबर एक के पीछे जोड़-जोड़कर, रबर की एक पंक्ति बना दें तो हम कह सकते हैं कि 5 से 6 रबर की कुल लम्बाई एक पेंसिल की लम्बाई के समान है।



अतः एक पेंसिल की लम्बाई रबर की कुल लम्बाई के 5 से 6 गुना के बीच होती है।

इसी प्रकार एक ट्रक का मूल्य 6,00,000 रुपये हैं और एक मोटर साइकिल का मूल्य 50,000 रुपये हैं। ट्रक का मूल्य मोटर साइकिल से कितना गुना ज्यादा है।

भाग के द्वारा तुलना करने पर $\frac{6,00,000}{50,000} = \frac{12}{1}$ है।

इस प्रकार ट्रक का मूल्य मोटर साइकिल के मूल्य का 12 गुना हुआ। इस प्रकार कुछ परिस्थितियों में भाग द्वारा तुलना, अंतर द्वारा तुलना से बेहतर होती है। **भाग द्वारा तुलना को ही अनुपात कहा जाता है** और इसे हम संकेत ' : ' द्वारा दर्शाते हैं जैसे –

ट्रक और मोटर साइकिल के मूल्यों का अनुपात 12 : 1 है।

ट्रक का मूल्य मोटर साइकिल के मूल्य का 12 गुना है तो इसे हम इस प्रकार भी कह सकते हैं, मोटर साइकिल का मूल्य ट्रक के मूल्य का $\frac{1}{12}$ है।

आप भी इन राशियों के बीच अनुपात लिखिए–

(1) वार्षिक परीक्षा में प्राप्तांक

समीर – 300

जेम्स – 400

(2) 1 क्विंटल गेहूँ का मूल्य – 1200 रु.

1 क्विंटल मक्का का मूल्य – 900 रु.

(3) पटना से राजगीर की दूरी – 100 किमी

पटना से बेतिया की दूरी – 200 किमी

(4) एक कक्षा में 30 लड़के और 20 लड़कियाँ हैं। लड़कों की और लड़कियों की संख्या में क्या अनुपात है?

अनुपात और इकाई

टीना का कद 135 सेमी है और और मीना का कद 1.5 मीटर, सोहन ने अनुपात के बारे में पढ़ा था। उसने टीना और मीना के कद का अनुपात निकालना शुरू किया।

टीना का कद = 135 सेमी
मीना का कद = 1.5 मीटर

मोहन इसे इस प्रकार लिखता है = $\frac{135}{1.5}=\frac{1350}{15}=\frac{90}{1}$

क्या मोहन ने सही रूप में लिखा है? 90 : 1

मोहन की गलती को आप सुधारिए।

(दो राशियों के बीच अनुपात निकालते समय दोनों राशियों का एक ही इकाई में होना जरूरी है।)

एक और उदाहरण– भीम और इलियास बाजार से कुछ केले लेकर खाते हैं। भीम $\frac{1}{2}$ दर्जन केले खा जाता है और इलियास 3 केले खाता है। अब यदि आपको दोनों द्वारा खाए गए केलों का अनुपात निकालना हो तो पहले भीम द्वारा खाए गए $\frac{1}{2}$ दर्जन केलों को खुले केलों में बदलेंगे। अतः भीम द्वारा खाए गए केले $=\frac{1}{2}$ दर्जन $=\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{12}=6$ केले

अब इकाई समान एक होने पर हम भीम और इलियास द्वारा खाए गए केलों की तुलना कर सकते हैं = भीम द्वारा खाए गए केले : इलियास द्वारा खाए गए केले

$= \cancel{6} : \cancel{3}$

= 2 : 1 (सरल अनुपात)

रीना ने इसे इस प्रकार किया–

भीम द्वारा खाए गए केले = $\frac{1}{2}$ दर्जन

इलियास द्वारा खाए गए केले = 3 केले = $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ दर्जन

भीम और इलियास द्वारा खाए गए केलों का अनुपात $= \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}}{1} = 2:1$$

चूँकि भीम ने $\frac{1}{2}$ दर्जन केले खाए थे। अतः इलियास द्वारा खाए गए 3 केले को दर्जन की इकाई में बदल दिया। हम दर्जन को केलों की संख्या में बदलकर या केलों की संख्या को दर्जन में बदलकर सरल अनुपात निकाल सकते हैं।

स्वयं करके देखिए

1. महेश दिन में 4 घंटे पढ़ाई करता है और लक्ष्मी दिन भर में 180 मिनट पढ़ाई करती है। बताइए कि महेश और लक्ष्मी द्वारा पढ़ाई में लगाए समय का अनुपात क्या होगा? (60 मिनट = 1 घंटा)
2. एक स्कूल में एक वर्ष में 73 छुट्टियाँ बनती हैं। छुट्टियों का वर्ष के कुल दिनों के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए। (1 वर्ष = 365 दिन)

अनुपात का प्रयोग : हम अनुपात की संकल्पना का प्रयोग दैनिक जीवन की बहुत सी परिस्थितियों में बिना जाने ही करते हैं।

आकृति A तथा B की तुलना करें। आकृति A आकृति B से ज्यादा वास्तविक लगती है। क्यों?

आकृति B में टाँगें, बाकी शरीर की तुलना में अधिक लंबी है। आकृति B अस्वाभाविक इसलिए लगती है क्योंकि हम टाँगों और शरीर के अन्य हिस्सों की लम्बाई में एकं खास अनुपात की आशा रखते हैं।



A B

चित्र में बनी दोनों पेंसिलों की तुलना कीजिए। क्या पहली पेंसिल देखने में पूरी पेंसिल लगती है? नहीं। कारण यह है कि पेंसिल की मोटाई और लम्बाई में सही अनुपात नहीं है।



बराबर अनुपात अर्थात् तुल्य अनुपात

हम अलग-अलग परिस्थितियों में एक जैसा अनुपात देख सकते हैं–

जैसे– एक परिवार में 6 आदमी और 4 औरते हैं तो आदमी, औरतों का अनुपात $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=3:2$

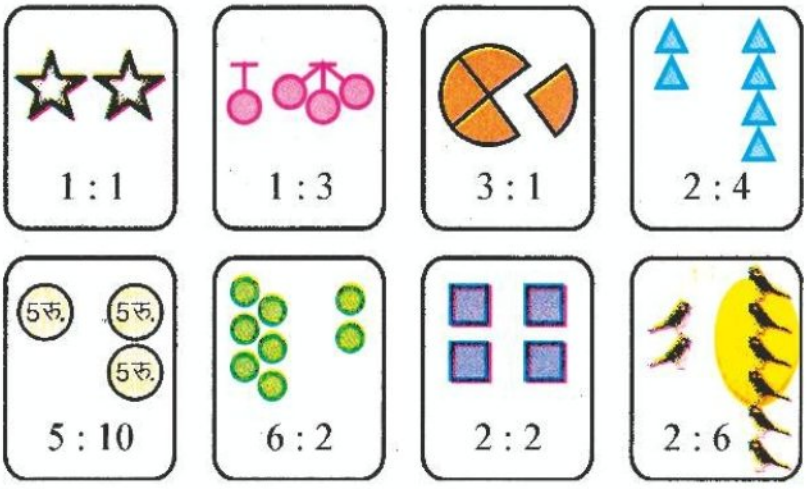
एक कमरे की लम्बाई 30 मी और इसकी चौड़ाई 20 मी है। अतः कमरे की लम्बाई का चौड़ाई से अनुपात $=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}=3:2$

दोनों ही उदाहरणों में अनुपात 3 : 2 है।

अतः 30 : 20 और 6 : 4 समान हैं जो 3 : 2 के बराबर हैं। यह तुल्य अनुपात कहलाता है।

स्वयं कीजिए

दिए गए चित्र में दो समूहों में आकृतियों की संख्या का अनुपात दिया है। आप तुल्य अनुपातों को मिलाइए।



राजा ने अपने चचेरे भाई हँसमुख के साथ मिलकर एक खेत खरीदा। राजा ने 40,000 रु. और हँसमुख ने 60,000 रु. लगाए। दोनों द्वारा लगाए गए पैसों का सरल अनुपात 40,000: 60,000 = 4 : 6 अर्थात् 2 : 3 है।

फसल के बाद सारे खर्च काटने पर उन्हें कुल मिलाकर 40,000 रु. का मुनाफा हुआ। जब लाभ बाँटने की बात चली तो हँसमुख बोला "मुझे ज्यादा रुपये मिलने चाहिए। मैंने शुरुआत में ज्यादा धन लगाया था"।

तब यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक द्वारा मिलाए गए धन के अनुपात में ही लाभ बाँटा जाएगा अर्थात् 2 : 3 के अनुपात में।

जैसे– मान लीजिए अगर 5 रु. का लाभ होता तो 2 रु. राजा को और 3 रु. हँसमुख को मिलते। या 5 हिस्सों में 2 हिस्से राजा को और 3 हिस्से हँसमुख को मिलेंगे।

इसे इस प्रकार भी लिखते हैं लाभ का $\frac{2}{5}$ राजा को और $\frac{3}{5}$ हँसमुख को।

अब लाभ 40,000 रु. है तो राजा को मिलेंगे $\frac{2}{5}\times 40,000 = 16,000$ रु.

और हँसमुख को मिलेंगे $\frac{3}{5}\times 40,000 = 24,000$ रु.

अगर लाभ 1000 रु. होता तो राजा और हँसमुख को कितने-कितने रुपये मिलते? ऐसे ही अलग-अलग लाभ लेकर राजा और हँसमुख में 2 : 3 में बाँटिए।

उदाहरण–1 : नमन के बगीचे की लम्बाई 100 मी और चौड़ाई 75 मी है। उसके बगीचे की लम्बाई और चौड़ाई में अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : बगीचे की लम्बाई = 100 मी, बगीचे की चौड़ाई = 75 मी

अतः लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात = 100 : 75

$$\frac{100}{75} = \frac{\cancel{100}}{\cancel{75}} = 4:3$$

अतः अनुपात होगा 4 : 3

उदाहरण–2 : एक जहाज में हज की यात्रा पर जाने वाले लोगों की संख्या 55 थी। यदि उनमें से 25 महिलाएँ थीं और शेष पुरुष, तो निम्न में अनुपात ज्ञात कीजिए–

(अ) महिलाओं और पुरुषों की संख्या का।

(ब) पुरुषों और महिलाओं की संख्या का।

हल : कुल यात्रियों की संख्या =55

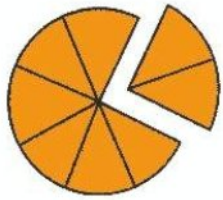
महिलाओं की संख्या = 25

पुरुषों की संख्या = 55 − 25 = 30

अतः महिलाओं की संख्या और पुरुषों की संख्या का अनुपात = 25 : 30 = 5 : 6 और पुरुषों की संख्या और महिलाओं की संख्या का अनुपात = 30 : 25 = 6 : 5 (ध्यान दें कि 5 : 6 और 6 : 5 अलग-अलग हैं। वास्तव में एक-दूसरे से विपरीत हैं)

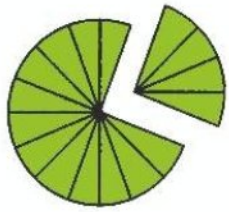
उदाहरण–3 : चित्र में दिखाए अनुपात के दो तुल्य अनुपात लिखिए।

हल : अब यदि $\frac{6}{2}$ को ऊपर और नीचे 2 से गुणा करें तो हमें मिलेगा



$\frac{6\times2}{2\times2}=\frac{12}{4}=12:4$ प्राप्त होगा।

आपने यहाँ गौर किया होगा कि टुकड़ों की संख्या बढ़ गई है पर टुकड़ों द्वारा घेरा गया स्थान बराबर है।



अतः 12 : 4 और 6 : 2 तुल्य अनुपात हैं।

इसी प्रकार $6:2=\frac{6}{2}=\frac{6\div2}{2\div2}=\frac{3}{1}=3:1$



3 : 1 भी 6 : 2 का तुल्य अनुपात है।

अतः तुल्य अनुपात $=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{12}{4}=\frac{18}{6}=$.....

10.2 तुल्य अनुपात का गुण धर्म

तरीका–1 : हम तुल्य अनुपात में पढ़ चुके हैं कि अंश और हर को एक समान संख्या से गुणा या भाग कर तुल्य अनुपात प्राप्त होता है।

मान लिया कि $\frac{3}{4}=\frac{\square}{12}$ दूसरा तुल्य अनुपात निकालने के लिए हमें हर 12 के सापेक्ष अंश निकालना है, तो $\frac{3}{4}$ के अंश तथा हर को 3 से गुणा करना होगा जिससे हर 12 हो जाए। यानि यह इस प्रकार होगा–

$\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}$ अतः तुल्य अनुपात के लिए अंश में 9 रखना पड़ेगा। इस प्रकार $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ अब तुल्य अनुपात है।

तरीका–2 :

$\frac{3}{4}=\frac{\square}{12}$

$12\times3=4\times\square$

$36=4\times\square$

(4 को 9 से गुणा करने पर हमें 36 प्राप्त होता है।)

या $\frac{36}{4}=\frac{9}{1}$

अतः $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ तुल्य अनुपात हुआ।

स्वयं कीजिए

$\frac{3}{4}=\frac{---}{20}$ को हल कीजिए।

उदाहरण–4 : जीवन की कुल आमदनी का खर्च और बचत का अनुपात 2 : 1 है। अब यदि जीवन की आमदनी 600 रु. है तो बताइए वह महीने में कुल कितना बचा लेता है?

हल : अनुपात के दो हिस्से 2 और 1 हैं।

अतः दोनों हिस्सों का योग = 2 + 1 = 3

इसका अर्थ है कि बचत 3 रु. में से 1 रु.

तो 1 रु. में $\frac{1}{3}$ रु.

600 रु. में $= \frac{1}{\cancel{3}} \times \overset{200}{\cancel{600}} = 200$ रु. बचत

इस प्रकार जीवन अपने कुल आमदनी 600 रुपये में से 200 रुपये बचा लेता है। इसी प्रकार उसका खर्चा भी ज्ञात कर सकते हैं।

प्रश्नावली 10.1

1. **एक कक्षा में 20 लड़कियाँ और 15 लड़के हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए–**
   (a) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से।
   (b) लड़कियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से।
2. **30 विद्यार्थियों की कक्षा में 6 फुटबॉल, 12 क्रिकेट और बाकी टेनिस पसंद करते हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए–**
   (a) फुटबॉल पसंद करने वालों का टेनिस पसंद करने वालों से।
   (b) क्रिकेट प्रेमियों का कुल विद्यार्थियों की संख्या से।
3. **मारगरेट एक कारखाने में काम करती है और 1910 रु. मासिक वेतन लेती है। वह अपनी आय में से 370 रु. प्रति मास बचत करती है तो अनुपात ज्ञात कीजिए–**
   (a) उसकी बचत और उसकी आय का।
   (b) उसकी आय और उसके व्यय का।

4. राम और रहीम ने एक घंटे में क्रमशः 9 किमी और 12 किमी की दूरी तय की। राम और रहीम की चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. **रिक्त स्थानों को भरिए–**

$\frac{15}{18} = \frac{\square}{6} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{30}$ (क्या ये तुल्य अनुपात हैं?)

6. निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए–

(a) 81 का 108 से। (b) 98 का 63 से।

(c) 3 किमी का 11 किमी से। (d) 30 मिनट का 45 मिनट से।

7. **निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए–**

(a) 30 मिनट का 1.5 घंटे से। (b) 40 सेमी का 1.5 मी से।

(c) 55 पैसे का 1 रुपया से। (d) 500 मिली का 2 लीटर से।

8. एक वर्ष में सीमा की आय 150000 रु. है और वह 50,000 रु. की बचत करती है। अनुपात ज्ञात कीजिए–

(a) सीमा की आय और उसकी बचत का।

(b) सीमा द्वारा की गई बचत और उसके द्वारा किए गए खर्च का।

9. एक दर्जन पेन का मूल्य 180 रु. है और 8 बॉल पेन का मूल्य 56 रु. है। पेन के मूल्य का बॉल पेन के मूल्य से अनुपात ज्ञात कीजिए।

10. **कथन को देखें – एक हॉल की चौड़ाई और लंबाई का अनुपात 2 : 5 है। निम्न सारणी को पूरा कीजिए जो कि हॉल की कुछ संभव चौड़ाई और लंबाई को दिखाती है।**

हॉल की चौड़ाई (मीटर में)	10	.....	40	.....
हॉल की लंबाई (मीटर में)	25	50	.....	.....

11. शीला और संगीता के बीच 20 पेनों को 3 : 2 में बाँटिए।

12. पिता की वर्तमान आयु 42 वर्ष और उसके पुत्र की 14 वर्ष है। अनुपात ज्ञात कीजिए–

(a) पिता की वर्तमान आयु का पुत्र की वर्तमान आयु से।

(b) जब पुत्र 12 वर्ष का था तब पिता की आयु का पुत्र की आयु से।

(c) 10 वर्ष बाद पिता की आयु का पुत्र की आयु से।

(d) पिता की आयु का पुत्र की आयु से जब पिता 30 वर्ष का था।

13. एक विद्यालय की छठवीं कक्षा में कुल छात्रों की संख्या 120 है। उसमें से 40 छात्र 'अ' वर्ग में 35 छात्र 'ब' वर्ग में और शेष 'स' वर्ग में पढ़ते हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए–

(i) कुल छात्रों का वर्ग 'अ' में पढ़ने वाले छात्रों के साथ।

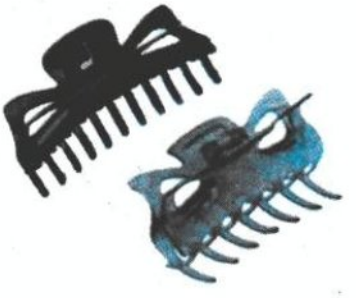
(ii) कुल छात्रों का वर्ग 'स' में पढ़ने वाले छात्रों के साथ।

(iii) 'ब' वर्ग और 'अ' वर्ग के छात्रों का अनुपात।

(iv) 'ब' वर्ग के छात्रों का कुल छात्रों के साथ अनुपात।

10.3 समानुपात

दो सहेलियाँ आशमा और पंखुड़ी हेयर क्लिप खरीदने बाजार गईं। उन्होंने 30 रु में 20 हेयर क्लिप खरीदे। आशमा ने 12 रु. दिए और पंखुड़ी ने 18 रु. दिए। घर आने पर आशमा ने पंखुड़ी से 10 हेयर क्लिप देने को कहा। लेकिन पंखुड़ी ने कहा कि जब मैंने ज्यादा रुपये दिए हैं तो मुझे ज्यादा हेयर क्लिप मिलने चाहिए। उसके अनुसार, आशमा को 8 और उसे 12 हेयर क्लिप मिलने चाहिए।



क्या आप बता सकते हैं कि आशमा या पंखुड़ी में से सही कौन है? क्यों?

आशमा द्वारा दिए गए धन और पंखुड़ी द्वारा दिए गए धन का अनुपात = 12 रु. : 18 रु. = 2 रु. : 3 रु

आशमा के सुझाव के अनुसार, आशमा के हेयर क्लिप की संख्या और पंखुड़ी के हेयर क्लिप की संख्या का अनुपात = 10 : 10 = 1 : 1

पंखुड़ी के सुझाव के अनुसार, आशमा के हेयर क्लिप की संख्या और पंखुड़ी के हेयर

क्लिप की संख्या का अनुपात = 8 : 12 = 2 : 3

आशमा द्वारा किए गए वितरण के अनुसार हेयर क्लिप की संख्या का अनुपात, दिए गए धन के अनुपात के समान नहीं है, जो कि होना चाहिए था। जबकि पंखुड़ी द्वारा किए गए वितरण में दोनों परिस्थितियों में अनुपात समान है। अतः पंखुड़ी ने सही वितरण किया।

उदाहरण–1 : नीलू ने 15 रु. में 3 पेन खरीदे और पप्पू ने 50 रु. में 10 पेन खरीदे। किसके पेन महँगे थे?

हल : नीलू द्वारा खरीदे गए पेन की संख्या और पप्पू द्वारा खरीदे गए पेन की संख्या का अनुपात = 3 : 10

उनके मूल्यों का अनुपात = 15 : 50 = 3 : 10

3 : 10 और 15 : 50 समान हैं। इस प्रकार, दोनों ने समान मूल्य में पेन खरीदे।

उदाहरण–2 : रहीम ने 60 रु. में 2 किग्रा सेब और रोशन ने 120 रु. में 4 किग्रा सेब बेचे। किसने सेब महँगे बेचे?

हल : सेब के भारों का अनुपात = 2 किग्रा : 4 किग्रा = 1 : 2

मूल्यों का अनुपात = 60 : 120 = 6 : 12 = 1 : 2

इस प्रकार सेब के भारों का अनुपात = मूल्यों का अनुपात

क्योकि दोनों अनुपात समान हैं, अतः हम कह सकते हैं कि ये समानुपात में हैं। वे दोनों समान मूल्यों पर सेब बेच रहे हैं।

यदि दो अनुपात एक समान हैं तो वे समानुपात में हैं और इन्हें समान करने के लिए ' : : ' चिह्न का प्रयोग किया जाता है।

स्वयं करके देखिए

जाँच कीजिए कि दिए गए अनुपात समान हैं अर्थात् वे समानुपात में हैं। यदि हाँ तो सही ढंग से लिखिए।

1. 1 : 5 और 3 : 15
2. 2 : 9 और 3 : 5
3. 15 : 45 और 5 : 25
4. 4 : 12 और 9 : 27
5. 10 रु. का 15 रु. और 4 का 6 से

समानुपात के कथन में, क्रम में ली गई चारों राशियाँ पद कहलाती हैं। पहले और चौथे पद को चरम पद कहते हैं। दूसरे और तीसरे पद को मध्य पद कहते हैं।

उदाहरण के लिए 35 : 70 : : 2 : 4 में 35, 70, 2 और 4 पद हैं।

इसमें से 35 तथा 4 चरम पद हैं और 70 तथा 2 मध्य पद हैं।

प्रश्नावली – 10.2

1. क्या निम्न राशियाँ समानुपात में हैं?

(a) 15, 45, 40, 120
(b) 33, 121, 9, 96
(c) 24, 28, 36, 48
(d) 32, 48, 70, 210
(e) 4, 6, 8, 12
(f) 6, 8, 12, 16

2. निम्न में से प्रत्येक कथन के आगे सत्य या असत्य लिखिए। असत्य को सत्य बनाइए–

(a) 16 : 24 :: 20 : 30
(b) 21 : 6 :: 35 : 10
(c) 12 : 18 :: 28 : 12
(d) 8 : 9 :: 24 : 27
(e) 5.2 : 3.9 :: 3 : 4
(f) 0.9 : 0.36 :: 10 : 4

3. सही कथन के आगे (✓) का निशान लगाइए। गलत को सही बनाइए–

(a) 40 व्यक्ति : 200 व्यक्ति = 15 रु. : 75 रु.
(b) 7.5 ली : 15 ली = 5 किग्रा : 10 किग्रा
(c) 99 किग्रा : 45 किग्रा = 44 रु : 20 रु
(d) 32 मी : 64 मी = 6 सेकंड : 12 सेकंड
(e) 45 किमी : 60 किमी = 12 घंटे : 15 घंटे

4. जाँच कीजिए कि क्या निम्न अनुपात, समानुपात, बनाते हैं? यदि समानुपात बनता हो तो मध्य पद और चरम पद भी लिखिए–

(a) 25 सेमी : 1 मी और 40 रु. : 160 रु.

(b) 39 ली : 65 ली और 6 बोतल : 10 बोतल

(c) 2 किग्रा : 80 किग्रा और 25 ग्रा : 625 ग्रा

(d) 200 मिली : 2.5 ली और 4 रु. : 50 रु.

5. समानुपाती के गुण का उपयोग करते हुए रिक्त स्थान में भरी जाने वाली संख्या ज्ञात कीजिए–

(i) 15 : 5 : : ------- : 6

(ii) 22 : 10 : : 11 : -------

(iii) ------- : 12 : : 96 : 36

(iv) 19 : 95 : : 5 : -------

(v) 12 : ------- : : 14 : 21

6. एक विद्यालय में छात्र और छात्राओं का अनुपात 2 : 1 है। अब यदि कुल विद्यार्थियों की संख्या 510 है तो छात्राओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. एक परिवार की मासिक आय और व्यय का अनुपात 6 : 4 हैं। यदि परिवार की आय 6000 रु. है तो परिवार का मासिक व्यय क्या होगा?

अध्याय-11 ऐकिक नियम

दो मित्र रमेश और महेश सामान को खरीदने बाजार गए। रमेश केले खरीदने के लिए दूकान पर गया। उसने दुकानदार से केले का भाव पूछा। दुकानदार ने 8 केले की कीमत 16 रुपये बताया। रमेश 3 केले खरीदना चाहता था। रमेश सोच में पड़ गया कि वह दुकानदार को 3 केले का कितना मूल्य चुकाए?

