अर्द्ध-वार्षिक परीक्षा, 2022-23

गणित

A/5,000

कक्षा—12

समय : 3 घण्टा 15 मिनट] पूर्णांक : 100

नोट—प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

निर्देश— (i) इस प्रश्न-पत्र में कुल आठ प्रश्न हैं।

(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्ट लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

1. सभी खण्ड हल कीजिए—

(क) यदि $A \times B$ $\{(a, 1), (b, 3), (a, 3), (b, 1), (a, 2) b,2)\}$ हो, तो समुच्चय A है— 1

(a) $(1, a)$ (b) $\{a, b\}$ (c) $\{1, 2\}$ (d) $\{2, 3\}$

(ख) यदि $y = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ हो, तब $f(y)$ का मान होगा— 1

(a) 1 (b) x (c) 0 (d) $2x$

(ग) यदि $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = A$ है, तो $\cos A$ का मान होगा— 1

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{4}{3}$

(c) $\frac{4}{5}$ (d) इनमें से कोई नहीं

(घ) यदि किसी आव्यूह में 10 अवयव हैं, तो इसकी सम्भव कोटियों की संख्या होगी— 1

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5

(ङ) $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & y & x \\ 0 & x^2 & y^2 \end{vmatrix}$ का मान है— 1

(a) $x^3 - y^3$ (b) $y^3 - x^3$ (c) $x^2 + y^2$ (d) $x^3 + y^3$

2. सभी खण्ड हल कीजिए—

(क) माना R, Z पर इस प्रकार परिभाषित सम्बन्ध है कि $R = \{(x, y), x \in z, y \in z, x^2 = y^2\}$, तब ज्ञात कीजिए— 1

(i) R का प्रान्त (ii) R का परिसर

(ख) यदि $f: R \to R$, जहाँ $f(x) = x + 1$, $\forall x \in R$, तब दर्शाइए कि यह एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है। 1

(ग) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। $\frac{\pi}{2}$ 1

(घ) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ हो, तो $2A + 3B$ का मान बताइए। 1

(ङ) सिद्ध कीजिए— 1

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & \cos x & \sin y \\ 0 & \sin x & \cos y \end{vmatrix} = \cos(x + y)$$

3. सभी खण्ड हल कीजिए—

(क) फलन $f(x) = |x| + |x - 1|$ की सततता की जाँच $x = 0$ और $x = 1$ पर कीजिए। 2

(ख) फलन $\frac{\log x + \log x^2}{x}$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 2

(ग) यदि w इकाई का घनमूल हो, तो $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(घ) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए कि AB शून्य आव्यूह है। 2

aglasem.com

4. सभी खण्ड हल कीजिए—

(क) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)$ जो निम्न प्रकार से परिभाषित है— 2

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$, बिन्दु $x=0$ पर सतत् है।

(ख) $e^{\frac{1+x^2}{x}}$ का अवकलन x के सापेक्ष ज्ञात कीजिए। 2

(ग) सिद्ध कीजिए कि— $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}=0$ 2

(घ) यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि— $A^3=4A$. 2

5. निम्न में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए—

(क) यदि x वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तो सिद्ध कीजिए कि $R=\{(a,b): a\in x, b\in x$ और $a=b\}$ एक तुल्यता सम्बन्ध है। 5

(ख) यदि $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, तो सत्यापित कीजिए कि $(fof^{-1})(x)=x$. 5

(ग) सिद्ध कीजिए कि $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$. 5

(घ) यदि $[x-5-1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}=0$ तो x का मान ज्ञात कीजिए। 5

(ङ) सिद्ध कीजिए कि— $\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix}=(x+y+z)(x-z)^2$. 5

(च) यदि $y=\log(x+\sqrt{x^2-a^2}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

6. निम्न में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए—

(क) दिखाइए कि फलन $f(x)=\frac{1}{(x-a)}$ बिन्दु $x=a$ पर असतत् है। 5

(ख) यदि $y = \sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(ग) फलन $x^{\tan x}$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 5

(घ) सिद्ध कीजिए कि— $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$. 5

(ङ) कोई उदाहरण लेकर सिद्ध कीजिए कि—$(A+B)' + A' + B'$, जहाँ A और B समान कोटि के आव्यूह हैं। 5

(च) सिद्ध कीजिए कि— $\tan^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right) - \tan^{-1}(2n+1) = \frac{3\pi}{4}$. 5

7. निम्न में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) सिद्ध कीजिए कि R तुल्यता सम्बन्ध है, तो R^{-1} भी एक तुल्यता सम्बन्ध है। 8

(ख) फलन $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 8

8. निम्न में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) यदि फलन $f(x)\begin{cases} 2x+3, & \text{यदि } x<1 \\ 1-kx^2, & \text{यदि } x>1 \end{cases}$ से परिभाषित है तब, k के किस मान के लिए $\lim_{x\to 1}$ अस्तित्व में है? 8

(ख) सिद्ध कीजिए कि— 8

$$\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ b+c & c & a \\ c+a & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

9. निम्न में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए—

(क) प्रारम्भिक संक्रियाओं द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 8

(ख) यदि $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ तो सिद्ध कीजिए— $(1-x)^2\frac{dy}{dx} = xy + 1$. 8