रमेश ने महेश से पूछा, "दुकानदार को 3 केलों का कितना मूल्य दूँ।" महेश बोला, "हमें सबसे पहले एक केले का मूल्य निकालना होगा।"

जब 8 केलों की कीमत 16 रु. है, तो 1 केले की कीमत होगी $= \frac{16}{8} = 2$ रु.

चूँकि रमेश 3 केले खरीदना चाहता था, इसलिए महेश ने 3 केले की कीमत $3 \times 2 = 6$ रु. बता दी और रमेश ने 3 केले 6 रु. देकर खरीद लिए।

इस प्रश्न के हल में पहले हमने दी गई जानकारी से 1 वस्तु का मूल्य निकाला। फिर अभीष्ट वस्तुओं का मूल्य ज्ञात किया। यानि एक इकाई राशि अथवा वस्तु का मूल्य निकाल कर और फिर इस मूल्य से जितनी चाहिए उतने का मूल्य ज्ञात किया। इस विधि को ऐकिक विधि या ऐकिक नियम कहा जाता है।

आइए, हम कुछ और उदाहरणों को लें–

परिस्थिति I किशोर अपने मित्र मनीष के साथ कॉपियाँ खरीदने बाजार जाता है। किशोर 3 कॉपियाँ 15 रुपये में खरीदता है। क्या हम ज्ञात कर सकते हैं कि किशोर ने एक कॉपी कितने में खरीदी?

क्या हम यह भी बता सकते हैं कि 25 रुपये में कितनी कॉपियाँ खरीदी जा सकती हैं?

परिस्थिति II गुंजन अपने जन्म दिन पर अपने 15 दोस्तों को कोई छोटा-सा उपहार देना चाहती है। वह खिलौने की दुकान पर एक गाड़ी पसन्द करती है। यदि 120 रु. में 4 गाड़ियाँ मिलती हैं तो गुंजन के पास 15 गाड़ियाँ खरीदने के लिए कितने रुपये होने चाहिए?

परिस्थिति I

3 कॉपियों का मूल्य = 15 रु.

अतः 1 कॉपी का मूल्य = $\frac{15}{3}$ रु. = 5 रु.

अतः किशोर ने एक कॉपी 5 रुपये में खरीदी।

और 25 रु. में खरीदी कॉपियों की संख्या = $\frac{25}{5}=5$

दूसरा तरीका :

15 रुपये में खरीदी गई कॉपियों की संख्या = 3

अतः 1 रुपया में खरीदी गई कॉपियों की संख्या = $\frac{3}{15}$ कॉपी

इसलिए 25 रुपये में खरीदी गई कॉपियों की संख्या = $\frac{3}{15}\times 25=5$

इस प्रकार 25 रुपये में 5 कॉपियाँ खरीदी जा सकती हैं।

परिस्थिति II

4 गाड़ियों का मूल्य = 120 रु.

अतः 1 गाड़ी का मूल्य = 120 रु. ÷ 4 = 30 रु.

तब 15 गाड़ियों का मूल्य = 30 X 15 = 450 रु.

अन्य उदाहरण

उदाहरण–1 : यदि एक कार समान गति से चलकर 240 किलोमीटर की दूरी 4 घंटे में तय करती है तो–

(a) उसी चाल से 180 किमी दूरी तय करने में कितना समय लगेगा?

(b) उसी चाल से 5 घंटे में कार कितनी दूरी तय करेगी?

हल : (a) इस स्थिति में दूरी ज्ञात है और समय अज्ञात है।

∵ (क्योंकि) 240 किमी की दूरी तय करने में कार को लगा समय = 4 घंटे

∴ (इसलिए) 1 किमी की दूरी तय करने में कार को लगा = $\frac{4}{240}$ घंटे

∴ (इसलिए) 180 किमी की दूरी तय करने में कार को लगा समय = $\left(\frac{4}{240}\times 180\right)$ घंटे

= 3 घंटे

इस प्रकार 180 किमी की दूरी तय करने में कार को 3 घंटे लगेंगे।

हल : (b) इस स्थिति में दूरी अज्ञात है और समय ज्ञात है।

∵ 4 घंटे में तय की गई दूरी = 240 किलोमीटर

∴ 1 घंटे में तय की गई दूरी = (240 ÷ 4) किलोमीटर = 60 किलोमीटर

अतः 5 घंटे में तय की गई दूरी = 60 X 5 = 300 किलोमीटर

इस प्रकार 5 घंटे में 300 किमी की दूरी तय करेगी।

उदाहरण–2 : यदि किसी मजदूर की 25 दिनों की आय 1500 रु. है तो पूरे जनवरी महीने में उसकी आय ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि जनवरी माह में 31 दिन होते हैं।

∵ 25 दिनों की आय 1500 रुपये हैं।

∴ 1 दिन की आय = (1500 ÷ 25) रुपये

= 60 रुपये

∴ 31 दिनों की आय = (60 x 31) रुपये

= 1860 रुपये

इस प्रकार पूरे जनवरी माह में मजदूर को 1860 रु. की आय होगी।

प्रयास कीजिए

1. पाँच ऐसे ही प्रश्न बनाइए और उसका हल स्वयं या मित्रों की मदद से कीजिए।
2. नीचे दी सारणी को देखें। इस सारणी को देखकर हम यह बता सकते हैं कि 5 कि.ग्रा. आलू का मूल्य 75 रुपये है। अतः 1 कि.ग्रा. आलू का मूल्य $= \frac{75}{5} = 15$ रु.

इसी प्रकार 3 कि.ग्रा. आलू का मूल्य $= 15 \times 3 = 45$ रु. होगा।

इसी प्रकार आप अन्य मूल्य निकालकर सारणी के रिक्त स्थानों में भरें–

वजन (कि.ग्रा. में)	आलू का मूल्य (रुपये में)	टमाटर का मूल्य (रुपये में)	प्याज का मूल्य (रुपये में)
5	75	60	160
1	15		
3	45	36	
7			224
30			

प्रश्नावली – 11

1. यदि 8 किलोग्राम चीनी का मूल्य 240 रु. है तो 12 किलोग्राम चीनी का मूल्य ज्ञात कीजिए।
2. किसी व्यक्ति ने एक पुस्तक की तीन प्रतियाँ 75 रु. में खरीदीं। बताइए कि 300 रु. में वह व्यक्ति पुस्तक की कितनी प्रतियाँ खरीद सकता है?
3. यदि 3 दर्जन केले का मूल्य 45 रुपये है तो बताइए कि 22.50 रु. में कितने केले खरीदे जा सकते हैं?
4. यदि एक छात्रावास में प्रति 8 बच्चों के लिए चावल की खपत 4 किलोग्राम है तो 30 बच्चों के लिए चावल की कितनी खपत होगी?
5. एक हवाई जहाज 5 घंटे में 4000 किमी उड़ता है। वह तीन घंटे में कितना उड़ेगा?
6. यदि 22 मीटर कपड़े का मूल्य 704 रु. है तो 20 मीटर कपड़े का मूल्य क्या होगा?
7. एक कार 3 घंटे में 165 किलोमीटर चलती है तो वह कार–
   (i) 440 किलोमीटर की दूरी कितने समय में तय करेगी?
   (ii) $6\frac{1}{2}$ घंटे में कितनी दूरी तय करेगी?
8. एक महिला की 15 महीने की बचत 18000 रु. है तो–
   (a) उसकी सात महीने की बचत क्या होगी?
   (b) कितने महीने में उसकी बचत 30000 रु. होगी?
9. रेशमा 4 महीने का मकान किराया 5600 रु. देती है। यदि वर्षभर किराया समान रहे तो उसे पूरे वर्ष का किराया कितना देना होगा?
10. पिछले 30 दिन में तापमान 15° सेल्सियस बढ़ा। यदि तापमान की बढ़ोत्तरी इसी गति से जारी रही तो, अगले 10 दिन में तापमान कितने डिग्री और बढ़ेगा?
11. रामू ने 5 ओवर में 45 रन बनाए और अनूप ने 7 ओवर में 42 रन बनाए। एक ओवर में किसने अधिक रन बनाए?

अध्याय-12 बीजगणित

12.1 भूमिका

अभी तक हमने संख्याओं की मदद से दैनिक जीवन की विभिन्न समस्याओं को हल करने का प्रयास किया है। गणित की वह शाखा जिसमें हमने संख्याओं का अध्ययन किया, अंकगणित (Arithmetic) कहलाती है। गणित की वह शाखा जिसमें हम आकृतियों अथवा आकारों का अध्ययन करते हैं, ज्यामिति (Geometry) कहलाती है। अब हम गणित की एक अन्य शाखा का अध्ययन शुरू करने जा रहे हैं जो बीजगणित (Algebra) है।

इस नई शाखा की मुख्य विशेषता यह है कि इसमें अक्षरों का प्रयोग करके हम नियमों और सूत्रों (Formulas) को व्यापक रूप में लिख पाने में समर्थ हो जाएँगे। अक्षरों के इस प्रयोग से, हम केवल एक विशेष संख्या की ही बात न करके, किसी भी संख्या की बात कर सकते हैं। दूसरी बात यह है कि अक्षर अज्ञात राशियों के स्थान पर भी प्रयोग किए जा सकते हैं। अज्ञात राशियों (Unknowns) को निर्धारित करने की विधियों को सीखकर हम दैनिक जीवन से संबंधित अनेक समस्याओं को हल करने के प्रभावशाली साधन विकसित कर सकते हैं।

तीसरी बात यह है कि ये अक्षर संख्याओं के स्थान पर प्रयोग किए जाते हैं, इसलिए इन पर संख्याओं की तरह संक्रियाएँ भी की जा सकती हैं। इससे हम बीजीय व्यंजकों (Algebraic expressions) और उनके गुणों के अध्ययन की ओर अग्रसर होते हैं।

भास्कराचार्य की पुस्तक में एक अध्याय बीजगणित पर है। भास्कर ने अज्ञात राशियों के लिए बीज, वर्ण इत्यादि नाम दिए और उन्हें व्यक्त करने के लिए रंगों के नामों के प्रथम अक्षरों का प्रयोग किया। जैसे– काला से "का", नीला से "नी" इत्यादि। इन्होंने बीजगणित के क्षेत्र में ब्रह्मगुप्त के कार्यों को आगे बढ़ाते हुए समीकरणों को हल करने के लिए चक्रवाल का तरीका खोजा।

आइए अपने अध्ययन को सरल उदाहरणों द्वारा प्रारंभ करके यह देखते हैं कि बीजगणित समस्याओं के हल करने में किस प्रकार उपयोगी रहता है।

12.2 माचिस की तीलियों से बने प्रतिरूप

राम और श्याम माचिस की तीलियों से प्रतिरूप (pattern) बनाना चाहते हैं। उन्होंने अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों के सरल प्रतिरूप बनाने का निर्णय किया। राम दो तीलियाँ लेकर अक्षर V बनाता है जैसा कि आकृति (a) में दिखाया गया है। फिर श्याम भी दो तीलियाँ लेता है और एक अन्य V बनाकर राम द्वारा बनाए गए V के आगे रख देता है, जैसा कि आकृति (b) में दिखाया गया है।



(a) (b) (c)

(आकृति–1)

फिर श्याम एक और V बनाकर आगे रख देता है और यह सिलसिला आगे जारी रहता है, जैसा कि आकृति (c) में दर्शाया गया है।

तभी सलमा वहाँ आ जाती है। वह इस प्रतिरूप को देखती है। सलमा उन दोनों से पूछता है कि आठ V बनाने के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी? राम और श्याम सुचारू रूप से कार्य करते हैं। वे 1V, 2V, 3V, इत्यादि से प्रतिरूप बनाते रहते हैं और एक सारणी बनाते हैं–

सारणी – 1

बनाए गए V की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	—	—
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	8	10	12	14	16	—	—

सलमा को सारणी–1 से अपना उत्तर प्राप्त हो जाता है। आठ V बनाने के लिए 16 तीलियों की आवश्यकता होगी।

सारणी बनाते समय श्याम यह अनुभव करता है कि आवश्यक तीलियों की संख्या बनाए गए V की संख्या की दो गुनी है अर्थात् आवश्यक तीलियों की संख्या =2 x V की संख्या।

हम सुविधा के लिए, V की संख्या के लिए n लिख सकते हैं।

यदि एक V बनाया जाता है तो n = 1 है,

यदि 2V बनाए जाते हैं तो n = 2 है, इत्यादि।

इस प्रकार, n कोई भी प्राकृत संख्या 1, 2, 3, 4, 5 ..... हो सकती है।

अतः हम लिखते हैं, आवश्यक तीलियों की संख्या = 2 x n,

2 x n लिखने के स्थान पर हम इसे 2n लिखते हैं। ध्यान दीजिए 2n और 2 x n एक ही है।

श्याम अपने मित्रों से कहता है कि उसका यह नियम कितनी भी संख्या में V बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या बता सकता है।

इस प्रकार n = 1 के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या = 2 x 1 = 2;

n = 2 के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या = 2 x 2 = 4;

n = 3 के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या = 2 x 3 = 6; इत्यादि

राम कहता है, "यह नियम बहुत प्रभावशाली है। इस नियम का प्रयोग करके मैं 100V बनाने में आवश्यक तीलियों की संख्या भी बता सकता हूँ। एक बार नियम ज्ञात हो जाय, तो मुझे प्रतिरूप खींचने या सारणी बनाने की कोई आवश्यकता नहीं होगी।"

क्या आप राम के कथन से सहमत हैं?

12.3 चर

ऊपर के उदाहरण में हमने V का एक प्रतिरूप बनाने में आवश्यक तीलियों की संख्या ज्ञात करने के लिए एक नियम ज्ञात किया था। नियम यह था–

आवश्यक तीलियों की संख्या = 2n

यहाँ n, V के प्रतिरूपों की संख्या है और n के मान 1, 2, 3, 4 ..... हो सकते हैं।

आइए, सारणी–1 को पुनः देखते हैं। जब n का मान बढ़ता है तो आवश्यक तीलियों की संख्या भी बढ़ती जाती है।

n चर (variable) का एक उदाहरण है। इसका मान स्थिर (fixed) नहीं है, यह कोई भी मान 1, 2, 3, 4 ..... ले सकता है। हमने आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए n का प्रयोग करके नियम लिखा।

चर शब्द का अर्थ है– 'बदलने वाला'। अर्थात् जिसका मान स्थिर नहीं है। यह विभिन्न मान ले सकता है।

हमने चर को दर्शाने के लिए अक्षर n का प्रयोग किया है। रमेश पूछता है– "m क्यों नहीं?" सरिता ने कहा, "n में कोई विशेष बात नहीं है, किसी भी अक्षर का प्रयोग किया जा सकता है।"

इस प्रकार एक चर को दर्शाने के लिए हिन्दी या अंग्रेजी वर्णमाला के किसी भी अक्षर जैसे अ, ब, स, द या क, ख, ग, घ या a, b, c या p, q, r या x, y, z इत्यादि का प्रयोग किया जा सकता है। इन्हीं अक्षरों को हम चरांक या बीजांक भी कहते हैं।

उदाहरण : बाजार के एक जनरल स्टोर से प्रवीण, किशोर एवं मुन्नी टॉफी का एक-एक पैकेट खरीदकर अपने मित्र रवि को जन्म दिन पर उपहार स्वरूप देना चाहते हैं। टॉफी के हर पैकेट में 20 टॉफियाँ हैं परन्तु टॉफियां अलग-अलग क़िस्म की हैं। कैसे पता करें की कौन-सी टॉफी वे खरीद सकते हैं? हम पता कर सकते हैं कि टॉफी का पैकेट खरीदने के लिए कितनी धनराशि की आवश्यकता पड़ेगी?

यदि 1 टॉफी का मूल्य 1 रु. है तो पैकेट का मूल्य 20 x 1 रु. = 20 रुपये होगा

यदि 1 टॉफी का मूल्य 2 रु. है तो पैकेट का मूल्य 20 x 2 रु. = 40 रुपये होगा

हम सब मिलकर एक सारणी बनाते हैं–

सारणी – 2

टॉफी का मूल्य (रुपयों में)	1	2	3	––	x	y	––
पैकेट का मूल्य (रुपयों में)	20	40	60	––	20 x	20y	––

यहाँ x और y उस टॉफी का मूल्य व्यक्त करता है जिसे बच्चे खरीदना चाहते हैं। यहाँ x और y चर राशियाँ हैं जिसका कोई भी मान 1, 2, 3, 4 ..... हो सकता है। प्रत्येक टॉफी

का मूल्य x हो अथवा y रुपये की दर से हो तो पूरे पैकेट का कुल मूल्य–

(रुपये में) = 20x (जब 1 टॉफी का मूल्य x रुपये हो)

= 20y (जब 1 टॉफी का मूल्य y रुपये हो)

उनके पास कितना पैसा है इसके आधार पर तय कर सकते हैं कि कौन-सी टॉफी लें। x रु प्रति टॉफी या y रु प्रति टॉफी या कोई अन्य।

ऊपर के उदाहरण में एक चर को एक संख्या से गुणा किया गया है परन्तु स्थितियाँ ऐसी भी हो सकती हैं, जहाँ संख्याओं को चरों में जोड़ा या चरों में से घटाया जाए, इसके लिए दूसरा उदाहरण लें–

राकेश मुकेश से 5 वर्ष बड़ा है। यदि मुकेश की उम्र 10 वर्ष है तो राकेश की उम्र 15 वर्ष होगी। इसी प्रकार मुकेश की उम्र कुछ भी हो राकेश की उम्र उससे 5 वर्ष अधिक ही होगी।

हम मुकेश की उम्र को x से दर्शाएँगे। यहाँ x एक चर है जो मान 1, 2, 3, 4 ..... ले सकता है। x का प्रयोग कर हम लिख सकते हैं कि राकेश की उम्र = x + 5 है। व्यंजक (x+5) को 'x धन (plus) 5' पढ़ा जाता है।

प्रश्नावली – 12.1

1. तीलियों से निम्न प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए नियम ज्ञात कीजिए। नियम लिखने के लिए चर का प्रयोग कीजिए–

   (a) अक्षर U का के रूप में तीलियों से प्रतिरूप

   (b) अक्षर Z का  के रूप में तीलियों से प्रतिरूप

   (c) अक्षर B का  के रूप में तीलियों से प्रतिरूप

   (d) अक्षर S का  के रूप में तीलियों से प्रतिरूप

   (e) अक्षर A का  के रूप में तीलियों से प्रतिरूप

2. गणतंत्र दिवस पर बच्चे सामूहिक ड्रिल का प्रदर्शन कर रहे हैं। एक पंक्ति में 10 बच्चे हैं। यदि पंक्तियों की संख्या ज्ञात हो, तो बच्चों की संख्या प्राप्त करने के लिए क्या नियम है? (पंक्तियों की संख्या के लिए चर a का प्रयोग कीजिए।)

3. एक टोकरी में 60 केले हैं। आप टोकरियों की संख्या के पदों में केले की कुल संख्या को किस प्रकार लिखेंगे? (टोकरियों की संख्या के लिए b का प्रयोग कीजिए।)

4. रानी अपनी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी को जन्म दिन के उपलक्ष्य पर दो-दो टॉफियाँ बाँटती है। विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात होने पर क्या आप कुल टॉफियों की संख्या के लिए सूत्र बता सकते हैं? (विद्यार्थियों की संख्या के लिए m का प्रयोग कीजिए।)

5. सीमा गुड़िया की बड़ी बहन है। सीमा गुड़िया से 5 वर्ष बड़ी है तो–

   (a) सीमा की आयु गुड़िया की आयु के पदों में लिखें।

   (b) जब गुड़िया की आयु x वर्ष है तो सीमा की आयु बताइए।

6. अमरूद की बड़ी टोकरियों में से छोटी टोकरियों में अमरूद को रखा जाना है। जब एक बड़ी टोकरी को खाली किया जाता है तो उसके अमरूदों से तीन छोटी टोकरियाँ भर जाती हैं और फिर भी 25 अमरूद शेष रह जाते हैं। यदि एक छोटी टोकरी में अमरूदों की संख्या को x लिया जाय, तो एक बड़ी टोकरी में अमरूदों की संख्या क्या है?

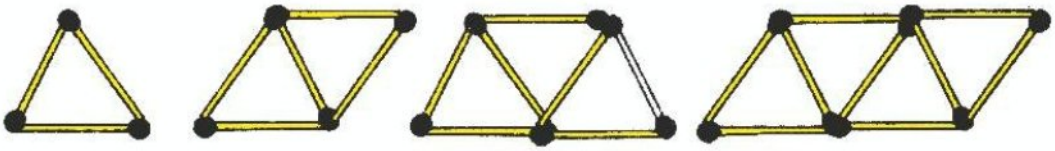
7. (a) तीलियों से बने हुए वर्गों के नीचे दिए हुए प्रतिरूपों (आकृति 2) को देखिए ये वर्ग अलग-अलग नहीं हैं। दो संलग्न वर्गों में एक तीली उभयनिष्ठ है। इस प्रतिरूप को देखिए और वह नियम ज्ञात कीजिए जो वर्गों की संख्या के पदों में आवश्यक तीलियों की संख्या देता है।



(a) (b) (c) (d)

(आकृति–2)

   (b) तीलियों से बने त्रिभुजों का एक प्रतिरूप (आकृति–3) दर्शा रही है। व्यापक नियम ज्ञात कीजिए जो त्रिभुजों की संख्या के पदों में आवश्यक तीलियों की संख्या देता है।



(a) (b) (c) (d)

(आकृति–3)

12.4 सामान्य नियमों में चरों का प्रयोग

आइए अब हम सब देखें कि गणित की दूसरी शाखा से सम्बन्धित कुछ ऐसे सामान्य नियम, जिन्हें हम पहले ही पढ़ चुके हैं, किस प्रकार चरों का प्रयोग करते हुए व्यक्त किए जा सकते हैं।

12.4.1 अंकगणित के नियम

1. दो संख्याओं के योग की क्रम विनिमेयता

हम जानते हैं कि $3 + 5 = 8$ और $5 + 3 = 8$ है।

अर्थात् $3 + 5 = 5 + 3$ है।

जैसा कि हम पूर्ण संख्याओं के अध्याय में देख चुके हैं, किसी भी दो पूर्ण संख्याओं के लिए यह सत्य है। संख्याओं का यह गुण संख्याओं के योग की **क्रम विनिमेयता** कहलाता है। 'क्रम विनिमेय' का अर्थ है 'क्रम उलटना'। योग में संख्याओं के क्रम को बदलने से उनके योग में कोई परिवर्तन नहीं आता। चरों का प्रयोग, इस गुण को एक संक्षिप्त रूप में व्यक्त करता है। मान लीजिए कि a और b दो चर हैं जो किसी भी संख्या का मान ले सकते हैं।

तब, $a + b = b + a$ होता है।

एक बार जब हम इस नियम को इस रूप में लिख लेते हैं तो इसमें सभी विशिष्ट स्थितियाँ सम्मिलित हो जाती हैं। यदि $a = 3$ और $b = 6$ है तो हमें $3 + 6 = 6 + 3$ प्राप्त होता है। यदि $a = 7$ और $b = 5$ है तो हमें $7 + 5 = 5 + 7$ प्राप्त होता है, इत्यादि।

2. दो संख्याओं के गुणन की क्रम विनिमेयता

हम पूर्ण संख्याओं के अध्याय में पढ़ चुके हैं कि दो पूर्ण संख्याओं के गुणन में, जिन दो संख्याओं का गुणा किया जाता है उनके क्रम को उलटने से गुणनफल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

उदाहरणार्थ $5 \times 6 = 30$ और $6 \times 5 = 30$ है।

अतः $5 \times 6 = 6 \times 5$ है।

संख्याओं का यह गुण संख्याओं के गुणन की क्रम विनिमेयता कहलाती है। गुणन में क्रम को बदलने पर गुणनफल में कोई परिवर्तन नहीं आता है। योग की तरह ही चर a और b का प्रयोग करके हम दो संख्याओं के गुणन की क्रम विनिमेयता को $a \times b = b \times a$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि यहाँ a और b किसी भी संख्या का मान ले सकते हैं।

इस व्यापक नियम द्वारा सभी विशिष्ट स्थितियाँ, जैसे– $3 \times 5 = 5 \times 3$ या $7 \times 5 = 5 \times 7$ इत्यादि प्राप्त हो जाती हैं।

3. संख्याओं की वितरणता

हम जानते हैं–

$$5 \times 48 = 5 \times (40 + 8)$$
$$= 5 \times 40 + 5 \times 8$$
$$= 200 + 40 = 240$$

$5 \times (40+8) = (5 \times 40) + (5 \times 8)$ अतः 5 से 48 के गुणा को 40 और 8 के योग पर वितरित (Distribute) किया जा सकता है। यह 5, 40 और 8 ही नहीं, किन्हीं भी तीन संख्याओं के लिए सत्य है। यह गुण संख्याओं के योग पर **गुणन की वितरणता (Distributivity of multiplication over addition of numbers)** कहलाती है। हम चरों का प्रयोग करके, संख्याओं के इस गुण को भी व्यापक और साथ-ही-साथ संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं।

मान लीजिए कि a, b और c कोई तीन चर हैं और इनमें से प्रत्येक किसी भी संख्या का मान ग्रहण कर सकता है। तब,

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ होता है।

संख्याओं के गुण अति आकर्षक होते हैं। चरों का प्रयोग, हमें इन गुणों को व्यापक और संक्षिप्त रूप में व्यक्त करने में समर्थ बनाता है।

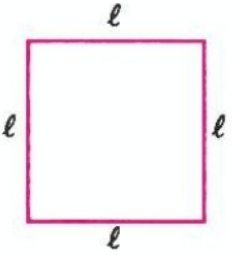
संख्याओं के ऐसे ही कुछ और गुण ज्ञात कीजिए और उन्हें चरों का प्रयोग करते हुए व्यापक रूप में व्यक्त कीजिए।

12.5 क्षेत्रमिति से नियम

हम क्षेत्रमिति (Mensuration) के अध्याय में वर्ग के परिमाप और आयत के परिमाप के बारे में पहले ही पढ़ चुके हैं। अब उन्हें एक नियम के रूप में लिखने के लिए वापस चलते हैं।

1. वर्ग का परिमाप

हम यह जानते हैं कि एक बहुभुज (3 या अधिक रेखाखंडों से बनी बंद आकृति) का परिमाप (Perimeter) उसकी भुजाओं का लम्बाइयों का योग होता है। वर्ग में चार भुजाएँ होती हैं और प्रत्येक की लम्बाई बराबर होती है।



(आकृति–4)

अतः वर्ग का परिमाप = वर्ग की भुजाओं की लम्बाइयों का योग

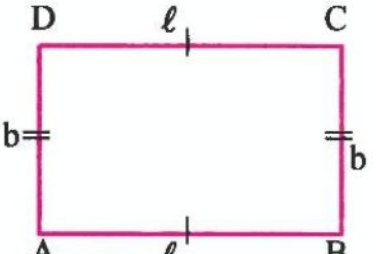
$= \ell + \ell + \ell + \ell$

$= 4\ell$

इस प्रकार, हम वर्ग के परिमाप का एक नियम प्राप्त कर लेते हैं। चर ℓ का प्रयोग कर हम एक व्यापक नियम लिख पाते हैं।

2. आयत का परिमाप

हम जानते हैं कि एक आयत की चार भुजाएँ होती हैं। उदाहरण के लिए आयत ABCD (आकृति–5) की चार भुजाएँ AB, BC, CD और DA हैं। एक आयत की सम्मुख भुजाएँ सदैव बराबर होती हैं। इसलिए, आइए आयत ABCD की भुजाओं AB और CD की लम्बाई को ℓ से व्यक्त करें और भुजाओं AD और BC की लम्बाई को b से व्यक्त करें।



(आकृति–5)

अतः, आयत का परिमाप = AB की लम्बाई + BC की लम्बाई + CD की लम्बाई + AD की लम्बाई

$= \ell + b + \ell + b$

$= (\ell + \ell) + (b + b)$

$= 2\ell + 2b$

आयत का परिमाप $2\ell + 2b$, जहाँ ℓ और b क्रमशः आयत की लम्बाई और चौड़ाई हैं।

$\ell = b$ होने पर क्या होगा? यदि आयत के परिमाप को चर p से व्यक्त करें, तो आयत के परिमाप का नियम होगा $p = 2\ell + 2b = 2\ell + 2\ell = 4\ell$, जो कि वर्ग के परिमाप के लिए है।

प्रश्नावली – 12.2

1. **साहचर्य का नियम–** तीन संख्याओं 15, 28 और 14 के योग पर विचार कीजिए। हम यह योग दो प्रकार से प्राप्त कर सकते हैं–

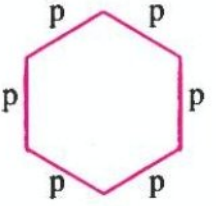
   (a) हम पहले 15 और 28 को जोड़कर 43 प्राप्त कर सकते हैं और 43 में 14 जोड़कर कुल योग 57 प्राप्त कर सकते हैं। या

   (b) हम पहले 28 और 14 को जोड़कर 42 प्राप्त कर सकते हैं और फिर इसे 15 में जोड़कर कुल योग 57 प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार $(15 + 28) + 14 = 15 + (28 + 14)$ हुआ।

   ऐसा किसी भी तीन संख्याओं के लिए किया जा सकता है। यह गुण संख्याओं के योग का साहचर्य (Associative) गुण कहलाता है। इस गुण को चर a, b और c का प्रयोग करते हुए एक व्यापक रूप में व्यक्त कीजिए।

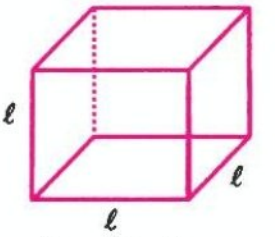
2. समबाहु त्रिभुज की एक भुजा को k से दर्शाया जाता है। इस समबाहु त्रिभुज के परिमाप को k का प्रयोग करते हुए व्यक्त कीजिए।

3. एक समषड्भुज (Regular hexagon) (आकृति–6) की एक भुजा को p से व्यक्त किया गया है। p का प्रयोग करते हुए इस समषड्भुज के परिमाप को व्यक्त कीजिए। (संकेत– एक समषड्भुज की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं और सभी कोण बराबर होते हैं।)



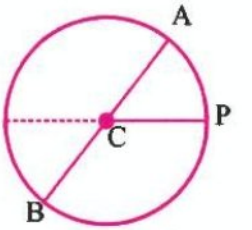
(आकृति–6)

4. घन (cube) एक त्रिविमीय (Three dimensional) आकृति है, जैसा कि आकृति 7 में दिखाया गया है। इसके 6 फलक होते हैं और ये सभी सर्वसम (Identical) वर्ग होते हैं। घन के एक किनारे की लम्बाई ℓ से दी जाती है। घन के किनारों की कुल लम्बाई के लिए एक सूत्र ज्ञात कीजिए।



(आकृति–7)

5. वृत्त का व्यास वह रेखाखंड है जो वृत्त पर स्थित दो बिन्दुओं को जोड़ता है और उसके केन्द्र से होकर जाता है। वृत्त की त्रिज्या (r) उस पर स्थित किसी बिन्दु P को केन्द्र C से जोड़ने वाली रेखाखंड की लम्बाई है। संलग्न आकृति–8 में AB वृत्त का व्यास है और C उसका केन्द्र है। वृत्त के व्यास (d) को उसकी त्रिज्या (r) के पदों में व्यक्त कीजिए।



(आकृति–8)

12.6 चरों वाले व्यंजक

आइए हम कुछ अंक गणितीय व्यंजकों (Expressions) का उदाहरण लें :

$2 \times 10 + 3$, $-4 \times 3 + 5$,

$8 - 5 \times 2$, $14 - (5-2)$,

$3 \times 6 - 5$ $5 \times 7 - 3 \times 4$ इत्यादि

ये उपर्युक्त व्यंजक 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 इत्यादि जैसी संख्याओं से बनते हैं। ऐसे व्यंजकों को बनाने के लिए चारों संक्रियाओं योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन का प्रयोग किया जा सकता है।

व्यंजकों को चरों का प्रयोग करके भी प्राप्त किया जा सकता है। उदाहरण के लिए 2n, 6m, $x + 12$, $y - 3$ इत्यादि चरों वाले व्यंजक हैं। चरों वाले ये व्यंजक चरों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ करने के बाद प्राप्त होते हैं। उदाहरणार्थ व्यंजक 2n चर n को 2 से गुणा करने पर बनता है, व्यंजक $(x + 12)$ चर x में 12 जोड़ने पर बनता है इत्यादि।

हम जान चुके हैं कि चर विभिन्न मान ले सकते हैं, इनका कोई निश्चित मान नहीं होता है। परंतु ये संख्याएँ हैं। इसी कारण संख्याओं की ही तरह इन पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ भी की जा सकती हैं।

एक महत्त्वपूर्ण बात ध्यान देने योग्य है कि एक संख्यात्मक व्यंजक जैसे–

$5 \times 4 + 6$ का मान निकाला जा सकता है।

उदाहरणार्थ $5 \times 4 + 6 = 20 + 6 = 26$

परन्तु $(5x + 6)$ जैसे व्यंजक, जिसमें एक चर x आ रहा है, का मान निकालना संभव नहीं है। यदि चर x का मान दिया हो, केवल तभी व्यंजक का मान निकाला जा सकता है। उदाहरणार्थ जब $x = 4$ है, तो

$5x + 6 = 5 \times 4 + 6 = 26$ है, जो पहले भी प्राप्त हुआ था।

नीचे हम देखेंगे कि व्यंजक कैसे बनाए जाते हैं।

	व्यंजक	कैसे बनाया गया
(a)	$x + 5$	x में 5 जोड़ने पर
(b)	$y - 4$	y में 4 घटाने पर
(c)	$7a$	a को 7 से गुणा करने पर
(d)	$\frac{m}{5}$	m को 5 से भाग देने पर
(e)	$2x - y$	पहले x में 2 से गुणा करके प्राप्त गुणनफल में से y घटाने पर

इसी प्रकार के दस अन्य सरल व्यंजक लिखिए और बताइए कि वे किस प्रकार बनाए गए हैं। हमें व्यंजक को तब भी बना पाना चाहिए, जब निर्देश दिए जाएँ कि उसे कैसे बनाना है। निम्नलिखित उदाहरण को देखिए–

(a)	y में 7 जोड़ने पर मिली संख्या	$y + 7$
(b)	10 में से x घटाने पर मिली संख्या	$10 - x$
(c)	y की 5 गुनी संख्या	$5y$
(d)	x में 8 का भाग देने पर मिली संख्या	$\frac{x}{8}$
(e)	m का –5 से गुणा करने पर मिली संख्या	$-5m$
(f)	y में 10 से गुणा और फिर गुणनफल में 7 जोड़ना	$10y + 7$

ऐसे ही दस और तरीके लिखिए और इनसे बने व्यंजक बनाइए।

प्रश्नावली – 12.3

1. आप तीन संख्याओं 7, 10 और 12 से संख्याओं वाले (चर नहीं) जितने व्यंजक बना सकते हैं बनाइए। एक संख्या का एक से अधिक बार प्रयोग नहीं किया जाना चाहिए। केवल योग, व्यवकलन (घटाना) और गुणन संक्रियाओं का ही प्रयोग करें। (उदाहरणार्थ $10 + 7 - 12$)

2. निम्नलिखित में से कौन-से केवल संख्याओं वाले व्यंजक हैं?

(a) $x + 5$ (d) $7y$

(b) $10 \times 9 - 7$ (e) $9 - 9z$

(c) $5 \times 4 - zy$ (f) $5 \times 17 - 4 \times 16 + 3x$

3. निम्न व्यंजकों को बनाने में प्रयुक्त संक्रियाओं (योग, व्यवकलन, गुणन, विभाजन) को देखिए और बताइए कि ये व्यंजक किस प्रकार बनाए गए हैं?

(a) $x + 9$ (b) $x - 9$ (c) $13y$ (d) $\frac{y}{13}$

(e) $2y + 15$ (f) $2y - 15$ (g) $7p$ (h) $-7p + 2$ (i) $-7p - 3$

4. निम्नलिखित स्थितियों के लिए व्यंजक दीजिए–

(a) a में 5 जोड़ना

(b) a में 5 घटाना

(c) a को 5 से गुणा करना

(d) a को 5 से भाग देना

(e) m में से 7 घटाना

(f) –m को 7 से गुणा करना

(g) –m को 7 से भाग देना

(h) m को –5 से गुणा करना

5. निम्नलिखित स्थितियों के लिए व्यंजक दीजिए–

(a) m के 7 गुना में 6 जोड़ना

(b) 2a में 13 जोड़ना

(c) x का –5 से गुणा करना

(d) x को –5 से गुणा करके परिणाम में 10 जोड़ना

(e) x को 5 से गुणा करके परिणाम में 15 घटाना

(f) y को –5 से गुणा करके परिणाम को 18 में जोड़ना

6. (a) k और 9 का प्रयोग करके अलग-अलग व्यंजक बनाइए। प्रत्येक व्यंजक में दोनों एक-एक बार होने चाहिए।

(b) m, 5 और 7 का प्रयोग करके व्यंजक बनाइए। प्रत्येक व्यंजक में m अवश्य होना चाहिए। हर व्यंजक केवल दो अलग-अलग संख्या संक्रियाओं का प्रयोग करें।

12.7 व्यावहारिक रूप से व्यंजकों का प्रयोग

हमारे व्यावहारिक जीवन में कई ऐसी परिस्थितियाँ आती है जहाँ व्यंजकों का उपयोग करना जरूरी होता है। आइए ऐसी परिस्थितियों को जानने का प्रयत्न करें–

क्र. सं.	परिस्थिति में वर्णित (साधारण भाषा में वर्णित)	चर	व्यंजकों का प्रयोग करते हुए कथन
1.	सोनू की उम्र मोनू से 5 वर्ष अधिक है।	मान लीजिए मोनू की उम्र x वर्ष है।	सोनू की उम्र (x+5) वर्ष है।
2.	गुड़िया सीमा से 3 वर्ष छोटी है।	मान लीजिए सीमा की आयु x वर्ष है।	गुड़िया की आयु (x–3) वर्ष है।
3.	राकेश के पिता की आयु राकेश की आयु के दोगुने से 10 वर्ष अधिक है।	मान लीजिए राकेश की आयु x वर्ष है।	राकेश के पिता की आयु (2x+10) वर्ष है।
4.	विकास की आयु मनोज की आयु की तिगुनी है।	मान लीजिए मनोज की आयु x वर्ष है।	विकास की आयु 3x वर्ष है।
5.	आज से 7 वर्ष पहले राधा की आयु क्या थी?	मान लीजिए राधा की वर्तमान आयु y वर्ष है	आज से 7 वर्ष पहले राधा की आयु (y–7) वर्ष थी।
6.	आज प्रति लीटर तेल का मूल्य प्रति किलोग्राम चावल के मूल्य का 4 गुना है।	मान लीजिए चावल का प्रति कि.ग्रा. मूल्य pरु. है।	प्रति लीटर तेल का मूल्य 4p रु. है।
7.	चावल का प्रति कि.ग्रा. मूल्य गेहूँ के प्रति कि.ग्रा. मूल्य से 2 रु. अधिक है।	मान लीजिए प्रति किग्रा गेहूँ का मूल्य p रु. है।	चावल का प्रति कि.ग्रा. मूल्य (p+2) रु. है।
8.	एक कार की चाल उसी सड़क पर जाते हुए एक बस की चाल से 20 कि.मी./घंटा अधिक है।	मान लीजिए बस की चाल x कि.मी./घंटा है।	कार की चाल (x+20) कि.मी./घंटा है।

ऐसी ही कुछ अन्य परिस्थितियों को ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। आप अनुभव करेंगे कि साधारण भाषा में वर्णित ऐसे अनेक कथन आपको देखने को मिलेंगे जहाँ पर आप चरों वाले व्यंजकों का प्रयोग करते हुए कथनों में बदल सकते हैं।

प्रश्नावली – 12.4

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) सुशीला की वर्तमान आयु x वर्ष लीजिए–

(i) बताइए 5 वर्ष पूर्व उसकी आयु कितनी थी?

(ii) बताइए 4 वर्ष बाद वह कितने वर्ष की हो जाएगी?

(iii) सुशीला के दादाजी की आयु सुशीला के आयु की 7 गुनी है। उसके दादाजी की आयु क्या है?

(iv) सुशीला की बड़ी बहन की आयु सुशीला की आयु के दोगुने से 3 वर्ष कम है। उसकी बड़ी बहन की आयु क्या है?

(b) एक आयताकार हॉल की लम्बाई उसकी चौड़ाई के दोगुने से 5 मीटर अधिक है। यदि चौड़ाई b मीटर है, तो लम्बाई क्या है?

(c) एक आयताकार बक्से की ऊँचाई h सेमी है। इसकी लम्बाई, ऊँचाई की 3 गुनी है और चौड़ाई, लम्बाई से 7 सेमी कम है। बक्से की लम्बाई और चौड़ाई को ऊँचाई के पदों में व्यक्त कीजिए।

(d) एक बस x किमी प्रति घंटा की चाल से चल रही है। यह पटना से राजगीर की ओर जा रही है। बस के 3 घंटे चलने के बाद राजगीर की दूरी 22 किमी बची रह जाती है। x का प्रयोग करते हुए पटना से राजगीर की दूरी बताइए।

2. व्यंजकों के प्रयोग से बने निम्न कथनों को साधारण भाषा के कथनों में बदलिए–

(उदाहरणार्थ हमारी कक्षा में x विद्यार्थी हैं और स्कूल में 15x विद्यार्थी हैं। साधारण भाषा में स्कूल में विद्यार्थियों की कुल संख्या हमारी कक्षा के विद्यार्थियों की 15 गुनी है।)

(a) राखी के पास x रुपये हैं। उसकी सहेली के पास 3 x रुपये हैं।

(b) एक अभ्यास-पुस्तिका का मूल्य pरु. है। एक पुस्तक का मूल्य 4 pरु. है।

(c) सुरेश के पास y बकरियाँ हैं। रमेश के पास $\frac{y}{4}$ बकरियाँ हैं।

(d) मोहन की आयु r वर्ष है। उसके पिताजी की आयु 4r वर्ष है और उसकी माँ की आयु (4r – 5) वर्ष है।

3. (a) सपना की आयु x वर्ष दी हुई है। बताइए (x+5) और (x–3) क्या दर्शाएँगे?

(b) दिया हुआ है कि एक कक्षा के m विद्यार्थी टेलीविजन देखना पसंद करते हैं। 3m क्या दर्शाएगा तथा $\frac{m}{2}$ क्या दर्शाएगा?

12.8 एक समीकरण क्या है?

आइए आकृति – 1 में दी हुई तीलियों से बने अक्षर V के प्रतिरूप को याद करें। अपनी सुविधा के लिए हमने यहाँ आकृति–1 पुनः बनाई है जिसे नीचे दिखाया गया है–



विभिन्न संख्याओं के V बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या सारणी–1 में दी गई है। हम इस सारणी को पुनः यहाँ बना रहे हैं।

सारणी–1

बनाए गए V की संख्या	1	2	3	4	5	6	.....
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	8	10	12	.....

हम जान गए हैं कि आवश्यक तीलियों की संख्या को निम्न नियम से प्राप्त किया जा सकता है –

2n यदि n बनाए गए V की संख्या है।

सलमा पूछती है कि V की संख्या दी हुई हो तो आवश्यक तीलियों की संख्या किस प्रकार ज्ञात की जा सकती है? और इसके विपरीत यदि माचिस की तीलियों की संख्या दी हुई हो तो V की संख्या कैसे ज्ञात की जा सकती है?

हम अपने आपसे पूछते हैं यदि 12 तीलियाँ दी हुई हो, तो कितने V बनेंगे? हम कह सकते हैं कि– $2n = 12$ ----- (1) दी हुई है।

यहाँ हम एक प्रतिबंध प्राप्त करते हैं, जो चर n द्वारा संतुष्ट होना चाहिए। यह प्रतिबंध समीकरण (equation) का एक उदाहरण है।

हमारे प्रश्न का उत्तर सारणी–1 को देखकर प्राप्त किया जा सकता है। n के विभिन्न मानों को देखिए। यदि n=1, तो तीलियों की संख्या 2 है। स्पष्टतः प्रतिबंध संतुष्ट नहीं हुआ है, इसी प्रकार हम इसकी जाँच कर सकते हैं।

n	2n	क्या प्रतिबंध संतुष्ट है? हाँ/नहीं
1	2	नहीं
2	4	नहीं
3	6	नहीं
4	8	नहीं
5	10	नहीं
6	12	हाँ
7	14	नहीं

हम पाते हैं कि केवल $n = 6$ के लिए उपर्युक्त प्रतिबंध अर्थात् समीकरण $2n = 12$ संतुष्ट हो जाता है। 6 के अतिरिक्त किसी भी अन्य मान के लिए यह समीकरण संतुष्ट नहीं होता है। आइए एक अन्य उदाहरण को देखें।

मोनू, सोनू से 3 वर्ष छोटा है। सोनू की आयु x वर्ष लेने पर, मोनू की आयु (x–3) वर्ष होगी। मान लीजिए कि मोनू की आयु 9 वर्ष है। तब, देखें कि किस प्रकार हम सोनू की आयु ज्ञात करते हैं। हमें मोनू की आयु $= x - 3 = 9$ ------- (2) प्राप्त है।

यह चर x में एक समीकरण है। हम x के विभिन्न मानों के लिए (x–3) के मानों की एक सारणी बनाते हैं।

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x–3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	-	-

जिन प्रविष्टियों को रिक्त छोड़ा गया है उन्हें पूरा कीजिए सारणी से हम देखते हैं कि केवल $x = 12$ के लिए प्रतिबंध $x - 3 = 9$ संतुष्ट होता है। अन्य किसी भी मान जैसे $x = 13$ या $x = 11$ के लिए प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता। अतः सोनू की आयु 12 वर्ष है।

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है **हर समीकरण चर पर एक प्रतिबंध होता है। यह चर के निश्चित मान के लिए ही संतुष्ट होता है।** समीकरण $2n = 12$ चर n के मान 6 से ही संतुष्ट होता है। इसी प्रकार, समीकरण

$x–3 = 9$ चर x के मान 12 से ही संतुष्ट होता है।

यहाँ ध्यान दीजिए कि एक समीकरण के दोनों पक्षों के बीच में समता चिह्न (=) होता है। समीकरण बताता है कि बाएँ पक्ष (वाम पक्ष) (LHS) का मान दाएँ पक्ष (दक्षिण पक्ष) (RHS) के मान के बराबर है।

यदि बायाँ पक्ष दायाँ पक्ष के बराबर न हो तो हमें समीकरण प्राप्त नहीं होता। जैसे-- यह कथन कि 2n संख्या 12 से बड़ा है, अर्थात् $2n > 12$ यह एक समीकरण नहीं है। इसी प्रकार

यह कथन कि 2n संख्या 12 से छोटा है अर्थात् $2n < 12$ भी एक समीकरण नहीं है।

आइए अब $12 - 3 = 9$ पर विचार करें।

यहाँ भी बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष के बीच समता का चिह्न (=) है। दोनों पक्षों में चर संख्या नहीं है। यहाँ दोनों पक्षों में संख्याएँ हैं। हम इन्हें संख्यात्मक समीकरण कह सकते हैं। सामान्यतः समीकरण शब्द का प्रयोग केवल एक या अधिक चरों के होने पर ही किया जाता है।

आइए एक प्रश्न हल करें।

बताइए निम्नलिखित में से कौन-कौन से कथन समीकरण हैं? समीकरण में सम्बद्ध चर भी बताइए–

(a) $x - 5 = 15$ (हाँ, x)

(b) $7 \times 3 = 21$ (नहीं, यह एक संख्यात्मक समीकरण है)

(c) $2m > 20$ (नहीं)

(d) $2p = 8$ (हाँ, p)

(e) $\frac{k}{9} < 10$ (नहीं)

समीकरणों के कुछ उदाहरण नीचे दिए जा रहे हैं (कुछ समीकरणों में सम्बद्ध चर भी दिए गए हैं)।

वांछित रिक्त स्थानों को भरिए–

जैसे– $x + 17 = 27$ (चर x)

और $p + 5 = 9$ (चर p)

(a) $3k = 15$ (चर ____)

(b) $\frac{m}{5} = 4$ (चर ____)

(c) $3\ell + 5 = 20$ (चर ____)

(d) $5n - 16 = 16$ (चर ____)

12.8.1 समीकरण का हल

हम पिछले अनुच्छेद में देख चुके हैं कि समीकरण (1) $2n = 12, n = 6$ से संतुष्ट हो गया था। n का कोई भी अन्य मान इस समीकरण (1) को संतुष्ट नहीं करता।

अतः समीकरण में चर का वह मान जो समीकरण को संतुष्ट करता है, उस समीकरण का हल (solution) कहलाता है।

इस प्रकार $n = 6$ समीकरण $2n = 12$ का हल है।

ध्यान दीजिए कि $n = 5$ समीकरण $2n = 12$ का हल नहीं है क्योंकि $n = 5$ के लिए $2n = 2 \times 5 = 10$ है और यह 12 नहीं है।

समीकरण $x - 3 = 9$ ..... (2) को लें। यह समीकरण $x = 12$ से संतुष्ट हो जाता है क्योंकि $x = 12$ के लिए समीकरण का बायाँ पक्ष $= 12 - 3 = 9 =$ दायाँ पक्ष है। यह समीकरण $x = 13$ से संतुष्ट नहीं होता है क्योंकि $x = 13$ के लिए समीकरण का बायाँ पक्ष $= 13 - 3 = 10$ है, जो दायाँ पक्ष के बराबर नहीं है।

इस प्रकार $x = 12$ समीकरण $x - 3 = 9$ का हल है परंतु $x = 13$ इस समीकरण का हल नहीं है। $x = 13$ समीकरण का हल क्यों नहीं है? आप अपने शब्दों में स्पष्ट कीजिए।

अब आप आगे दी गई सारणी की प्रविष्टियों को पूरा कीजिए। तीसरे खण्ड में स्पष्ट कीजिए कि प्रत्येक भाग के लिए आपका उत्तर हाँ अथवा नहीं क्यों है?

क्र.सं.	समीकरण	चर का नाम	हल (हाँ / नहीं)	कारण
1.	$x + 5 = 15$	$x = 5$	नहीं	$5 + 5 = 10 = 15$
2.	$x + 5 = 15$	$x = 8$		
3.	$x + 5 = 15$	$x = 10$		
4.	$p - 7 = 1$	$p = 6$		
5.	$p - 7 = 1$	$p = 7$		
6.	$p - 7 = 1$	$p = 8$		
7.	$3n = 24$	$n = 5$		
8.	$3n = 24$	$n = 8$		
9.	$\frac{k}{7} = 3$	$k = 20$		
10.	$\frac{k}{7} = 3$	$k = 21$		
11.	$2\ell + 5 = 13$	$\ell = 3$		
12.	$2\ell + 5 = 13$	$\ell = 4$		

12.8.2 किसी समीकरण को हल करना

समीकरण $2n = 12$ का हल ज्ञात करने के लिए हमने n के विभिन्न मानों की एक सारणी तैयार की थी और फिर इस सारणी से n का वह मान चुन लिया जो समीकरण का हल था (अर्थात् समीकरण को संतुष्ट करता था)। हमने **प्रयत्न और जाँच विधि (a trial and error method) से इसे किया।** अब हम समीकरण को हल करने की एक सीधी विधि अपनाते हैं। अगली कक्षा में हम समीकरण हल करने की और ज्यादा क्रमबद्ध विधि का अध्ययन करेंगे। वर्तमान

स्थिति में, हम केवल नीचे दिए हुए सरल समीकरणों के बारे में ही बात करेंगे–

(i) $x + 5 = 15$ (iii) $2n = 12$

(ii) $x - 3 = 9$ (iv) $\frac{k}{7} = 3$

(i) $x + 5 = 15$ को हल करना

पिछली कक्षाओं से आप जान चुके हैं कि ऐसे कथन जिनमें (.....) + 5 = 15 हो, में रिक्त खानों की संख्या की कैसे ज्ञात किया जाता है।

x के लिए समीकरण $x + 5 = 15$ --------- (a)

और (.....) + 5 = 15 --------- (b)

यदि हम (b) में रिक्त स्थान के स्थान पर x लिखें तो हमें समीकरण प्राप्त हो जाता है। इसका अर्थ है कि रिक्त खाने के लिए वह संख्या ज्ञात करनी है जिससे समीकरण संतुष्ट हो जाता है। खाने में एक ऐसी संख्या आएगी जिसे 5 में जोड़ने पर 15 प्राप्त होगा। यह 15 में से 5 घटाने के बराबर है, अर्थात् 10 है।

इस प्रकार समीकरण का हल $x = 10$ है।

हम इस हल की जाँच भी कर सकते हैं–

बायाँ पक्ष $= x + 5 = 10 + 5 = 15 =$ दायाँ पक्ष

(ii) $x - 3 = 9$ को हल करना

$x - 3 = 9$ की तुलना (.....) $- 3 = 9$ से कीजिए।

इसका अर्थ है कि समीकरण को हल करने के लिए रिक्त खाने की संख्या ज्ञात करना है। यहाँ रिक्त खाने की संख्या योग से मिलती है, जो (.....) $= 9 + 3 = 12$ है।

अतः समीकरण $x - 3 = 9$ का हल $x = 12$ है, जिसे हम पहले से भी जानते हैं।

इस हल की जाँच भी कर सकते हैं–

बायाँ पक्ष $= x - 3 = 12 - 3 = 9 =$ दायाँ पक्ष

(iii) $2n = 12$ को हल करना

हम यह जानते हैं कि $2n = 2 \times n$ है।

अतः जिस समीकरण को हम हल करना चाहते हैं, वह $2 \times n = 12$ है।

इसकी तुलना $2 \times (\quad) = 12$ से कीजिए।

n में समीकरण को हल करने का अर्थ है कि रिक्त खाने में संख्या ज्ञात करना। हम जानते हैं कि रिक्त खाने की संख्या को विभाजन द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

इस प्रकार $(\quad) = \frac{12}{2} = 6$ है।

अतः समीकरण $2n = 12$ का हल $n = 6$ है, जिसे हम पहले से जानते हैं।

हम इस हल की जाँच कर सकते हैं।

बायाँ पक्ष $= 2 \times n = 2 \times 6 = 12 =$ दायाँ पक्ष।

(iv) $\frac{k}{7} = 3$ को हल करना

हम $\frac{k}{7} = 3$ की तुलना $\frac{\square}{7} = 3$ से करते हैं।

k में समीकरण हल करने का अर्थ वही है जो रिक्त खाने में संख्या ज्ञात करने का है।

अब, $\square = 7 \times 3 = 21$ है। अतः उपर्युक्त समीकरण का हल

$k = 21$ है।

हम इस हल की जाँच कर सकते हैं--

बायाँ पक्ष $\frac{k}{7} = \frac{21}{7} = 3 =$ दायाँ पक्ष

12.9 समीकरण का प्रयोग करना

प्रीति, आयशा और रशीदा बहुत उत्साहित हैं। वे सब कक्षा में बताती हैं कि उन्होंने पहेलियाँ हल करने की विधि ज्ञात कर ली है। वे इसे पूरी कक्षा को समझाना चाहते हैं।

पहले वे सीमा से कहते हैं कि वह कोई भी संख्या सोच ले। इसके बाद वे कहते हैं कि इस संख्या को 5 से गुणा करके परिणाम बता दे। वह कहती है, परिणाम 60 है। रशीदा तुरंत कहती है कि सीमा की संख्या 12 हैं। सीमा इस उत्तर से सहमत हो जाती है। पूरी कक्षा को आश्चर्य होता है।

प्रीति और आयशा कहती हैं– सीमा ने अपने मन में कोई संख्या सोची। वह कुछ भी हो सकती है। इसलिए, हमने पहले उस संख्या को x मान लिया। अब x को 5 से गुणा करने पर 5x प्राप्त होता है। सीमा ने बताया कि यह 60 है। इस प्रकार हमें प्रतिबंध $5x = 60$ प्राप्त हो गया। यह एक सरल समीकरण है। हमने सरल विधि से इस समीकरण को हल कर लिया। हमने x के स्थान पर $\square$ रखकर समीकरण $5 \times \square = 60$ लिख लिया। हमें प्राप्त होता है : $\square = \frac{60}{5} = 12$

इस प्रकार 12 वांछित हल है, अर्थात् सीमा द्वारा सोची गई संख्या 12 थी।

पूरी कक्षा ने ताली बजाई। उन्होंने सीखा कि समीकरण कितना उपयोगी होता है। गणित शिक्षक ने कहा **इस पहेली के अलावा कई और पहेलियाँ बन सकती हैं और यह सब भी समीकरणों द्वारा हल की जा सकती हैं।** परन्तु ऐसा करने के लिए, हमें समीकरणों को हल करने की एक क्रमबद्ध विधि सीखनी होगी। ऐसी विधि हम अगले वर्ष सीखेंगे।

प्रश्नावली – 12.5

1. निम्नलिखित में कौन-से कथन समीकरण (चर संख्याओं के) हैं? सकारण उत्तर दीजिए। समीकरणों में सम्बद्ध चर भी लिखिए।

(a) $15 = x + 18$

(b) $(k - 8) > 5$

(c) $\frac{9}{3} = 3$

(d) $8 \times 5 - 12 = 28$

(e) $6 \times 7 - 10 = 2x$

(f) $2n + 3 = 13$

(g) $7 = 11 \times 5 - 12 \times 4$

(h) $\frac{3p}{2} < 5$

(i) $z + 8 > 12$

(j) $7 - x = 5$

2. सारणी के तीसरे स्तम्भ में प्रविष्टियों को पूरा कीजिए–

क्र. सं.	समीकरण	चर का मान	समीकरण संतुष्ट : हाँ / नहीं
(a)	$5x = 25$	$x = 3$	
(b)	$5x = 25$	$x = 4$	
(c)	$5x = 25$	$x = 5$	
(d)	$k + 8 = 20$	$k = 10$	
(e)	$k + 8 = 20$	$k = 11$	
(f)	$k + 8 = 20$	$k = 12$	
(g)	$m - 5 = 9$	$m = 16$	
(h)	$m - 5 = 9$	$m = 15$	
(i)	$m - 5 = 9$	$m = 14$	
(j)	$\frac{t}{7} = 7$	$t = 47$	
(k)	$\frac{t}{7} = 7$	$t = 48$	
(l)	$\frac{t}{7} = 7$	$t = 49$	

3. प्रत्येक समीकरण के सामने कोष्ठकों में दिए मानों में से समीकरण का हल चुनिए। दर्शाइए कि अन्य मान समीकरण को संतुष्ट नहीं करते हैं।

(a) $4a = 24$ (5, 6, 9, 10)

(b) $k + 11 = 23$ (10, 11, 12, 13)

(c) $p - 7 = 8$ (12, 13, 14, 15)

(d) $k/7 = 7$ (49, 48, 46, 44)

(e) $m + 21 = 37$ (14, 15, 16, 17)

(c) $n + 5 = 2$ (1,2, –3, –4, 0)

4. (a) नीचे दी हुई सारणी को पूरा कीजिए और इस सारणी को देखकर ही समीकरण $x + 6 = 13$ का हल ज्ञात कीजिए–

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x+6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

(b) नीचे दी हुई सारणी को पूरा कीजिए और इस सारणी को देखकर ही समीकरण $y - 6 = 4$ का हल ज्ञात कीजिए–

y	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y – 6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

(c) नीचे दी हुई सारणी को पूरा कीजिए और इस सारणी को देखकर ही समीकरण $5t = 40$ का हल ज्ञात कीजिए–

t	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5t	-	-	-	-	-	-	-	-	-

(d) सारणी को पूरा करते हुए समीकरण $\frac{z}{3} = 4$ का हल ज्ञात कीजिए–

z	8	9	10	11	12	13	14	15	-	-
$\frac{z}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$	-	-	-	-	-	-	-

5. हल कीजिए–

(a) $y + 6 = 18$ (b) $z - 7 = 20$ (c) $7p = 140$

(d) $\frac{q}{5} = 7$ (e) $\frac{k}{8} = 12$ (f) $9y = 81$

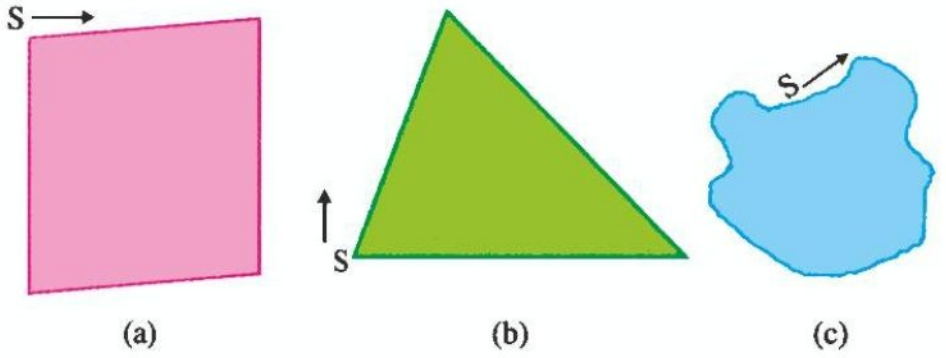
(g) $x - 3 = 0$ (h) $t + 50 = 75$



अध्याय-13 क्षेत्रमिति : परिमिति एवं क्षेत्रफल

13.1 भूमिका

जब हम तल की आकृतियों के बारे में बात करते हैं तो हम उन आकृतियों के क्षेत्र तथा परिसीमा के बारे में भी विचार करते हैं। हमें इन आकृतियों की तुलना के लिए कुछ मापों की आवश्यकता होती है। आइए हम कुछ ऐसी ही आकृतियों और उनके मापों को देखते हैं।



चित्र–1 विभिन्न आकृतियाँ

13.2 परिमाप

ऊपर की सभी आकृति में यदि आप बिन्दु S से आरंभ करके रेखाखंडों या किनारे के साथ-साथ (अनुदिश) चलते हैं तो आप पुनः बिन्दु S पर पहुँच जाते हैं। इस प्रकार आपने आकार (आकृति) के चारों तरफ एक पूरा चक्कर लगाया। यह तय की गई दूरी इन आकृतियों को घेरने में लगे धागे या तार की लम्बाई के बराबर है।

यह दूरी बंद आकृतियों का परिमाप कहलाती है। अर्थात् किसी भी आकृति को घेरने में लगे तार की लम्बाई, उस आकृति का परिमाप है।

हम अपने दैनिक जीवन में भी परिमाप की संकल्पना का बहुत बार प्रयोग करते हैं जैसे–

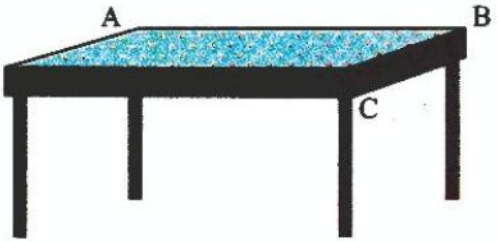
- एक किसान जब अपने खेत के चारों तरफ बाड़ लगाता है।
- एक इंजीनियर जो एक बाग के चारों तरफ एक चारदीवारी बनाने की योजना तैयार करता है।
- एक व्यक्ति जो क्रिकेट ग्राउंड की सीमा रेखा (Boundary) रस्सी लगाकर तैयार करता है।

स्वयं करें

ऐसी आप पाँच स्थितियों का उदाहरण दीजिए जहाँ परिमाप जानने की आवश्यकता होती है।

स्वयं करें

1. टेबल के ऊपरी तल के किनारों को स्केल की सहायता से नापिए और लिखिए–



(i) AB = ... सेमी (ii) BC = ... सेमी

(iii) CD = ... सेमी (iv) DA = ... सेमी

अब चारों भुजाओं की लम्बाइयों का योगफल =AB + BC + CD + DA

= ..... सेमी + ... सेमी + ... सेमी +..... सेमी

= ..... सेमी

यह मेज की ऊपरी सतह का परिमाप है।

2. इसी प्रकार शतरंज बोर्ड के बाहरी किनारों को मापिए और उन्हें जोड़िए।

PQ + QR + RS + SP = ... सेमी + ...सेमी + ...सेमी + ... सेमी

= ..... सेमी



13.2.1 आयत का परिमाप

आइए अब हम एक आयत PQRS, जिसकी लम्बाई 10 सेमी और चौड़ाई 4 सेमी है, का परिमाप ज्ञात करने पर विचार करते हैं।

आयत का परिमाप = चारों भुजाओं की लम्बाइयों का योगफल

= PQ + QR + RS + SP

= PQ + QR + PQ + QR

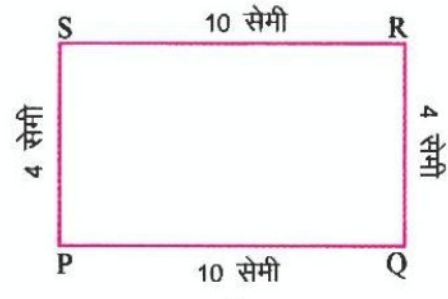
= 2 x PQ + 2 x QR

= 2 x (PQ + QR)

= 2 x (10 सेमी + 4 सेमी)

= 2 x 14 सेमी

= 28 सेमी



∴ PQ = RS or SR और QR = SP or PS

आयत की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

अतः आयत का परिमाप = लम्बाई + चौड़ाई + लम्बाई + चौड़ाई

= 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)

स्वयं करके देखें

आयत की लम्बाई	आयत की चौड़ाई	आयत का परिमाप
20 सेमी	12 सेमी	2 (20+12) = 64 सेमी
18 सेमी	10 सेमी	
7.5 सेमी	3.5 सेमी	
0.7 सेमी	0.50 मीटर	

उदाहरण–1 : एक आयताकार बगीचा 40 मीटर लम्बा और 30 मीटर चौड़ा है। उसकी परिमिति ज्ञात कीजिए।

हल : बगीचे की लम्बाई = 40 मी

बगीचे की चौड़ाई = 30 मी

बगीचे की परिमिति = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 x (40 मीटर + 30 मीटर)

= 2 x 70 मीटर

= 140 मीटर

अतः बगीचे का परिमिति 140 मीटर है।

उदाहरण–2 : एक चादर 3 मीटर लम्बी और 2.5 मीटर चौड़ी है। उसके चारों ओर गोटा लगाना है। गोटे की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : चादर का बाहरी किनारा एक आयत है। गोटे की लम्बाई आयत के परिमाप के बराबर होगी।

गोटे की लम्बाई = आयत का परिमाप

= 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 x (3 मी + 2.5 मी)

$= 2 \times 5.5$ मीटर

$= 11$ मीटर

उदाहरण–3 : एक आयताकार पार्क की लम्बाई 40 मीटर और चौड़ाई 35 मीटर है, इसके चारों तरफ 4 घेरे तार लगाना है तो आवश्यक तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : स्पष्ट है कि घेरने वाले तार को पार्क के परिमाप को 4 बार पूरा तय करता है। इसलिए आवश्यक तार की लम्बाई पार्क के परिमाप की चौगुनी होगी।

∴ पार्क का परिमाप $= 2 \times$ (लम्बाई + चौड़ाई)

$= 2 \times (40 \text{ मी} + 35 \text{ मी})$

$= 2 \times 75$ मीटर

$= 150$ मीटर

अतः आवश्यक तार की लम्बाई $= 4 \times 150 \text{ मी} = 600$ मीटर होगी।

उदाहरण–4 : एक खेत की लम्बाई 50 मीटर और चौड़ाई 40 मीटर है। यदि एक दिन में 10 मीटर लम्बी मेड़ की जाती हो तो खेत के चारों तरफ मेड़ करने में कितने दिन लगेंगे?

हल : चूँकि खेत आयताकार है

इस आयताकार खेत की लम्बाई $= 50$ मीटर

आयताकार खेत की चौड़ाई $= 40$ मीटर

मेड़ बनाने में लगने वाले समय ज्ञात करने के लिए हमें इस आयताकार खेत के परिमाप की आवश्यकता है।

आयताकार खेत का परिमाप $= 2 \times$ (लम्बाई + चौड़ाई)

$= 2 \times (50 \text{ मी} + 40 \text{ मी})$

$= 2 \times 90$ मीटर

$= 180$ मीटर

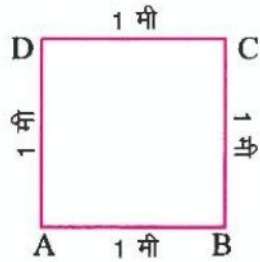
चूँकि खेत में 10 मीटर मेड़ पूरी करने में लगा समय $= 1$ दिन

अतः खेत के चारों तरफ 180 मीटर मेड़ पूरी करने समय $= 180 \div 10 = 18$ दिन

13.2.2सम आकृतियों का परिमाप (ऐसी आकृतियाँ जिनकी भुजाओं की माप समान हो)

मोहन एक वर्गाकार कागज जिसकी प्रत्येक भुजा 1 मी है के चारों ओर एक रंगीन टेप लगाना चाहता है। क्या आप बता सकते हैं कि मोहन को कितनी लम्बी रंगीन टेप की आवश्यकता होगी?

इसके लिए हमें वर्गाकार कागज का परिमाप ज्ञात करने की आवश्यकता है।



आवश्यक टेप की लम्बाई = वर्गाकार कागज का परिमाप

= 1 मी + 1 मी + 1 मी + 1 मी

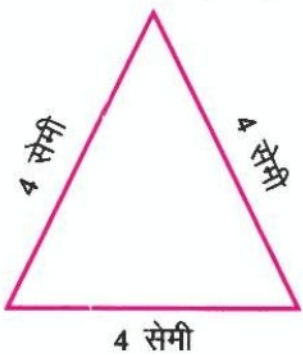
= 4 मी

हम यह जानते हैं कि वर्ग की चारों भुजाओं की लम्बाई बराबर होती है। इसलिए, हम ऐसे भी लिख सकते हैं–

आवश्यक टेप की लम्बाई = 4 x 1 मी = 4 मी

यहाँ वर्ग का परिमाप = 4 x एक भुजा की लम्बाई

इसी प्रकार हम अब 4 सेमी भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप ज्ञात करेंगे।



अतः समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 x 4 सेमी = 12 सेमी

हमने देखा कि

वर्ग का परिमाप = 4 x एक भुजा की लम्बाई

समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 x एक भुजा की लम्बाई

इसी प्रकार एक समपंचभुज का परिमाप = 5 x एक भुजा की लम्बाई

स्वयं करें

अपने चारों ओर ऐसी वस्तुओं का पता लगाइए जो सम आकृति में हों और उनका परिमाप ज्ञात कीजिए।

उदाहरण–5 : शुभम् 75 मीटर भुजा वाले वर्गाकार पार्क के किनारे-किनारे 2 चक्कर लगाता है। उसके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : वर्गाकार पार्क का परिमाप = 4 x एक भुजा की लम्बाई

= 4 x 75 मीटर = 300 मीटर

शुभम् द्वारा 1 चक्कर में तय की गई दूरी = 300 मीटर

अतः शुभम् द्वारा 2 चक्कर में तय की गई दूरी = 2 x 300 मीटर

= 600 मीटर

उदाहरण–6 : 10 मीटर भुजा के एक वर्गाकार क्षेत्र के चारों ओर तार लगवाना है। 6 रुपये प्रति मीटर की दर से तार लगाने का खर्च ज्ञात कीजिए।

हल : वर्गाकार क्षेत्र का परिमाप = 4 x एक भुजा की लम्बाई

= 4 x 10 मीटर = 40 मीटर

एक मीटर तार लगाने में व्यय = 6 रुपये

अतः 40 मीटर तार लगाने में व्यय = 6 x 40 रुपये

= 240 रुपये

वर्गाकार क्षेत्र के चारों ओर तार लगाने में 240 रुपये खर्च होंगे।

उदाहरण–7 : एक समपंचभुज का परिमाप 20 सेमी है। इसकी एक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : एक समपंचभुज में 5 बराबर भुजाएँ होती हैं।

इसलिए, एक भुजा की लम्बाई ज्ञात करने के लिए, हम परिमाप को 5 से भाग दे सकते हैं।

समपंचभुज की एक भुजा की लम्बाई = 20 सेमी ÷ 5

= 4 सेमी

अतः समपंचभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 4 सेमी है।

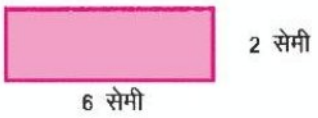
प्रश्नावली – 13.1

1. नीचे दी गई आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए–

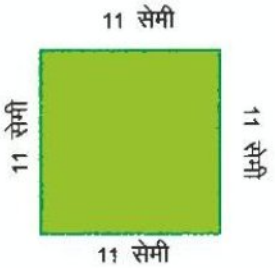
(a)



(b)



(c)



(d)



2. एक आयताकार जमीन का टुकड़ा 20.50 मीटर लम्बा और 16.75 मीटर चौड़ा है। उसके चारों ओर चहारदीवारी बनी है। चहारदीवारी की कुल लम्बाई ज्ञात कीजिए।

3. एक धावक 40 मीटर लम्बे और 20 मीटर चौड़े एक आयताकार मैदान के चारों तरफ 8 चक्कर लगाता है। धावक द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

4. एक समद्विबाहु त्रिभुज जिसकी प्रत्येक समान भुजा 6 सेमी की हो तथा तीसरी भुजा 8 सेमी हो का परिमाप ज्ञात कीजिए।

5. एक वर्ग की एक भुजा 15 सेमी है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

6. एक समषटभुज का परिमाप 66 सेमी है। प्रत्येक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

7. एक धागे का टुकड़ा 24 सेमी लम्बाई का है। प्रत्येक भुजा की लम्बाई क्या होगी, यदि उस धागे से बनाया जाता है–

   (a) एक वर्ग (b) एक समबाहु त्रिभुज

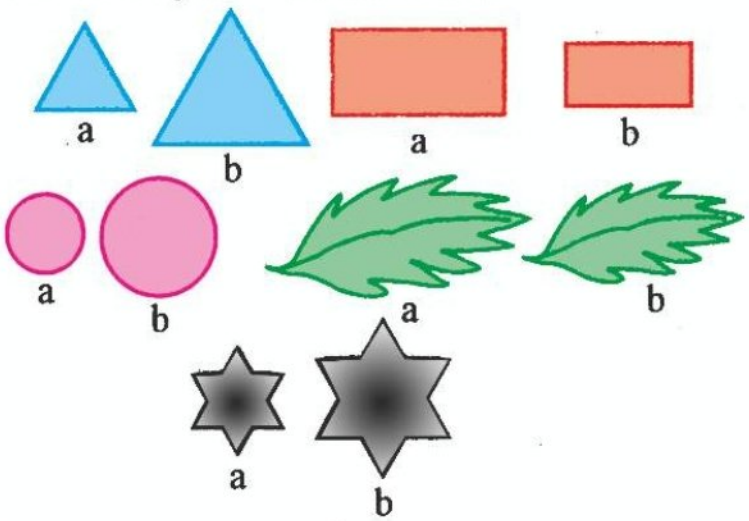
   (c) एक समषटभुज

8. 80 मी भुजा वाले वर्गाकार बगीचे के चारों ओर बाड़ लगाने का व्यय 25 रुपये प्रति मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

9. राधा 80 मीटर लम्बाई और 45 मीटर चौड़ाई वाले आयत के चारों ओर दौड़ती है और सीमा 75 मीटर भुजा वाले वर्ग के चारों ओर दौड़ती है। कौन कम दूरी तय करती है?

13.3 क्षेत्रफल

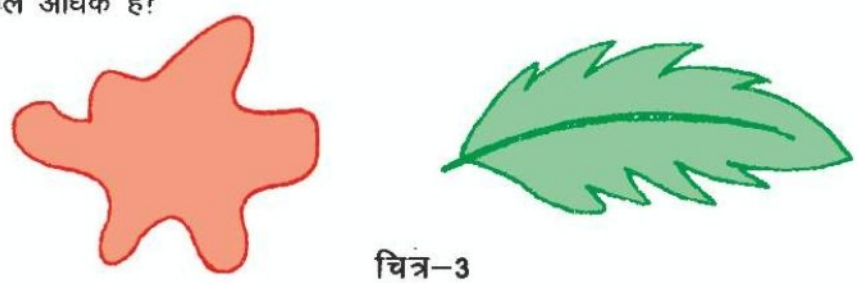
नीचे दी गई सभी बंद आकृतियाँ तल में कुछ क्षेत्र को घेरती हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इनमें से कौन-सी आकृतियाँ ज्यादा क्षेत्र घेरती हैं?



चित्र–2

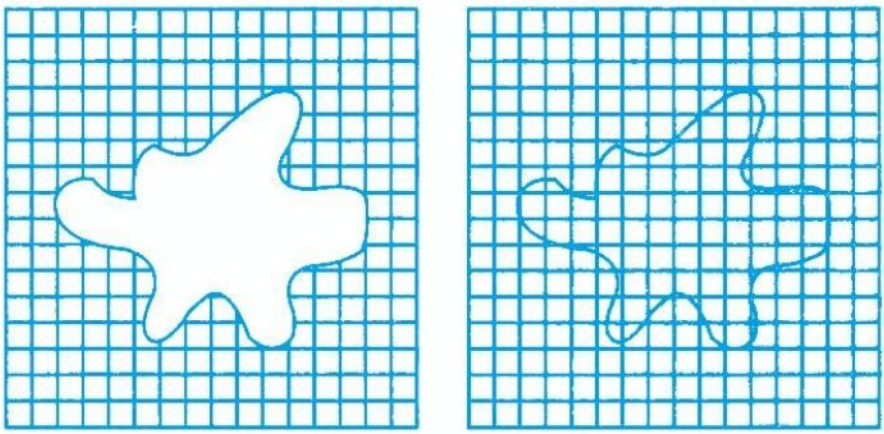
बंद आकृतियों द्वारा घेरे गए क्षेत्र को उसका क्षेत्रफल कहते हैं।

क्या नीचे दी गई आकृतियों को देखने पर पता लगता है कि इनमें से किस आकृति का क्षेत्रफल अधिक है?



चित्र–3

इन आकृतियों को देखने मात्र से यह पता लगाना मुश्किल है कि किसका क्षेत्रफल अधिक है। इसके लिए हमें एक वर्गीकृत पेपर या ग्राफ पेपर पर इन अनियमिताकार वस्तुओं को रखकर पेंसिल से इनकी आकृति खींचकर तुलना करनी होगी।



चित्र–4

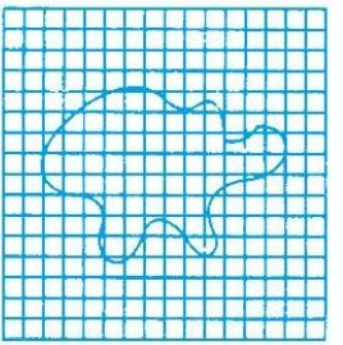
इस प्रकार आकृति द्वारा घेरे गए सेमी और छोटे वर्ग की संख्या ही उसका क्षेत्रफल है। हम जिस किसी भी आकृति का क्षेत्रफल मापना या जानना चाहते हैं, वर्ग हमेशा उसे पूर्णतया नहीं ढँकते हैं। इसके लिए हम–

- एक पूरे वर्ग के क्षेत्रफल को हम 1 वर्ग इकाई मात्रक लेते हैं। (यदि ये वर्ग सेंटीमीटर के हैं, तब एक पूरे वर्ग का क्षेत्रफल 1 वर्ग सेमी होगा।)
- यदि किसी वर्ग का आधे से अधिक भाग आकृति से घिरा है, तो ऐसे वर्ग को हम एक पूरा वर्ग ही गिनते हैं।
- यदि किसी वर्ग का ठीक-ठीक आधा भाग गिनती में आता है, तो ऐसे वर्ग के क्षेत्रफल को $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई लेते हैं।
- $\frac{1}{2}$ से कम घिरे वर्ग को हम छोड़ देते हैं।

उदाहरण–1

दिए गए वर्गों को गिनकर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : ग्राफ पेपर पर इस आकृति की बाहरी रूपरेखा खींची है। ग्राफ पेपर पर वर्गों की संख्या को गिनिए। कुल वर्ग की संख्या इस आकृति का क्षेत्रफल होगा।



चित्र–5

क्र. सं.	घिरे हुए वर्ग	संख्या	क्षेत्रफल (वर्ग इकाई)
(i)	पूरे घिरे हुए वर्ग	40	40
(ii)	आधे घिरे हुए वर्ग	6	$6\times\frac{1}{2}=3$
(iii)	आधे से अधिक घिरे हुए वर्ग	6	6
(iv)	आधे से कम घिरे हुए वर्ग	4	0

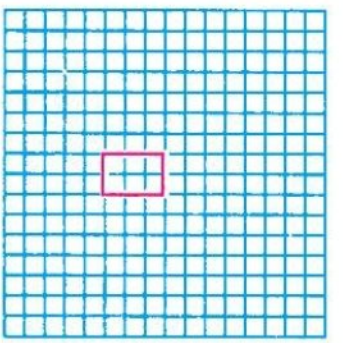
कुल क्षेत्रफल = 40 + 3 + 6 + 0 = 49 वर्ग इकाई

स्वयं करें– ग्राफ पेपर पर पत्तियों, फूल की पंखुड़ियों तथा ऐसी ही अन्य वस्तुओं को अंकित कीजिए और उनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13.3.1 आयत का क्षेत्रफल

एक ग्राफ पेपर की सहायता से क्या हम किसी आयत का क्षेत्रफल दिखा सकते हैं? क्या हम यह बता सकते हैं कि एक आयत जिसकी लम्बाई 3 सेमी और चौड़ाई 2 सेमी है का क्षेत्रफल कितना है?

ग्राफ पेपर पर 3 सेमी और 2 सेमी भुजा का एक आयत बनाइए जिस पर 1 सेमी × 1 सेमी के वर्ग हों (चित्र–6)। यह आयत 6 वर्गों को पूर्णतया ढँक लेता है।



चित्र–6

आयत का क्षेत्रफल = 6 वर्ग सेमी है। जिसे हम 3 × 2 वर्ग सेमी (लम्बाई × चौड़ाई) के रूप में भी लिख सकते हैं।

कुछ आयतों की भुजाओं की माप सारणी में दी गई है। ग्राफ पेपर पर रखकर तथा वर्गों की संख्या गिनकर इनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

लम्बाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल
5 सेमी	3 सेमी	.....
6 सेमी	4 सेमी	.....
8 सेमी	5 सेमी	.....

इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि

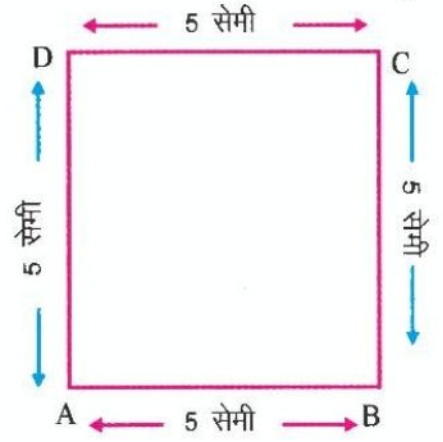
आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

स्वयं करके देखिए

1. अपने घर के पास खेलने वाले पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. अपने विद्यालय के किसी बरामदे के फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13.3.2 वर्ग का क्षेत्रफल

आइए अब हम एक वर्ग पर विचार करते हैं जिसकी भुजा की लम्बाई 5 सेमी है।



यदि इसे हम सेंटीमीटर ग्राफ पेपर पर रखते हैं, तब हम देखते हैं कि यह 25 वर्गों को पूर्णतया ढँक लेता है।

इसलिए वर्ग का क्षेत्रफल = 25 वर्ग सेमी = 5 × 5 वर्ग सेमी

सारणी में कुछ वर्गों की एक भुजा की लम्बाई दी गई है। ग्राफ पेपर की सहायता से उसके क्षेत्रफलों को ज्ञात कीजिए।

एक भुजा की लम्बाई	वर्ग का क्षेत्रफल
4 सेमी	----------
7 सेमी	----------
8 सेमी	----------

इससे हम निकालते हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

उदाहरण– 1 : एक आयत, जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 15 सेमी तथा 6 सेमी है, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए–

हल : आयत की लम्बाई = 15 सेमी

आयत की चौड़ाई = 6 सेमी

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 15 सेमी × 6 सेमी

= 90 वर्ग सेमी

उदाहरण– 2 : एक वर्गाकार कमरे के फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी एक भुजा की लम्बाई 11 मीटर है।

हल : वर्गाकार फर्श की भुजा = 11 मीटर

वर्गाकार फर्श का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= 11 मी × 11 मी

= 121 वर्ग मीटर

उदाहरण– 3 : एक खेत 40 मीटर लम्बा और 35 मीटर चौड़ा है। इसमें 400 वर्ग मीटर में चना और शेष में गेहूँ बोया गया है। बताइए, गेहूँ कितने क्षेत्र में बोया गया है?

हल : खेत की लम्बाई = 40 मीटर

खेत की चौड़ाई = 35 मीटर

खेत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 40 मी × 35 मी

= 1400 वर्ग मी

खेत में लगे चने वाले भाग का क्षेत्रफल = 400 वर्ग मीटर

∴ खेत में लगे गेहूँ वाले भाग का क्षेत्रफल

= कुल खेत का क्षेत्रफल – चने वाले भाग का क्षेत्रफल

= 1400 वर्ग मीटर – 400 वर्ग मीटर

= 1000 वर्ग मीटर

उदाहरण–4 : एक आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल 300 वर्ग मीटर है तथा इसकी लम्बाई 25 मीटर है। गत्ते की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल = 300 वर्ग मीटर

लम्बाई = 25 मीटर चौड़ाई = ?

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

इसलिए चौड़ाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}} = \frac{300}{25}$ मीटर = 12 मीटर

अतः, आयताकार गत्ते की चौड़ाई 12 मीटर है।

उदाहरण–5 : राकेश 5 मीटर चौड़ाई और 6 मीटर लम्बाई वाले एक कमरे में एक वर्गाकार टाइलें लगाना चाहता है। यदि प्रत्येक वर्गाकार टाइल की भुजा 0.5 मीटर हो, तो कमरे के फर्श को ढँकने के लिए कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी?

हल : कमरे की लम्बाई = 6 मीटर

चौड़ाई = 5 मीटर

अतः फर्श का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 6 मी × 5 मी

= 30 वर्ग मी

एक वर्गाकार टाइल का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

0.5 मी × 0.5 मी

= 0.25 वर्ग मी

$\therefore$ आवश्यक कुल टाइलों की संख्या = $\frac{\text{फर्श का क्षेत्रफल}}{\text{एक टाइल का क्षेत्रफल}}$

= $\frac{30}{0.25} = \frac{3000}{25} = 120$ टाइलें

उदाहरण–6 : यदि एक वर्ग की भुजा दूनी कर दी जाय तो क्षेत्रफल पहले वाले वर्ग के क्षेत्रफल का कितने गुना हो जाएगा?

हल : मान लीजिए कि वर्ग की भुजा = x मी

तो वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= x मी × x मी

= x^2 वर्ग मी

वर्ग की भुजा दोगुनी करने पर भुजा की लम्बाई = 2x मी

तो वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

अतः फर्श का क्षेत्रफल = 2 x मी × 2x मी

= $4x^2$ वर्ग मी

अतः स्पष्ट है कि भुजा की लम्बाई दोगुनी करने पर बने नए वर्ग का क्षेत्रफल पहले वाले वर्ग के क्षेत्रफल का चार गुना हो जाएगा।

प्रश्नावली – 13.2

1. निम्न आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनकी भुजाएँ नीचे दी गई हैं–

(a) लम्बाई 3.5 सेमी और चौड़ाई 2.5 सेमी

(b) लम्बाई 12 सेमी और चौड़ाई 6 सेमी

(c) लम्बाई 7 मीटर और चौड़ाई 70 सेमी

(d) लम्बाई 3 किलोमीटर और चौड़ाई 800 मीटर

2. उन वर्गों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनकी भुजाएँ निम्नलिखित हैं–

(a) 6 सेमी (b) 9 सेमी (c) 4 मीटर

3. एक आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल 144 वर्ग मीटर है। यदि इसकी चौड़ाई 24 मीटर है तो बगीचे की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

4. एक 10 सेमी × 12 सेमी आयताकार कागज के टुकड़े में 2 वर्ग सेमी के कितने टुकड़े काटे जा सकते हैं? प्रयोग करके जाँचिए।

5. एक कमरे के आयताकार फर्श की लम्बाई 6 मीटर 50 सेमी एवं चौड़ाई 2 मीटर 50 सेमी है। इस फर्श पर 10 सेमी × 5 सेमी की टाइलें बिछाने का खर्च ज्ञात कीजिए जबकि एक टाइल की कीमत 5 रु. है।

6. एक टेबल के ऊपरी आयताकार तल की लम्बाई 2 मीटर और चौड़ाई 0.5 मीटर है। इसे

पूरी तरह सनमाइका से ढँकने का खर्च रुपये में ज्ञात कीजिए जबकि सनमाइका की कीमत 180 रुपये प्रति वर्ग मीटर है।

7. एक दीवार की लम्बाई 30 मीटर और ऊँचाई 2 मीटर है। दीवार पर पुताई कराने का खर्च ज्ञात कीजिए जबकि पुताई का खर्च 50 रु. प्रति वर्ग मी है।

8. 6.5 मी लम्बाई एवं 4.0 मी चौड़ाई वाले आयताकार एक भूखंड पर 1.5 मी भुजा वाली वर्गाकार फूलों की 2 क्यारियाँ बनाई गई हैं। भूखण्ड के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. एक टाइल की माप 6 सेमी × 5 सेमी है। तब पता करें कि दिए क्षेत्रों को पूर्णतया ढँकने के लिए कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी। क्षेत्रों की माप निम्नानुसार है–

(a) 150 सेमी और 120 सेमी है।

(b) 145 सेमी और 30 सेमी है।

❋ ❋ ❋

राष्ट्रीय तंबाकू नियंत्रण कार्यक्रम

i) सभी तंबाकू उत्पाद हानिकारक हैं।

ii) कोई भी तंबाकू उत्पाद किसी भी मात्रा में सुरक्षित नहीं है।

iii) बीड़ी उतनी ही हानिकारक है जितनी की सिगरेट।

iv) सेकेंड हैंड धूम्रपान भी जानलेवा होता है।

v) तंबाकू चबाने से मुंह के कैंसर सहित कई रोग हो सकते हैं।

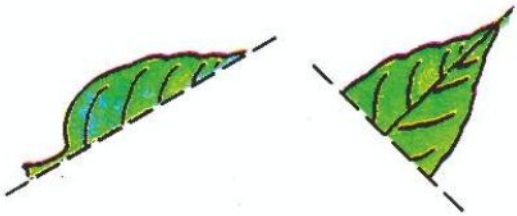
अध्याय-14 सममिति

14.1 भूमिका

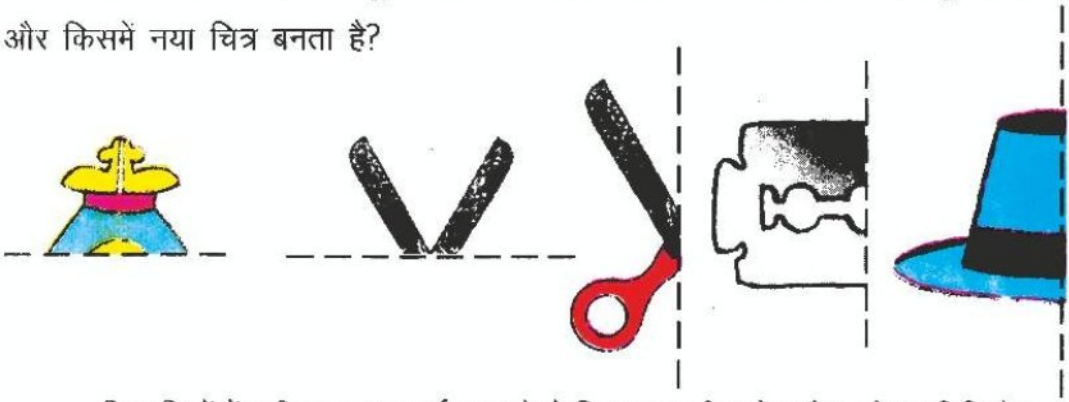
आपने पिछली कक्षाओं में सममिति के बारे में पढ़ा है। आइए उसका दोहराव करें व उसे और समझें।

दर्पण का कमाल

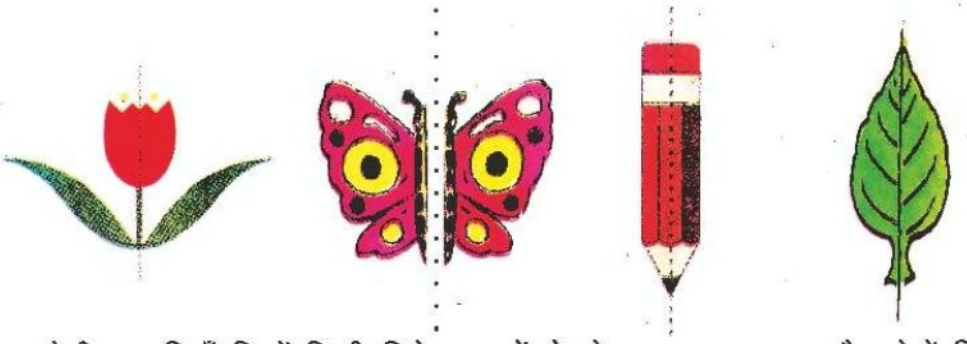
यहाँ आधी पत्ती के दो चित्र हैं। इनमें पत्ती को दो अलग-अलग तरह से काटकर आधा किया गया है। जहाँ से काटकर आधा किया गया है, वहाँ टूटी लाइन बनी है। दोनों चित्रों में टूटी लाइन पर दर्पण रखकर देखिए। किस चित्र पर काँच रखने से पूरी पत्ती दिखती है और किस चित्र में नहीं?



नीचे दिए गए चित्रों में टूटी लाइन पर दर्पण रखकर देखिए। किसमें चित्र पूरा होता है और किसमें नया चित्र बनता है?



जिन चित्रों में टूटी लाइन पर दर्पण रखने से चित्र पूरा प्रतीत होता है उनमें सममिति है।



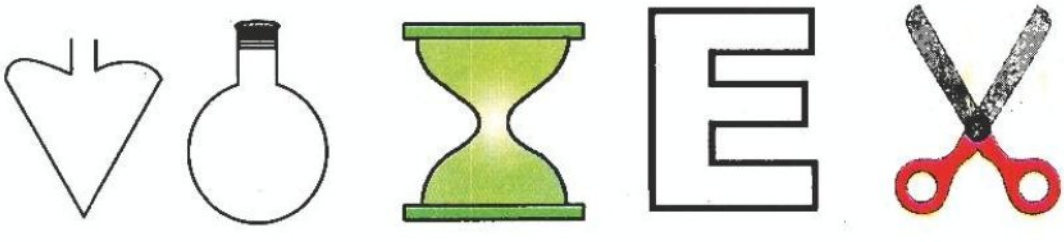
ऐसी आकृतियाँ जिन्हें किसी विशेष जगहों से मोड़ा या काटा जाए और दोनों हिस्से एक-दूसरे को पूरी तरह ढँक लें, वे सममित आकृतियाँ हैं। जिस रेखा के परितः इन्हें काटा या मोड़ा गया है उसे सममित अक्ष या सममित रेखा कहते हैं। ऊपर चित्र में सममित रेखा को दर्शाया गया है।

यदि हम आकृति के मोड़ने वाले स्थान पर एक दर्पण को रख देते हैं तो ये हमें दर्पण में देखने पर पूरी दिखाई देगी या हम उसे उस रेखा पर मोड़ें तो दूसरा भाग पूर्णतः ढक जाएगा। ये रेखाएँ सममित रेखा या सममित अक्ष कहलाती हैं।

आप भी अपने आस-पास बहुत-सी वस्तुएँ ऐसी देखते होंगे जहाँ आपको सममिति दिखाई पड़ती होगी। जैसे– बहुत से फूल, कुछ इमारत, जानवर के अंग आदि। ऐसी 5 वस्तुओं के चित्र बनाएँ और सममित अक्ष भी दिखाएँ।

कुछ करें

1. नीचे की आकृतियों में सममित अक्ष खींचिए–



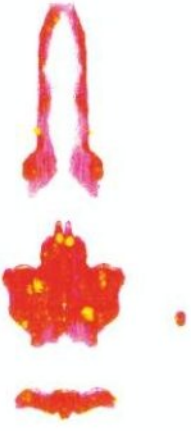
2. नीचे अंग्रेजी वर्णमाला के प्रथम 10 अक्षरों को लिखा गया है। किन-किन अक्षरों में सममित रेखा है?

A B C D E F G H I J

यह भी देखें कि किन-किन अक्षरों में एक से ज्यादा सममित रेखाएँ हैं?

क्रियाकलाप–1

- एक कागज को बीच से मोड़िए।
- कागज खोलकर उस पर स्याही की कुछ बूँदें टपकाइए।
- फिर उसे उसी मोड़ पर मोड़िए और दबाइए।
- अब कागज को खोलिए। आपको मोड़ के दोनों ओर एक ही तरह की आकृति मिलेगी। (चित्र)



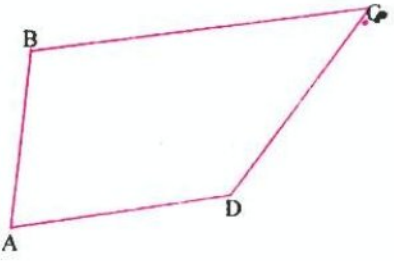
यह आकृति और आपके द्वारा बनाई गई आकृति दोनों सममित आकृतियाँ हैं। इसी तरह स्याही की बूँदों को कागज पर अलग-अलग जगह टपकाकर नई-नई सममित आकृतियाँ बनाकर देखिए।

स्वयं कीजिए

अब अपने आस-पास दिखाई देने वाली 20 वस्तुओं के चित्र एकत्र कीजिए। उन आकृतियों में से सममित आकृतियों को छाँटिए तथा उस पर सममित रेखा दर्शाइए।

क्रियाकलाप–2

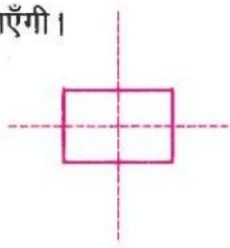
सरल ज्यामितीय आकृतियों के प्रकार से ही हम यह नहीं कह सकते उसमें सममित रेखा या अक्ष है अथवा नहीं।

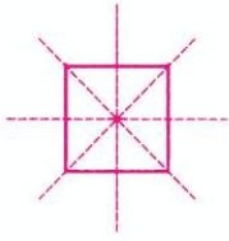


जैसे केवल यह कह देने से बात नहीं बनती कि एक चतुर्भुज में कितनी सममित रेखाएँ हैं क्योंकि यदि चतुर्भुज विषमबाहु हो तो शायद इसमें कोई भी सममिति का अक्ष न हो।

क्या आप सामने दिए गए विषमबाहु चतुर्भुज में कोई सममित अक्ष ढूंढ सकते हैं?

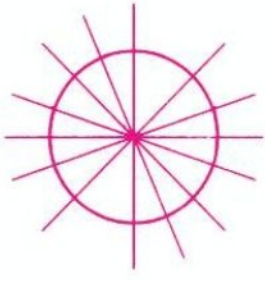
परन्तु यदि हम आयत, वर्ग, समबाहु त्रिभुज आदि की बात करें तो इनमें हमें एक से अधिक सममित रेखाएँ प्राप्त हो जाएँगी।



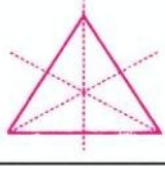


इसी प्रकार अलग-अलग चतुर्भुजों के लिए सममित रेखाओं की संख्या भी अलग-अलग होगी।

सोचिए एक वृत्त में कितनी सममित रेखाएँ होती हैं?



हम जानते हैं कि वृत्त का हर व्यास वृत्त को दो बराबर भागों में बाँटता है। अतः वह वृत्त की सममित रेखा हुई। चूँकि एक वृत्त में असंख्य व्यास खींचे जा सकते हैं। अतः वृत्त में असंख्य सममित रेखाएँ होती हैं। इसी प्रकार नीचे दी गई आकृतियों में सममिति के लिए तालिका को अपनी कॉपी में बनाइए और पूरा कीजिए।

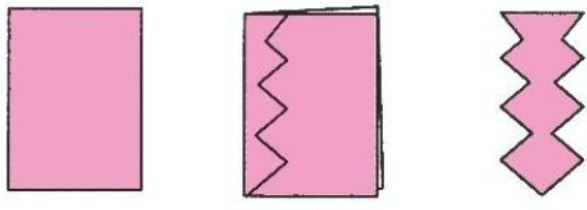
आकार	आकृति खाका या रूपरेखा	सममित रेखाओं की संख्या
समबाहु त्रिभुज		3
समांतर चतुर्भुज		
आयत		
समद्विबाहु त्रिभुज		
समचतुर्भुज		
समपंचभुज		

कुछ करें

1. पीपल का पत्ता देखकर बताएँ कि क्या वह सममित है?

स्वयं कीजिए

एक रंगीन कागज लेकर बीच से मोड़िए। चित्र में दिखाए अनुसार कैंची से कोई आकृति काटिए। कागज को खोलिए और देखिए।



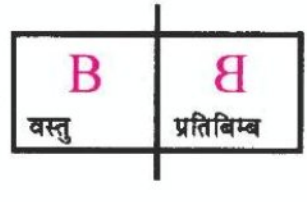
क्या आपने इस तरह कागज को काटते हुए किसी को देखा है? कहाँ?

यही काम कागज को एक से अधिक बार मोड़कर कीजिए। मजेदार आकृतियाँ मिलेंगी जिनका उपयोग अपनी कक्षा या कमरे को सजाने में कर सकते हैं।

14.2 प्रतिबिम्ब और सममिति

क्रियाकलाप–3 : एक दर्पण लीजिए। दर्पण के सामने प्रतिबिम्ब और सममिति एक-दूसरे से जुड़े हैं। B को रखें। चित्र में अंग्रेजी अक्षर B का प्रतिबिम्ब दर्शाया गया है। यदि दर्पण में बने प्रतिबिम्ब और अक्षर B को देखा जाए तो दोनों आकृतियाँ सममित होंगी तथा दर्पण एक सममित रेखा होगी। दर्पण की रेखा पर मोड़ने से B और उसका प्रतिबिम्ब एक-दूसरे को ढक लेंगे। ऐसा आप और अक्षरों के साथ भी करें। हिन्दी की अक्षर माला के अक्षर लेकर भी देखें।

जब वस्तु परावर्तित होती है तब उसकी लम्बाई और कोणों में बिल्कुल परिवर्तन नहीं होता केवल उनका पार्श्व परिवर्तित होता है। जैसे– लड़का दाएँ हाथ को सिर पर रखकर दर्पण में देख रहा है, परंतु दर्पण में बायां हाथ सिर पर दिख रहा है अर्थात् प्रतिबिम्ब में पार्श्व का परिवर्तन है।



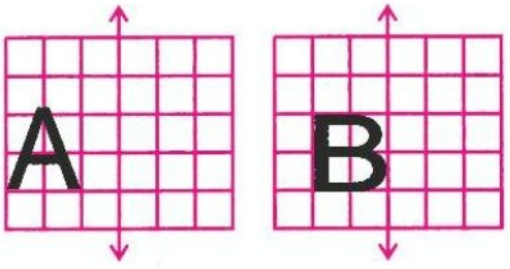
(a)



(b)

प्रश्नावली – 14

1. नीचे दी गई प्रत्येक आकृति में, अंग्रेजी वर्णमाला के एक अक्षर को ऊर्ध्वाधर रेखा के साथ दिखाया गया है। इस अक्षर का दी हुई दर्पण रेखा में प्रतिबिंब देखिए। बताइए कौन-सा अक्षर परावर्तन के बाद समान रहता है (जैसे– कौन-सा अक्षर प्रतिबिंब में समान दिखाई देता है) और कौन-सा नहीं?



अब इनके लिए भी प्रयास कीजिए।

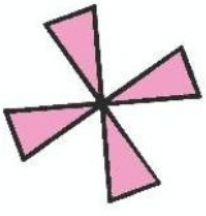
O E M N P H L T S V X

2. निम्न आकृतियों में सममित रेखा खींचिए–





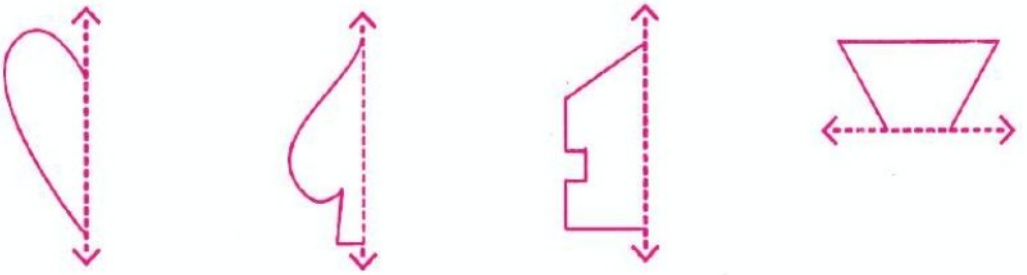








3. दी गई सममित आकृतियों को पूरा कीजिए–



4. इन सब को देखें–

A M U W E B C D

क ख ग र ह इ उ

इनमें से किनमें सममित रेखा खींची जा सकती है?





अध्याय-15 प्रायोगिक ज्यामिति

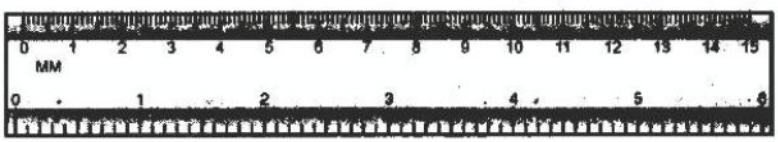
15.1 भूमिका

हम अनेक प्रकार की आकृतियाँ (Shapes) देखते हैं, जिनसे हम परिचित हैं। हम बहुत से चित्र बनाते हैं। इन चित्रों में विभिन्न आकृतियाँ निहित होती हैं। इन आकृतियों में से कुछ के बारे में हम पिछले अध्यायों में पढ़ भी चुके हैं।

इस अध्याय में, हम इनको बनाना सीखेंगे। इनको बनाने के लिए, हमें उन यंत्रों के बारे में जानने की आवश्यकता है जो हम उपयोग करेंगे। आइए उन्हें देखें तथा उनके नाम और प्रयोग के बारे में जानें।

15.2 ज्यामिति बक्से के यंत्र

1. **स्केल** : स्केल या रूलर की सहायता से हम रेखाखंड खींचते हैं तथा उनकी लम्बाइयों की माप करते हैं। इसमें एक किनारे के अनुदिश सेंटीमीटर के तो दूसरे किनारे के अनुदिश इंच के चिह्न बने होते हैं।



इसकी सहायता से हम रेखाखंडों को खींचते और मापते हैं।

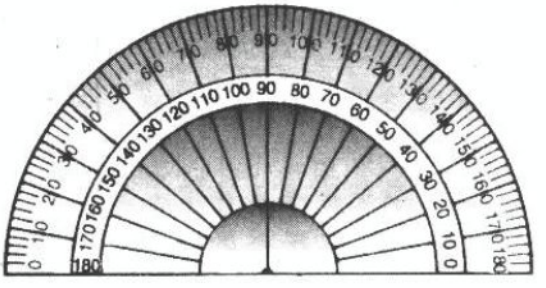
2. **परकार या कम्पास** : इसकी सहायता से चाप या वृत्त खींचते हैं। इसमें दो सिरे होते हैं। एक सिरा नुकीला तथा दूसरे में पेंसिल रखने का स्थान होता है।



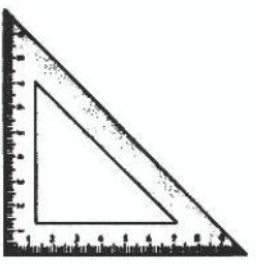
3. **डिवाइडर** : इसकी सहायता से लम्बाइयों की तुलना की जाती है। इसमें दो नुकीले सिरे होते हैं।

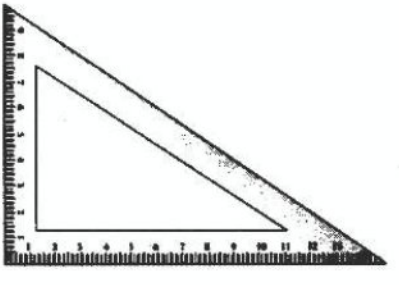


4. **चाँद या प्रोटेक्टर** : कोणों को मापने एवं खीचने के लिए हम चाँद का प्रयोग करते हैं। यह अर्द्धवृत्ताकार होता है जिसमें 0° से 180° भाग चिह्नित होते हैं।



5. **सेट स्क्वेयर** : ये दो त्रिभुजाकार यंत्र हैं। एक में शीर्षों पर कोण 45^0, 45^0, 90^0 और दूसरे में यह कोण 30^0, 60^0, 90^0 होते हैं। इसका उपयोग लंब रेखाओं और समांतर रेखाओं को खींचने में किया जाता है।

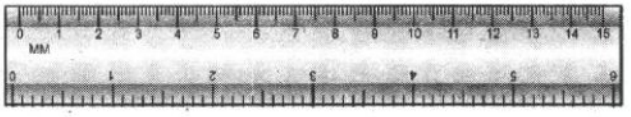




15.3 ज्यामितीय रचना

15.3.1 रेखाखंड खींचना

रेखाखंड स्केल सहायता से आसानी से खींचें और मापे जा सकते हैं।



चित्र–1 रेखाखंड को स्केल से मापना

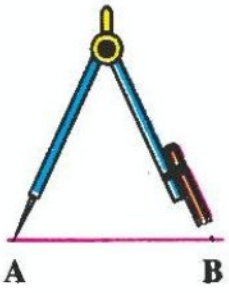
15.3.2 आइए अब हम दिए गए रेखाखंड की लम्बाई के बराबर रेखाखंड की रचना करें।

दी गई लम्बाई के बराबर रेखाखंड खींचने का सबसे आसान तरीका है उसे स्केल से मापना और उसी लम्बाई का एक अन्य रेखाखंड खींचना। इसके लिए हम स्केल और परकार का प्रयोग भी कर सकते हैं। आइए इस तरीके के चरणों को समझें।

चरण 1 – रेखाखंड $\overline{AB}$ दिया हुआ रेखाखंड है जिसकी लम्बाई ज्ञात नहीं है। इसकी लम्बाई के बराबर ही दूसरे रेखाखंड की रचना करनी है।



चरण 2 – परकार का नुकीला भाग A पर तथा पेंसिल वाला सिरा B पर रखेंगे। परकार का फैलाव ही दी गई रेखा की लम्बाई है।

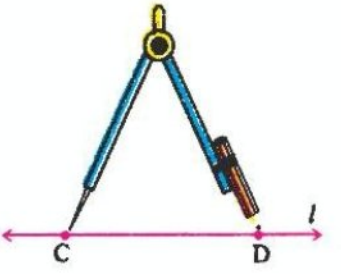


रेखा और रेखाखण्ड

दो बिन्दु A और B के बीच का सबसे छोटा रास्ता रेखाखंड $\overline{AB}$ को दर्शाता है। A और B रेखाखंड $\overline{AB}$ के अंत बिंदु कहलाते हैं।

रेखाखंड $\overline{AB}$ को एक दिशा में बिन्दु A से आगे और विपरीत दिशा में बिंदु B से आगे बिना किसी अंत के आगे बढ़ाने पर हमें बिंदु A और B से गुजरने वाली रेखा $\overleftrightarrow{AB}$ प्राप्त होगी।

चरण 3 – अब कोई रेखा ℓ खींचिए। ℓ पर कोई बिंदु C लीजिए। रेखा के एक सिरे यानी C बिन्दु पर परकार का नुकीला भाग तथा दूसरे सिरे पर परकार के उसी फैलाव को लेते हुए चाप खींचिए। चाप रेखा को बिंदु D पर काटती है। CD अभीष्ट रेखाखण्ड है जो AB की लम्बाई के बराबर है।



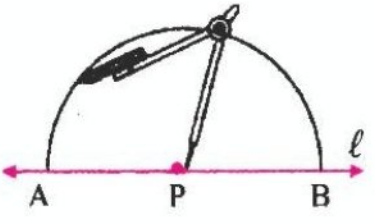
15.3.3 रेखा पर स्थित किसी बिन्दु पर लंब की रचना करना

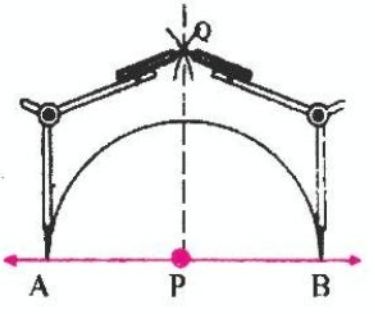
माना ℓ एक रेखा है तथा P उस पर स्थित कोई बिन्दु है। आपको ℓ रेखा के P बिन्दु पर एक लंब खींचना है। इस रचना के निम्न चरण हो सकते हैं–

चरण 1 – P को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से एक चाप की रचना कीजिए जो रेखा को A तथा B बिन्दु पर काटें।

चरण 2 – A और B को केन्द्र मानकर AP से थोड़ी बड़ी त्रिज्या लेकर दो चापों AQ तथा BQ की बारी-बारी से रचना कीजिए जो एक दूसरे को Q पर काटे।

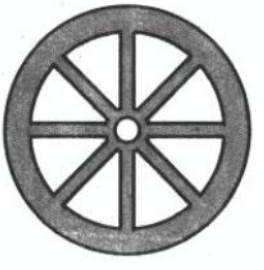
चरण 3 – PQ को मिलाइए। PQ, ℓ रेखा पर लम्ब है।





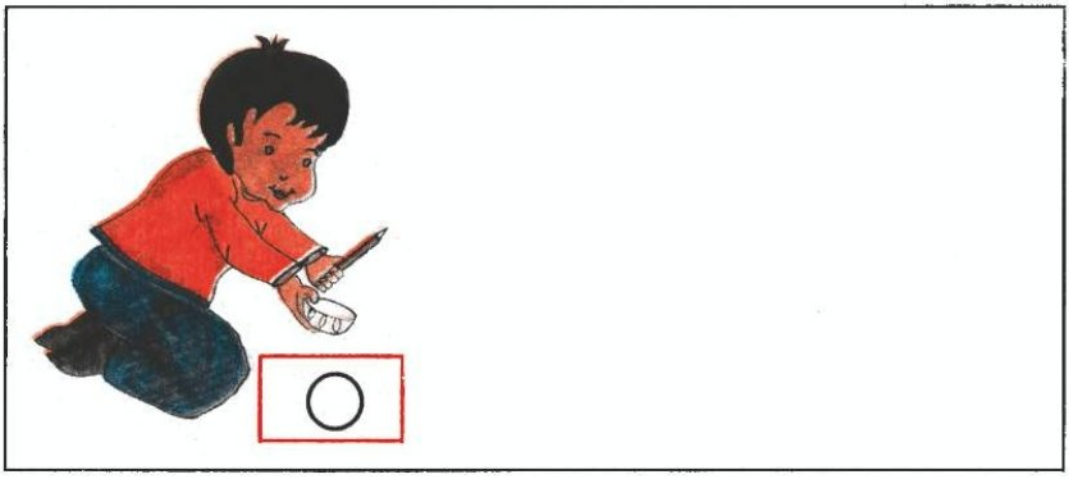
15.3.4 वृत्त

सामने दर्शाए गए पहिए को देखिए। इसकी परिसीमा (Boundary) पर स्थित प्रत्येक बिंदु इसके केन्द्र से बराबर दूरी पर है। इसका आकार एक वृत्त है। क्या आप ऐसी वस्तुएँ बता सकते हैं जो वृत्ताकार हों? ऐसी पाँच वस्तुओं के बारे में सोचिए और इनमें से 1–2 वस्तुओं का उपयोग कर वृत्ताकार घेरा बनाइए।



वृत्त की रचना जब उसकी त्रिज्या ज्ञात हो–

गतिविधि – नीचे दिए गए खाने में केवल पेंसिल की सहायता से तीन वृत्त बनाइए।



आइए अब निम्न प्रश्नों पर विचार करें।

– क्या आपको वृत्त बनाते समय कोई परेशानी हुई?

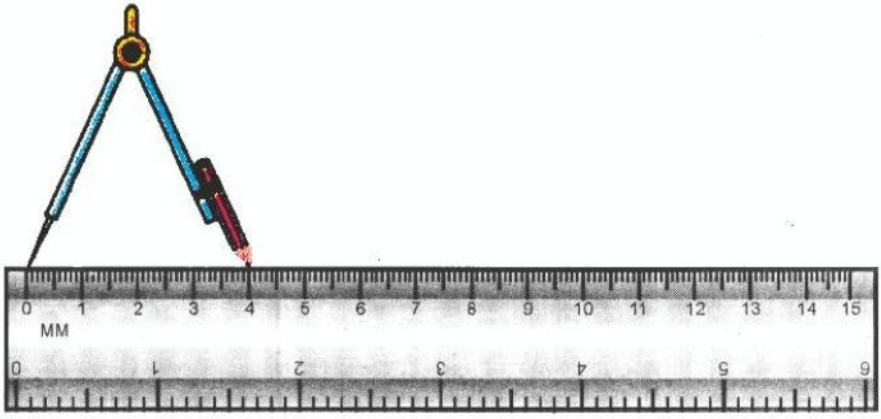
– क्या आपके द्वारा बनाए गए वृत्त की आकृति में आपको केन्द्र का पता है?

– क्या इन वृत्तों में आप त्रिज्याओं को दिखा सकते हैं?

पेंसिल से वृत्त बनाने में काफी परेशानी होती है तथा बनायी गई आकृति कई जगहों पर पूरी तरह से गोल नहीं दिख पाती। वृत्त का केन्द्र एवं त्रिज्याओं को दिखाने में भी परेशानी है। सोचिए इन परेशानियों से बचने के लिए क्या करना चाहिए? वृत्त की रचना ज्यामितीय यंत्र परकार की सहायता से करनी चाहिए। परकार से रचना करते समय केन्द्र एवं त्रिज्या का पता होना चाहिए।

मान लीजिए आपको एक ऐसे वृत्त की रचना करनी है जिसकी त्रिज्या 4 सेमी है। वृत्त की रचना के निम्न चरण हो सकते हैं–

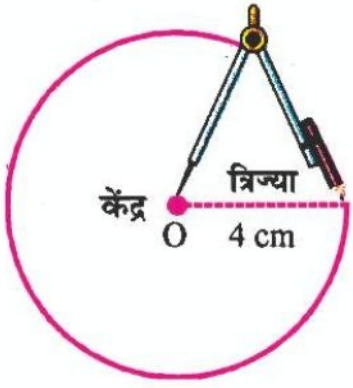
चरण 1 – परकार के नुकीले भाग को स्केल के शून्य के सामने अंकित चिह्न पर रखिए। उसमें फैलाव करते हुए पेंसिल वाले भाग को 4 सेमी के सामने अंकित चिह्न पर रखिए।



चरण 2 – पेंसिल के नुकीले भाग से नोट बुक पर एक बिन्दु वहाँ अंकित कीजिए जहाँ आप वृत्त का केन्द्र बनाना चाहते हैं। इस बिन्दु का नाम O रखिए।

चरण 3 – परकार के नुकीले सिरे को O पर रखिए।

चरण 4 – वृत्त की रचना करने के लिए परकार को धीरे-धीरे घुमाइए तथा एक बार में ही चक्कर पूरा कीजिए। ध्यान रहे कि इस कार्य को करते समय न तो परकार का फैलाव घटे-बढ़े और ना ही उसका नुकीला भाग बिन्दु से हटे। **इस प्रकार 4 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की रचना हुई।**



प्रयास कीजिए

(i) 3 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए।

(ii) 5 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए।

15.3.5 प्रोटेक्टर या चाँद की सहायता से कोणों की रचना

प्रोटेक्टर या (चाँद) की सहायता से 40° के कोण की रचना।

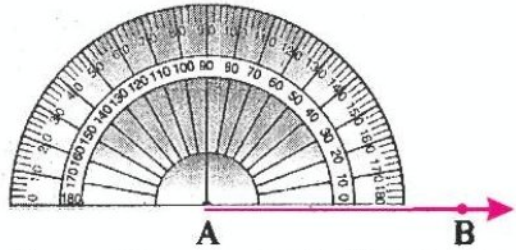
चरण 1 – सबसे पहले एक किरण की रचना कीजिए। माना वह किरण $\overline{AB}$ है।



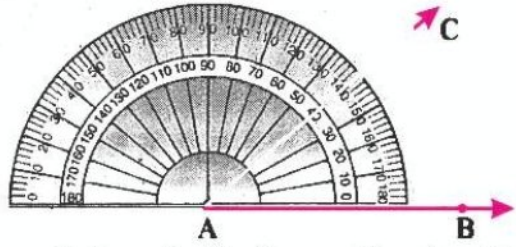
किरण

रेखाखंड $\overline{AB}$ को बिन्दु B से उसी दिशा में बिना अंत के बढ़ाने पर हमें किरण $\overline{AB}$ प्राप्त होगी।

चरण 2 – किरण के जिस बिन्दु पर कोण की रचना करनी हो वहाँ चाँद का केन्द्र रखिए तथा चाँद की आधार रेखा को $\overline{AB}$ किरण पर रखिए।

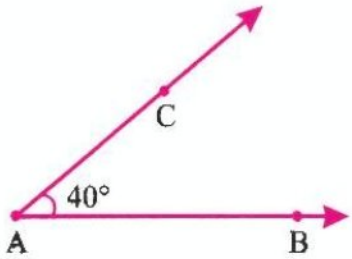


चरण 3 – अब चाँद पर B बिन्दु की तरफ से अंकित 0° से आगे बढ़ते हुए 40° के सामने बिन्दु C अंकित कीजिए।



यहाँ यह ध्यान रखें कि जहाँ चाँद में 40° अंकित है, वहीं 140° भी अंकित है पर हम AB की दिशा से यानी के दाएँ से बाएँ वाले डिग्री स्केल को ही पढ़ते हैं।

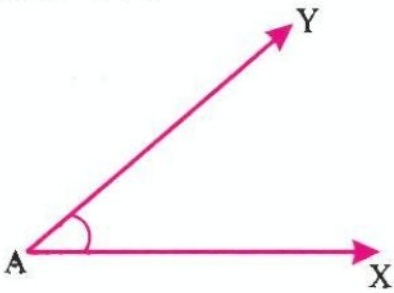
चरण 4 – बिन्दु C को बिन्दु A से मिलाया। इस प्रकार बना कोण $\angle BAC$ ही $40°$ का अभीष्ट कोण है।



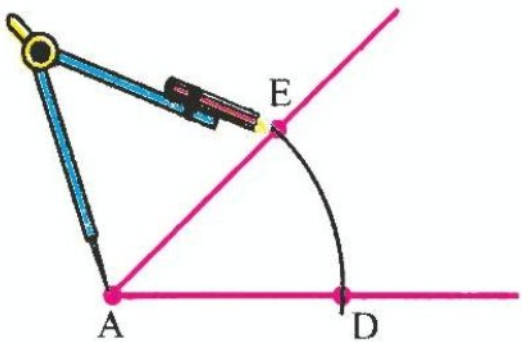
15.4 कोण का समद्विभाजक

एक तरीका तो सरल है कि हम चाँद से दिए गए कोण को मापकर उसका आधा करें। एक और तरीका परकार की सहायता से कोणों को समद्विभाजित करना है।

माना कि $\angle XAY$ दिया गया कोण है। परकार की सहायता से इसको दो बराबर भागों में विभाजित करने के निम्नलिखित चरण हैं–

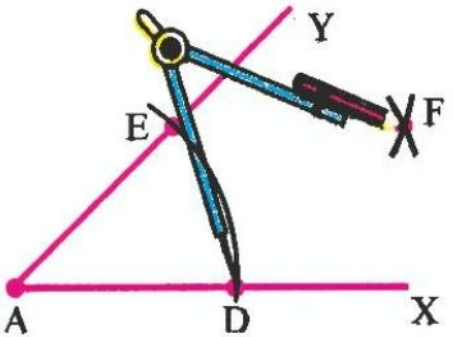


चरण 1 – A को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से एक चाप खींचिए जो $\angle A$ बनाने वाली भुजाओं को क्रमशः D तथा E पर काटे।

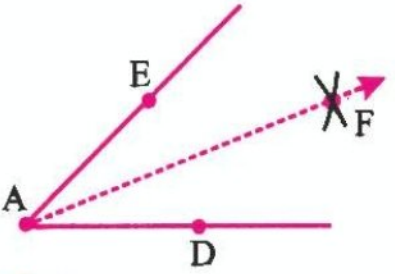


चरण 2 – D को केन्द्र मानकर और DE के आधे से अधिक की त्रिज्या लेकर एक चाप $\angle A$ के अभ्यंतर में खींचिए।

चरण 3 – E को केन्द्र मानकर उसी त्रिज्या का एक और चाप $\angle A$ के अभ्यंतर में खींचिए जो अभ्यंतर भाग में पहले से खींचे गए चाप को F बिन्दु पर काटे।



चरण 4 : बिन्दु F तथा बिन्दु A को स्केल की सहायता से मिलाइए। यहाँ रेखा AF, $\angle A$ का समद्विभाजक है। अर्थात् $\angle DAF = \angle FAE$



15.5 विशेष मापों के कोण

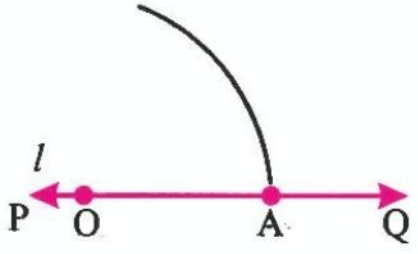
कुछ विशेष मापों के कोणों की रचना करने की कुछ सुंदर और परिशुद्ध विधियाँ हैं, जिनमें चाँद का प्रयोग नहीं किया जाता है। इनमें से कुछ की चर्चा हम यहाँ करेंगे।

60° के कोण की रचना

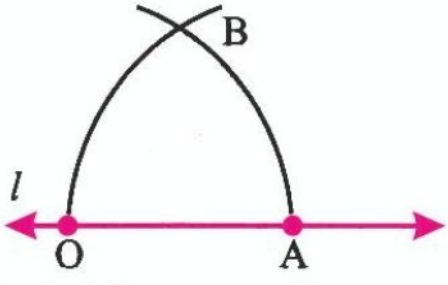
चरण 1 एक रेखा l खींचिए और उस पर एक बिंदु O अंकित कीजिए।



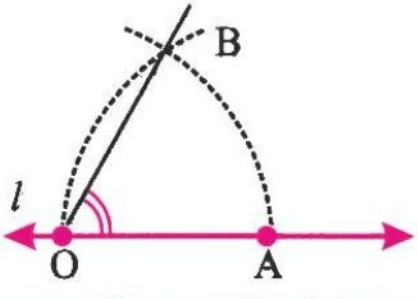
चरण 2 : परकार के नुकीले सिरे को O पर रखिए और एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए, जो रेखा l को मान लीजिए बिंदु A पर काटता है।



चरण 3 : अब A को केन्द्र मानकर, O से होकर जाता एक चाप खींचिए।



चरण 4 मान लीजिए ये दोनों चाप परस्पर बिंदु B पर काटते हैं। OB को जोड़कर किरण $\overline{OB}$ बनाइए। तब, $\angle BOA$ ही 60° माप का वांछित कोण है।



परकार या कम्पास की सहायता से 120° का कोण बनाइए।

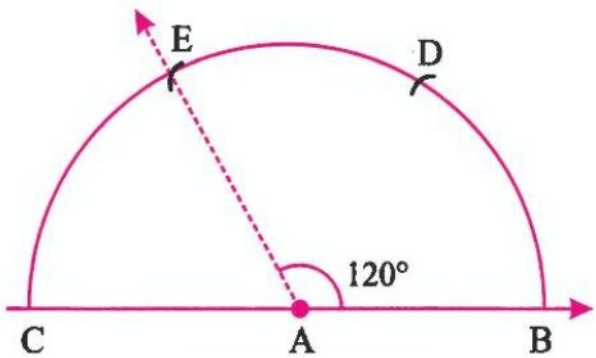
चरण 1 – एक रेखा ℓ की रचना कीजिए तथा उस पर कोई बिन्दु A लीजिए।

चरण 2 – A बिन्दु को केन्द्र मानते हुए परकार या कम्पास का नुकीला भाग उस पर रखिए तथा सुविधांजनक त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो रेखा ℓ को B तथा C बिन्दु पर काटे।

चरण 3 – अब B को केन्द्र मान कर A से गुजरता एक चाप खींचिए जो चाप BC को D बिन्दु पर काटे।

चरण 4 – फिर D बिन्दु को केन्द्र मानकर उसी फैलाव का एक चाप खींचिए जो चाप BC को E बिन्दु पर काटे।

चरण 5 – बिन्दु A को बिन्दु E से मिलाइए। इस प्रकार बना कोण ∠BAE ही 120° का अभीष्ट कोण है।



प्रश्नावली – 15

1. स्केल और परकार का प्रयोग करते हुए 6.5 सेमी लम्बाई के एक रेखाखंड की रचना कीजिए।

2. रेखाखंड $\overline{AB}$ की रचना कीजिए तथा उसकी लम्बाई को बिना मापे $\overline{AB}$ की लम्बाई के बराबर एक दूसरे रेखाखंड की रचना कीजिए।

3. P बिन्दु ℓ रेखा के बाहर स्थित कोई बिन्दु है। इस बिन्दु से गुजरती हुई एक लंब रेखा की रचना कीजिए।

4. 4 सेमी लम्बाई की रेखा के लंब समद्विभाजक की रचना कीजिए।

5. 3 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की रचना कीजिए।

6. O को केन्द्र मानते हुए किसी बिन्दु P से गुजरने वाले कितने वृत्तों की रचना कर सकते हैं?

7. 4.5 सेमी लम्बाई का एक रेखाखंड खींचिए तथा उसे समद्विभाजित कीजिए।

8. चाँद की सहायता से 95° तथा 145° का कोण बनाइए।

9. परकार की सहायता से 60° एवं 90° का कोण बनाइए।

10. परकार की सहायता से कोण के समद्विभाजन द्वारा 45° के कोण की रचना कीजिए।



सिगरेट में 4 हजार रासायनिक तत्व, 200 ज्ञात विष और 60 कैंसर पैदा करने वाले एजेंट होते हैं।

तंबाकू सेवन करने वाले व्यक्ति तंबाकू सेवन नहीं करने वाले व्यक्तियों से 10 वर्ष अधिक बड़े होने का अनुभव करते हैं और उनसे 10 वर्ष पहले मरते हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नावली – 1.1

(1) (a) 10 (b) 10 (c) 10 (d) 10 (e) 10

(2) (a) 73,75,307 (b) 9,05,00,041 (c) 7,52,21,302

(d) 58,423,202 (e) 23,30,010

(3) भारतीय संख्यांक पद्धति

(a) आठ करोड़ पचहत्तर लाख पंचानवे हजार सात सौ बासठ (8,75,95,762)

(b) आठ करोड़ चौवन लाख बासठ हजार दो सौ तिरासी (8,54,62,283)

(c) नौ करोड़ निन्यानवे लाख छियालीस (9,99,00,046)

(d) नौ करोड़ चौरासी लाख बत्तीस हजार सात सौ एक (9,84,32,701)

अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति

(a) सतासी मिलियन पाँच सौ पंचानवे हजार सात सौ बासठ (87,595,762)

(b) पचासी मिलियन चार सौ बासठ हजार दो सौ तिरासी (85,462,283)

(c) निन्यानवे मिलियन नौ सौ हजार छियालीस (99,900,046)

(d) अंठानवे मिलियन चार सौ बतीस हजार सात सौ एक (98,432,701)

प्रश्नावली – 1.2

(1) 7,707 (2) 3,020 (3) 2,28,800

(4) 6,86,659 रु.; दूसरे सप्ताह में 1,14,877 रु. की पुस्तकें अधिक बिकीं

(5) सबसे बड़ी 76432, सबसे छोटी 23467 तथा अन्तर 52965

(6) 87,575

(7) 30,592 रु. (8) 65,124

(9) 18 कमीजें, शेष कपड़ा 1 मीटर 30 सेमी (10) 177

(11) 22.5 किलोमीटर (12) 18 गिलास

प्रश्नावली – 1.3

(1) (a) 1700 (b) 500

(c) 16000 (d) 7000

(2) (a) 5000; 5,090 (b) 60,100; 61,130

(c) 7,800; 7,840 (d) 4,40,900; 4,40,980

(3) (a) 1,20,000

(b) 1,50,00,000

(c) 7,80,000

(d) 2,70,000

प्रश्नावली – 2.1

(1) (i) 100000 (ii) 801 (iii) 980 (iv) 1001

(2) (i) 99999 (ii) 99 (iii) 8756 (iv) 98

(3) 0

(4) (i) 54897 (ii) 8766 (iii) 544 (iv) 29 (v) 10000

(5) (i) 876541 (ii) 98 (iii) 100 (iv) 4566 (v) 9999

(6) 29

(7) (a) संख्या 503, संख्या 530 के बाईं ओर स्थित है $530 > 503$

(b) संख्या 1020, संख्या 1023 के बाईं ओर स्थित है $1023 > 1020$

(c) संख्या 4384, संख्या 5987 के बाईं ओर स्थित है $5987 > 4384$

(d) संख्या 40, संख्या 70 के बाईं ओर स्थित है $70 > 40$

प्रश्नावली – 2.2

(1) (a) 1556 (b) 2946 (c) 175

(2) (a) 122500 (b) 79000 (c) 8500 (d) 29000

(3) (a) 5550 (b) 120 (c) 5427900 (d) 120

(4) (a) 471510 (b) 371480 (c) 87108 (d) 260064

(5) I-II, II-I, III-IV, IV-III

(6) 1500 रु.

प्रश्नावली – 2.3

(1) (iv)

(2) (i) योग का क्रम विनिमेयता नियम (ii) योग की सहचारिता नियम

(iii) योग पर गुणन का वितरण नियम (iv) गुणन का क्रम विनिमेयता नियम

(3) (ii)

(6) (i) 64438 (ii) 4379375 (iii) 18350 (iv) 396875 (v) 21280

प्रश्नावली – 3.1

(1) 1, 3, 5,15 (2) 1,2,4,8,16,32,64

(3) (i) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 (ii) 1,3,5,9,15,45

(iii) 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78 (iv) 1,5,25,125

(v) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144

(4) 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126 .....

(5) 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162...

(6) (i) 4, 8, 12, 16, 20 (ii) 12, 24, 36, 48, 60

(iii) 30, 60, 90, 120, 150 (iv) 24, 48, 72, 96, 120

(v) 50, 100, 150, 200, 250

(7) 2

(8) 2

(9) (11, 13); (17, 19); (29, 31)

(10) 23, 31

(11) 4

(12) 24, 25, 26, 27, 28

(13) संयुक्त

(14) 1, 3, 7, 9

(15) नहीं

(16) 6, 28

(17) (i) 13, 19 (ii) 17, 23 (iii) 13, 43

(iv) 37, 43 (v) 47, 53

(18) अभाज्य संख्या :– 2, 3, 5, 7, 11, 13 और संयुक्त संख्या 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15

(19) नहीं

(20) (i) ✓ (ii) ✓ (iii) × (iv) × (v) ✓ (vi) × (vii) ✓ (viii) ✓



प्रश्नावली – 3.2

(1)

विभाज्य है										
संख्या	2 से	3 से	4 से	5 से	6 से	7 से	8 से	9 से	10 से	11 से
124	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं
286	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	हाँ
546	हाँ	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं
15864	हाँ	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
428428	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं	हाँ
333333	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	हाँ	नहीं	हाँ
429714	हाँ	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं
54685	नहीं	नहीं	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं
45600	हाँ	हाँ	हाँ	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं

(2)

विभाज्य है					
प्रश्न	संख्या	2 से	3 से	5 से	9 से
(i)	126	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ
(ii)	672	हाँ	हाँ	नहीं	नहीं
(iii)	990	हाँ	हाँ	हाँ	हाँ
(iv)	2050	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं
(v)	2856	हाँ	हाँ	नहीं	नहीं
(vi)	406839	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं

(3)

विभाज्य है			
प्रश्न	संख्या	4 से	8 से
(i)	512	हाँ	हाँ
(ii)	12159	नहीं	नहीं
(iii)	4096	हाँ	हाँ
(iv)	14540	हाँ	नहीं
(v)	21084	हाँ	नहीं
(vi)	31795012	हाँ	नहीं

(4) (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ

(5) (i) असत्य (ii) सत्य (iiii) सत्य (iv) सत्य
(v) सत्य (vi) असत्य (vii) असत्य (viii) सत्य

(6) $8 = 2 \times 2 \times 2$ $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

(7) (a) 1, 2, 4 (b) 1, 2 (c) 1, 2, 7, 14

(8) (a) 8 → 8, 16, 24, 32, 40, 48 .....
10 → 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 .....
(b) 4 → 4, 8, 12, 16, 20, 24 .....
12 → 12, 24, 36, 48, 60, 72 .....
(c) 3 → 3, 6, 9, 12, 15, 18 .....
5 → 5, 10, 15, 20, 25, 30 .....
8 → 8, 16, 24, 32, 40, 48 .....

(9) (a) 28, 56 .... (b) 24, 48, 72 (c) 378, 756 .....

(10) (a) 2×2×3×3×3×5 (b) 2×2×2×5×11 (c) 2×2×3×5×7

(नोट – ये अभाज्य गुणनखंड एक या एक से अधिक बार भी हो सकते हैं।)

प्रश्नावली – 3.3

(1) (a) 12 (b) 20 (c) 10 (d) 4
(e) 12 (f) 35 (g) 7

(2) (a) 1 (b) 2 (c) 1

(3) (a) 1 (b) 1 (c) 1

प्रश्नावली – 3.4

(1) (i) 9 (ii) 6 (iii) 9 (iv) 12
(v) 35 (vi) 3 (vii) 12 (viii) 53
(ix) 625

(2) (i) 150 (ii) 13 (iii) 36 (iv) 55
(v) 58 (vi) 747

(3) 65637, 65583

(4) 1

(5) 17 लीटर

(6) 11

(7) 4

(8) 2016 टाइलें

प्रश्नावली – 3.5

(1) (a) 144 (b) 28 (c) 288 (d) 300
(e) 480 (f) 672 (g) 630 (h) 288
(i) 36 (j) 252 (k) 240

प्रश्नावली – 3.6

(1) (i) 252 (ii) 160 (iii) 72 (iv) 144
(v) 900 (vi) 40 (vii) 180 (viii) 5760
(ix) 6384 (x) 18480

(3) 12

(4) 400

(5) 221

(6) 607

(7) 122 मी. 40 सेमी

(8) 9660 या 10,080

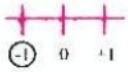
(9) 1,00,800

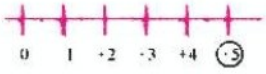
(10) 3300 मीटर

प्रश्नावली – 4.1

(1) (a) $-4°C$ (b) $+1500$ मीटर (c) -5 कदम (d) $+500$ रुपये

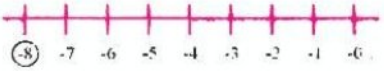
(2)

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

(3) (a) J (b) ऋणात्मक पूर्णांक

(c) बिन्दु C के संगत -6 और बिन्दु E के संगत $+1$ है।

(d) D (e) J, I, H, G, F, E, A, B, C, D

(4) (a) 7 (b) -5 (c) 2 (d) 11

(e) -5 (f) 1

(5) (a) $-7 < -6 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0$

(b) $-5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5$

(c) $-14 < -13 < -12 < -11 < -10$

(d) $-29 < -28 < -27 < -26 < -25 < -24 < -23 < -22$

प्रश्नावली – 3.3

(1) (a) 12 (b) 20 (c) 10 (d) 4
(e) 12 (f) 35 (g) 7

(2) (a) 1 (b) 2 (c) 1

(3) (a) 1 (b) 1 (c) 1

प्रश्नावली – 3.4

(1) (i) 9 (ii) 6 (iii) 9 (iv) 12
(v) 35 (vi) 3 (vii) 12 (viii) 53
(ix) 625

(2) (i) 150 (ii) 13 (iii) 36 (iv) 55
(v) 58 (vi) 747

(3) 65637, 65583

(4) 1

(5) 17 लीटर

(6) 11

(7) 4

(8) 2016 टाइलें

प्रश्नावली – 3.5

(1) (a) 144 (b) 28 (c) 288
(e) 480 (f) 672 (g) 630
(i) 36 (j) 252 (k) 240

प्रश्नावली – 3.6

(1) (i) 252 (ii) 160 (iii) 72
(v) 900 (vi) 40 (vii) 180
(ix) 6384 (x) 18480

(3) 12

(4) 400

(5) 221

(6) 607

(7) 122 मी. 40 सेमी

(8) 9660 या 10,080

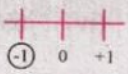
(9) 1,00,800

(10) 3300 मीटर

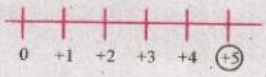
प्रश्नावली – 4.1

(1) (a) – 4°C (b) + 1500 मीटर (c) – 5 कदम (d) + 500 रुपये

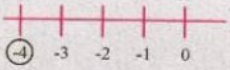
(2) (a)



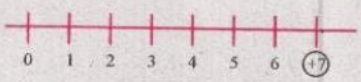
(b)

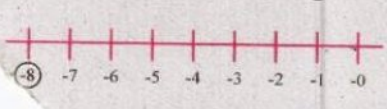


(c)



(d)





(b) ऋणात्मक पूर्णांक

C के संगत –6 और बिन्दु E के संगत +1 है।

(e) J, I, H, G, F, E, A, B, C, D

(b) –5 (c) 2 (d) 11

(f) 1

$6 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0$

$-3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5$

$-12 < -11 < -10$

$-27 < -26 < -25 < -24 < -23 < -22$

(6) (a) –26, –27, –28, –29 (b) –7, –6, –5, –4, –3

(7) (a) सत्य (b) असत्य (c) असत्य (d) असत्य

(8) (a) –10 पर (b) 6 पर (c) बाईं दिशा में (d) दाईं दिशा में

(9) (a) –7°C

(b) (a) 20°C (b) –4°C (c) –3°C (d) –12°C

प्रश्नावली – 4.2

(1) (a) 8 (b) 0 (c) –4 (d) –5

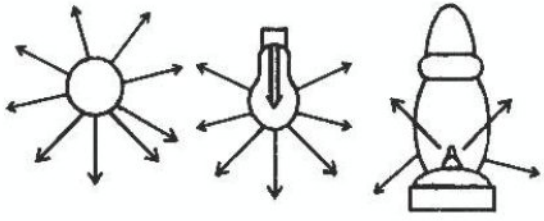
(2) (a) 3 (b) –6 (c) –8 (d) 5

(e) –6 (f) 2

प्रश्नावली – 5.1

(1) $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$

(2) सूर्य, बल्ब, लालटेन



(3) रेखाखंड A B $\overline{AB}$

किरण A B $\overrightarrow{AB}$

रेखा A B $\overleftrightarrow{AB}$

(4) बिन्दु P वक्र के अभ्यंतर और बिन्दु Q वक्र के बहिर्भाग में है।

प्रश्नावली – 5.2

(1)

शीर्ष	कोण बनाने वाली भुजाएँ	कोण का नाम
B	$\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$	∠ABC
Q	$\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$	∠PQR
M	$\overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{MN}$	∠LMN

(2) 1, 3, 4, 8, 8

(3) (क) बिन्दु P $\overrightarrow{BA}$ किरण पर स्थित है।

(ख) बिन्दु Q ∠ABC के बहिर्भाग में है।

(ग) बिन्दु R ∠ABC के अभ्यंतर में है।

प्रश्नावली – 5.3

(2) त्रिभुज में तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ एवँ तीन कोण होते हैं।

(3) शीर्ष – S, R, T

कोण – ∠RST, ∠STR, ∠TRS

भुजा – RS, ST, TR

(4) P, Q बिन्दु त्रिभुज के अन्तःभाग में है।

R बिन्दु त्रिभुज के बहिर्भाग में है।

(5) ऊँचाई, माध्यिका, केन्द्रक

प्रश्नावली – 5.4

(3) आसन्न भुजाओं के युग्म = (PQ, QR); (QR, RS); (RS, SP) ; (SP, PQ)

सम्मुख भुजाओं के युग्म = (PS, QR) ; (PQ, SR)

प्रश्नावली – 6

(2) (A) I-III, II-I, III-II.

(2) (B) न्यून कोण : 45°, अधिक कोण : 155°, शून्य कोण :0°, समकोण : 90°, ऋजु कोण : 180°, पूर्ण कोण : 360°, पुनर्युक्त कोण : 255°

(3) 45°, 120°, 215°, 180°, 90°

(4) 90°, 60°

प्रश्नावली – 7.1

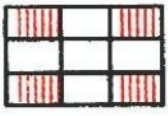
(1) (i) $\frac{10}{12}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{3}{7}$ (iv) $\frac{1}{4}$

(v) $\frac{4}{9}$ (vi) $\frac{3}{8}$ (vii) $\frac{4}{10}$ (viii) $\frac{4}{4}$

(2) (i)  $\frac{1}{6}$

(ii)  $\frac{1}{4}$

(iii)  $\frac{1}{3}$

(iv)  $\frac{4}{9}$

(4) $\frac{6}{24}$ (5) $\frac{2}{7}$

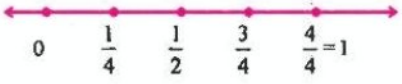
(6) (a) $\frac{2}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$

(7) $\frac{8}{12}$ (8) $4, \frac{4}{11}$

(9) गोल $\frac{5}{12}$ चौकोर $\frac{4}{12}$ तिकोन $\frac{3}{12}$

प्रश्नावली – 7.2

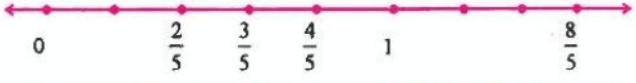
(1) (a)



(b)



(c)



(2) (a) $6\frac{2}{3}$ (b) $2\frac{1}{5}$ (c) $2\frac{3}{7}$ (d) $3\frac{1}{6}$ (e) $3\frac{8}{9}$

(3) (a) $\frac{31}{4}$ (b) $\frac{41}{7}$ (c) $\frac{19}{7}$ (d) $\frac{53}{5}$ (e) $\frac{66}{7}$

प्रश्नावली – 7.3

(1) (a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$, हाँ (b) $\frac{3}{9}, \frac{2}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{15}$, हाँ

(2) (i) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{4}{6}$ (c) $\frac{3}{9}$ (d) $\frac{2}{8}$ (e) $\frac{3}{4}$

(ii) (a) $\frac{6}{18}$ (b) $\frac{4}{8}$ (c) $\frac{12}{16}$ (d) $\frac{8}{12}$ (e) $\frac{4}{16}$

तुल्य भिन्न : $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{8}\right); \left(\frac{4}{6}, \frac{8}{12}\right); \left(\frac{3}{9}, \frac{6}{18}\right); \left(\frac{2}{8}, \frac{4}{16}\right); \left(\frac{3}{4}, \frac{12}{16}\right)$

(3) (a) 12 (b) 28 (c) 27 (d) 7

(4) (a) $\frac{15}{20}$ (b) $\frac{33}{44}$ (c) $\frac{6}{8}$ (d) $\frac{27}{36}$

(5) (a) $\frac{9}{12}$ (b) $\frac{3}{4}$

(6) (a) हाँ (b) नहीं (c) नहीं

(7) (a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$

(8) $\frac{10}{20}, \frac{25}{50}, \frac{40}{80}$ । $\frac{1}{2}$, हाँ।

(9) (i) d (ii) a (iii) c (iv) b

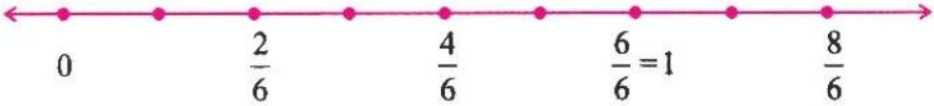
प्रश्नावली – 7.4

(1) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{6}{8}$

(2) (a) $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{6}{8}, \frac{1}{8}$; $\frac{1}{8} < \frac{3}{8} < \frac{4}{8} < \frac{6}{8}$; $\frac{6}{8} > \frac{4}{8} > \frac{3}{8} > \frac{1}{8}$

(b) $\frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}$; $\frac{3}{9} < \frac{4}{9} < \frac{6}{9} < \frac{8}{9}$; $\frac{8}{9} > \frac{6}{9} > \frac{4}{9} > \frac{3}{9}$

(3)



(4) (a) > (b) > (c) < (d) >

(e) < (f) < (g) < (h) >

(5) (a) नहीं (b) नहीं (c) हाँ (d) नहीं

(6) रोहिणी ने

(7) B कक्षा में

(8) सर्वेश ने

प्रश्नावली – 7.5

(1) (a) $\frac{13}{72}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{3}{5}$

(e) $\frac{17}{21}$ (f) $\frac{5}{6}$ (g) $\frac{13}{12}$ (h) $5\frac{5}{12}$

(i) $\frac{23}{12}$ (j) 5 (k) $7\frac{11}{12}$ (l) $\frac{9}{5}$

(2) $1\frac{7}{40}$

(3) (a) $\frac{4}{10}$ (b) $\frac{8}{21}$ (c) $\frac{6}{6}(=1)$ (d) $\frac{7}{27}$

(e) $\frac{7}{8}$ (f) $\frac{1}{3}$

(4) (a)

		$\frac{6}{3}=2$
		$\frac{3}{3}=1$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}=1$

(b)

		$\frac{5}{6}$
		$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

(5) $\frac{3}{8}$ मीटर

(6) $\frac{4}{10}$ किमी

(7) कमलेश, $\frac{4}{5}$ मिनट

प्रश्नावली – 8.1

(1) (i) 21.3 (ii) 110.3

(2)

	सैंकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$
a	0	0	0	4
b	0	1	7	3
c	0	1	0	5
d	2	0	6	8

(3) (a) 50.7 (b) 0.8 (c) 12.3 (d) 202.0 (e) 507.8

(4) (a) 265.7 (b) 78.8 (c) 8.8 (d) 4.2
(e) 1.5 (f) 2.4 (g) 3.6 (h) 4.5

(5) (a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{1}{1}=1$ (d) $\frac{19}{5}$
(e) $\frac{137}{10}$ (f) $\frac{106}{5}$ (g) $\frac{32}{5}$

(6) (a) 0.3 सेमी (b) 4 सेमी (c) 11.7 सेमी
(d) 3.2 सेमी (e) 16.3 सेमी (f) 8.3 सेमी

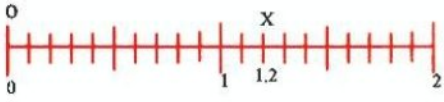
(7) (a)



(b)



(c)



(d)



(8) (a) 0 और 1 1 अधिक निकट है
(b) 2 और 3 दोनों बराबर निकट है
(c) 6 और 7 6 के निकट है।
(d) 5 पर 5 पर है।
(e) 1 पर 1 पर है।
(f) 6 और 7 6 के निकट है।

(9) A = .9 B = 1.4 C = 2.2 D = 2.9 E = 3.5

आरोही क्रम $A < B < C < D < E$

(10) (a) 8.6 सेमी (b) 7.5 सेमी

प्रश्नावली – 8.2

1. (a) शून्य दशमलव शून्य पाँच (b) शून्य दशमलव सात पाँच
(c) पाँच दशमलव एक शून्य (d) बाईस दशमलव पाँच छः
(e) शून्य दशमलव शून्य तीन दो (f) छः दशमलव शून्य शून्य आठ

(2)

	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$	अंक
a	0	5	1	0.51
b	1	0	0	1.00
c	0	1	6	0.16
d	0	9	9	0.99
e	0	1	0	0.10

(3) (a) 211.902 (b) 2.340 (c) 40.015 (d) 12.342 (e) 472.960

(4)

	सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	हजारवां
	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
a	0	0	0	1	8	0
b	0	0	3	0	7	0
c	0	2	6	7	0	0
d	1	2	5	3	6	0
e	1	8	6	1	8	6

(5) (a) 19.23 (b) 11.05 (c) 0.673 (d) 25.305 (e) 756.98

(6) (a) 0.0 और 0.1 (b) 0.1 और 0.2 (c) 0.1 और 0.2 (d) 0.3 और 0.4

(e) 0.9 और 1.0 (f) 0.6 और 0.7

(7) (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{20}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{1}{8}$

प्रश्नावली – 8.3

(1) (a) 0.3 (b) 0.07 (c) 2 (d) 0.4 (e) 1.32 (f) 0.199

(g) दोनों बराबर हैं (h) 5.54

प्रश्नावली – 8.4

(1) (a) 0.05 रु. (b) 0.5 रु. (c) 7.25 रु. (d) 3.30 रु. (e) 50.45 रु.

(2) (a) 0.25 मीटर (b) 0.03 मीटर (c) 2.17 मीटर (d) 1.35 मीटर (e) 8.29 मीटर

(3) (a) 0.7 सेमी (b) 6.0 सेमी (c) 15.4 सेमी (d) 9.5 सेमी (e) 9.9 सेमी

(4) (a) 0.006 किमी (b) 0.066 किमी(c) 2.222 किमी (d) 75.007 किमी

(5) (a) 2.0 किग्रा (b) 0.02 किग्रा (c) 0.2 किग्रा (d) 2 किग्रा (e) 4.008 किग्रा

प्रश्नावली – 8.5

(1) (i) 36.775 (ii) 21.223 (iii) 26.545 (iv) 26.469

(2) 32 रु.

(3) 32.10 मीटर

(4) 76.10 रु.

(5) 3.034 किमी

(6) 17.575 किमी

(7) 18.350 किग्रा

प्रश्नावली – 8.6

(1) (a) 2 (b) 0.89 (c) 0.03 (d) 0.198 (e) 0.006 (f) 0.5

(2) (a) 1 (b) 0 (c) 0.36 (d) 0.005 (e) 2.4 (f) 0.3

(3) अकबर, 2.25 वर्ष

(4) 2 प्रतिशत

(5) 26.75 रु.

प्रश्नावली – 9.1

(1) (a) 6 (b) 11

(2) (a)

वाहन	मिलान चिह्न	साधनों की संख्या
बस	𝍸 I	6
मोटर साइकिल	𝍸 𝍸	10
साइकिल	𝍸 III	8
कार	𝍸	5
जीप	I	1

(b) मोटर साइकिल

(3)

पासे का अंक	मिलान चिह्न	संख्या
1	I	1
2	IIII	4
3	IIII	4
4	II	2
5	𝍸	5
6	IIII	4

(a) 1 (b) 5 (c) 2, 3 एवं 6

(4) (c) 𝍸 𝍸 𝍸 I (d) 𝍸 𝍸 IIII

(5)

सदस्यों की संख्या	मिलान चिह्न	परिवार की संख्या
3	III	3
4	𝍷 II	7
5	𝍷 II	7
6	𝍷 III	8
7	𝍷	5

(a) 5 (b) 3 (c) 6

(6) (a) शुक्रवार, 2000 कलमें (b) बुधवार, 8000 कलमें (c) 28000 कलमें

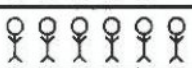
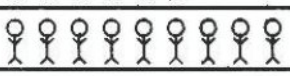
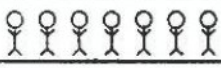
(7) (a) गोपाल , 45 टोकरियां (b) 25 टोकरियाँ, (c) 15 टोकरियाँ

प्रश्नावली – 9.2

(1) माना कि 1 संकेत ⊖ 5 बल्बों की संख्या निरूपित करता है।

महीना	बल्बों की संख्या
सितम्बर	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
अक्टूबर	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
नवम्बर	⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖ ⊖
दिसम्बर	⊖ ⊖ ⊖

(2) (A) माना संकेत  = 50 विद्यार्थी

वर्ष	विद्यार्थियों की संख्या
2004	
2005	
2006	
2007	
2008	

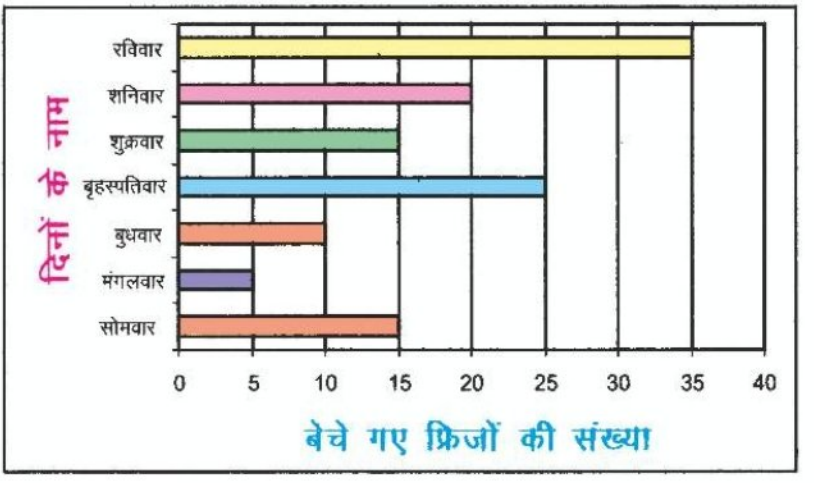
(a) 9 संकेत (b) 5 संकेत

(3) (a) गाँव E (b) गाँव D (c) 24 ट्रैक्टर

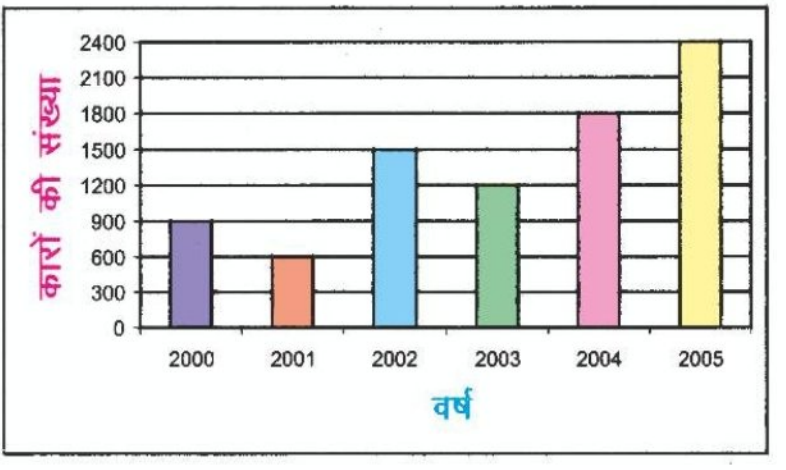
प्रश्नावली – 9.3

(1) 1 इकाई लम्बाई = 5 फ्रिज

दिनों के नाम क्षैतिज रेखा पर एवं बेचे गए फ्रिजों की संख्या उदग्र रेखा पर रखकर भी दण्डालेख हम खींच सकते हैं।

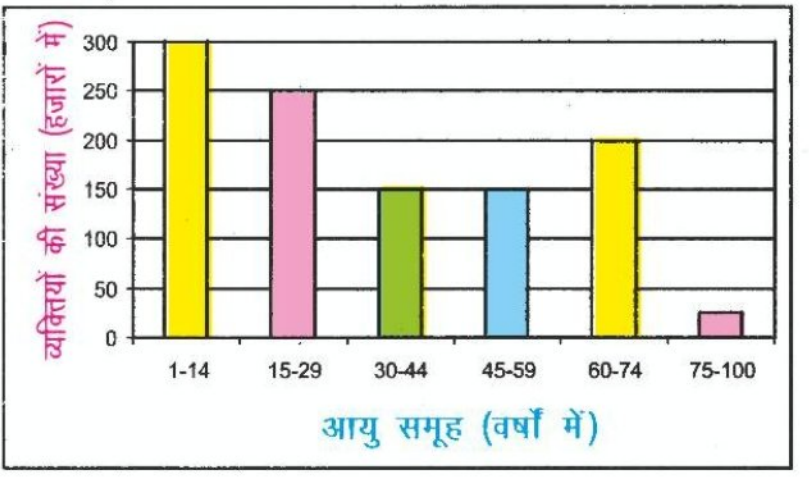


(2) पैमाना है 1 इकाई लम्बाई = 300 कारें



(a) वर्ष 2005 में (b) 8400 कारें

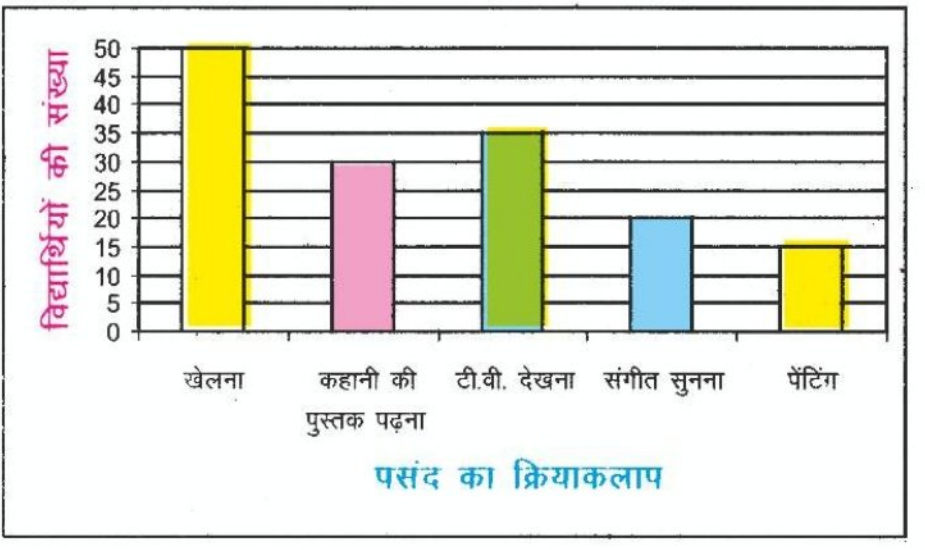
(3) 1 इकाई लम्बाई = 50 हजार



(a) आयु समूह 30–44 एवं 45–59 की जनसंख्या बराबर है।

(b) 2 लाख 25 हजार

(4) 1 इकाई लम्बाई = 5 विद्यार्थी



खेलने के अतिरिक्त अधिकांश विद्यार्थी टेलीविजन देखना पसंद करते हैं।

प्रश्नावली – 10.1

(1) (a) 4 : 3 (b) 4 : 7

(2) (a) 1 : 2 (b) 2 : 5

(3) (a) 37 : 191 (b) 191 : 154

(4) 3 : 4

(5) 5, 12, 25 हाँ

(6) (a) 3:4 (b) 14 : 9 (c) 3 : 11 (d) 2 : 3

(7) (a) 1:3 (b) 4 : 15 (c) 11 : 20 (d) 1 : 4

(8) (a) 3:1 (b) 1 : 2

(9) 15 : 7

(10)

हॉल की चौड़ाई (मी.)	10	20	40	50
हॉल की लम्बाई (मी.)	25	50	100	125

(11) 12 और 8

(12) (a) 3:1 (b) 10 : 3 (c) 13 : 6 (d) 15 : 1

(13) (i) 3 : 1 (ii) 8 : 3 (iii) 7 : 8 (iv) 7 : 24

प्रश्नावली – 10.2

(1) (a) हाँ (b) नहीं (c) नहीं (d) नहीं

(e) हाँ (f) हाँ

(2) (a) सत्य (b) सत्य (c) असत्य, 12 : 18 :: 8 : 12

(d) सत्य (e) असत्य 52 : 39 :: 4 : 3 (f) सत्य

(3) (a) सत्य (b) सत्य (c) सत्य

(d) सत्य (e) असत्य

(4) (a) हाँ, मध्य पद – 1 मी, 40रु.; चरम पद–25 सेमी, 160रु.

(b) हाँ, मध्य पद – 65 ली, 6 बोतल, चरम पद – 39 लीटर, 10 बोतल

(c) नहीं

(d) हाँ, मध्य पद – 2.5 लीटर, 4 रु., चरम पद 200 मिली, 50 रुपये।

(5) (i) 18 (ii) 5 (iii) 32 (iv) 25 (v) 18

(6) 170

(7) 4000 रु.

प्रश्नावली – 11

(1) 360 रु.

(2) 12

(3) 18 केले या $1\frac{1}{2}$ दर्जन

(4) 15 किलो

(5) 2400 किलोमी.

(6) 640 रु.

(7) (i) 8 घंटे (ii) 357.5 किलोमीटर

(8) (a) 8400 रु. (b) 25 महीने

(9) 16800 रु.

(10) 5°C

(11) रामू ने

प्रश्नावली – 12.1

(1) (a) 3n (b) 3n (c) 5n (d) 5n

(e) 6n

(2) 10a 3. 60b 4. 2m

(5) (a) सीमा की उम्र = गुड़िया की उम्र + 5 (b) सीमा की उम्र = $x+5$

(6) $3x+25$

(7) (a) $3x+1, x$ वर्गों की संख्या

(b) $2x+1, x$ त्रिभुजों की संख्या

प्रश्नावली – 12.2

(1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (2) 3k 2. 6p

(3) $12l$ (4) $d = 2r$

प्रश्नावली – 12.3

(2) (b)

(3) (a) योग (b) घटाव (c) गुणन (d) विभाजन (e) गुणन-योग (f) गुणन-घटाव (g) गुणन (h) गुणन-योग (i) गुणन-घटाव

(4) (a) $a+5$ (b) $a-5$ (c) $5a$ (d) $\frac{a}{5}$

(e) $m-7$ (f) $-7m$ (g) $\frac{-m}{7}$ (h) $-5m$

(5) (a) $7m+6$ (b) $2a+13$ (c) $-5x$ (d) $-5x+10$

(e) $5x-15$ (f) $-5y+18$

(6) (a) $k+9,\ k-9,\ \frac{k}{9},\ 9k$ इत्यादि

(b) $5m+7,\ 5m-7,\ \frac{5m}{7}$ इत्यादि

प्रश्नावली – 12.4

(1) (a) (i) $x-5$ (ii) $x+4$ (iii) $7x$ (iv) $2x-3$

(b) $2bx+5$ (c) लम्बाई $= 3h$, चौड़ाई $= 3h-7$

(d) $3x+22$

(2) (a) राखी की सहेली के पास राखी से तीन गुणा रुपये है।

(b) पुस्तक का मूल्य अभ्यास पुस्तिका से चार गुना है।

(c) रमेश की बकरियाँ सुरेश की बकरियों का चौथाई भाग है।

(d) मोहन के पिता की उम्र मोहन से चार गुना तथा उसकी माँ की उम्र पिता के उम्र से 5 वर्ष कम है।

(3) (a) $x+5=$ सपना की उम्र पाँच वर्ष बाद।

$x-3=$ सपना की उम्र तीन वर्ष पहले।

(b) $3m=m$ का तिगुना

$\frac{m}{2}$ = का आधा।

प्रश्नावली – 12.5

(1) (a) हाँ, चर $=x$ (b) नहीं (c) नहीं (d) नहीं

(e) हाँ, चर $=x$ (f) हाँ, चर $=n$ (g) नहीं (h) नहीं

(i) नहीं (j) हाँ, चर $=x$

(2) (a) नहीं (b) नहीं (c) हाँ (d) नहीं

(e) नहीं (f) हाँ (g) नहीं (h) नहीं

(i) हाँ (j) नहीं (k) नहीं (l) हाँ

(3) (a) 6 (b) 12 (c) 15 (d) 49

(e) 16 (f) −3

(4) (a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x+6$	7	8	9	10	11	12	13	-	-	-

(b)

y	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$y-6$	−2	−1	0	1	2	3	4	-	-	-

(c)

t	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$5t$	15	20	25	30	35	40	-	-	-

(d)

z	8	9	10	11	12	13	14	15	-	-	-
$\frac{z}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	4	-	-	-	-	-	-

(5) (a) 12 (b) 27 (c) 20 (d) 35

(e) 96 (f) 9 (g) 3 (h) 25

प्रश्नावली – 13.1

(1) (a) 14 सेमी (b) 16 सेमी (c) 44 सेमी (d) 12 सेमी

(2) 74.5 मीटर (3) 960 मीटर

(4) 20 सेमी (5) 60 सेमी

(6) 11 सेमी (7) (a) 6 सेमी (b) 8 सेमी (c) 4 सेमी

(8) 8000 रुपये (9) राधा

प्रश्नावली – 13.2

(1) (a) 8.75 वर्गसेमी (b) 72 वर्गसेमी

(c) 49000 वर्गसेमी या 4.9 वर्ग मी (d) 2.4 वर्ग किलोमीटर

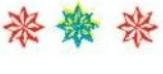
(2) (a) 36 वर्गसेमी (b) 81 वर्गसेमी (c) 16 वर्गसेमी

(3) 6 मीटर (4) 60

(5) 16250 रु. (6) 180 रु.

(7) 300 रु. (8) 21.5 वर्ग मीटर

(9) (a) 600 (b) 145



अधिगम प्रतिफल वर्ग – 6

विषय – गणित

बच्चे .....

- बड़ी संख्याओं से संबंधित समस्याओं का हल उचित संक्रियाओं यथा जोड़, घटाव, गुणा, भाग का प्रयोग कर करते हैं।
- रोमन संख्या-पद्धति को पढ़-लिख सकते हैं।
- संख्याओं को सम, विषम, भाज्य, अभाज्य, सह-अभाज्य (Co – Prime) आदि श्रेणी में वर्गीकृत करते हैं।
- 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 और 11 से विभाज्यता नियम को प्रमाणित करते हैं।
- महत्तम समापवर्तक (HCF) एवं लघुत्तम समापवर्तक (LCM) का उपयोग करते हैं।
- पूर्णांकों के जोड़ और घटाव पर आधारित समस्याओं को हल करते हैं।
- रेखा, रेखा खण्ड, कोण, भुजा, त्रिभुज, चतुर्भुज, चतुर्भुज के विकर्ण एवं बन्द आकृतियों में अंत: एवं बाह्य भाग को बताते हैं।
- कोणों के विशेष युग्मों को पहचानते हैं तथा रेखा-खण्ड एवं कोणों की माप करते हैं।
- त्रिभुज एवं चतुर्भुज के प्रकारों को बताते हैं तथा बहुभुज के विकर्ण को दर्शाते हैं।
- अपने दैनिक जीवन में मुद्रा, वजन, लम्बाई, तापमान आदि पर आधारित भिन्न एवं दशमलव भिन्न का उपयोग करते हैं। जैसे लिखने में पन्ने का $\frac{1}{4}$ भाग छोड़ना है, $5\frac{1}{2}$ मी० लम्बा हॉल है, 75.5 किलोमीटर पटना की दूरी इत्यादि।
- भिन्न एवं दशमलव भिन्न आधारित जोड़-घटाव से संबंधित दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करते हैं।
- किसी परिवार के विभिन्न मदों में पिछले छ: महीनों में किए गए खर्चों की सारणी, पिक्टोग्राफ और बारग्राफ में व्यवस्थित करते हैं और उसका अर्थ समझते हैं।
- दैनिक जीवन में अनुपात-समानुपात तथा ऐकिक नियम का प्रयोग करके समस्याओं को हल करते हैं।
- दी गई परिस्थितियों में चर का उपयोग करते हैं, जैसे बच्चे उस आयत का परिमाप बताते हैं जिसकी भुजाएँ X मीटर और 5 मीटर हैं, अर्थात परिमाप $2(X + 5)$ मीटर बताते हैं।
- अपने दैनिक जीवन में परिमिति तथा क्षेत्रफल पर आधारित समस्याओं को हल करते हैं।
- सममित आकृतियों की पहचान करते हैं।
- कोणों की समझ रखते हैं तथा किसी भी कोण के रचना का कारण समझते हैं।