ગણિત–2 (051) G

કુલગુણ : 75 **પ્રશ્નપત્ર–1** **સમય : 3 કલાક**

પ્ર.–1 (અ) (1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ માટે સા. કરો કે $\lim_{\theta \to 0} \frac{Sin\,\theta}{\theta} = 1$ 2

(2) $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log_e a$ સા. કરો. ($a \in R^+ - \{1\}$) 2

(બ) ગમે તે બે ગણો : **4**

(1) $\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2\, Sin\,(a+h) - a^2\, Sin\, a}{h}$

(2) $\lim_{x \to \pi/4} \frac{\sqrt{2} - Cos\, x - Sin\, x}{(4x - \pi)^2}$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$

(ક) (1) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{Sin^{-1}x - \frac{\pi}{6}}{2x - 1}$ 2

(2) ગમે તે બે ગણો. (જરૂરી ગણતરી કરવી) 2

(i) $\lim_{n \to \infty} nr^2 \tan \frac{\pi}{n}$

(ii) $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$ માટે $\forall\ n,\ n \geq m,\ m, n \in N$

$\Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$ માટે $\varepsilon = 0.01$ માટે m નું ન્યુનતમ મૂલ્ય શોધો.

(iii) 2.123123123 ... ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

(ડ) (1) વ્યાખ્યાના આધારે $\frac{d}{dx}\left(\sin x\right)$ શોધો. 2

(2) જો $f(x) = e^{-4\log x}$ તો $f'(x)$ શોધો. 1

પ્ર.–2 (અ) (1) જો વિધેય $f : (a, b) \to R$ વ્યાખ્યાયિત હોય તથા $x \in (a, b)$ માટે f વિકલનીય હોય તો f એ x આગળ સતત પણ છે તથા આ પરિણામનું પ્રતીય સત્ય નથી. તેમ બતાવો. 2

(2) (i) પ્રચલ વિધેયના વિકલનનો નિયમ જણાવો. 1

(ii) સ્પર્શક અને અભિલંબની લંબાઈ અંગેના સૂત્ર લખો. 1

(બ) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) $y = \tan^{-1}\left[\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો જ્યાં $\pi < x < 2\pi$

(2) $\sin y = x \sin(a + y)$ તો $\frac{dy}{dx} = \frac{Sin^2(a+y)}{Sin\, a}$ સા. કરો.

(3) $x^y = y^x$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

(ક) માગ્યા પ્રમાણે કોઈપણ બે ગણો. 4

(1) 5 મીટર લાંબી સીડી દિવાલને અડકીને ટેકવેલી છે. તેના ઉપરનો છેડો 3 મીટર/ સેંકન્ડ જેટલા વેગથી નીચે સરકવા લાગે છે. તો તેનો જમીનને અટકી રહેલો છેડો દિવાલથી 3 મીટર દૂર હોય ત્યારે તે કેટલા વેગથી સરકતો હશે ?

(2) $x^2 - y^2 = a^2$ તથા $x^2 + y^2 = a^2$ વચ્ચેના ખૂણાનું રેડિયન માપ શોધો.

(3) જે બિંદુ આગળનો સ્પર્શક (3, 0) તથા (4, 1) ને જોડતી રેખાને સમાંતર બને તેવું બિંદુ $y = (x - 3)^2$ પર શોધો.

(4) બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ એવી શોધો, જેનો સરવાળો 60 હોય તથા એક સંખ્યા તથા બીજીના ધનનો ગુણાકાર મહત્તમ થાય.

(ડ) માગ્યા પ્રમાણે ગણો. 3

(i) સા. કરો કે $x > 0$ માટે $\log x$ વધતું વિધેય છે.

(ii) સા. કરો કે $f(x) = x^3$ ને $x \in [-1, 1]$ માં કોઈ સ્થાનીય મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય નથી.

(iii) ઉર્ધ્વ દિશામાં ફેંકેલા પથ્થરની શરૂઆતની ઝડપ 34.3 મીટર / સેકન્ડ છે તથા $S = 34.3\,t - 4.9\,t^2$ છે. પથ્થરે પ્રાપ્ત કરેલી મહત્તમ ઊંચાઈ શોધો.

પ્ર.–3 **(અ)** (1) ખંડશ : સંકલનનો નિયમ લખો અને સા. કરો. 2

અથવા

(1) $\int cosec\, x\, d\, x = log\, |cosec\, x - cot\, x| + c$

$$= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

(2) f એ $[0, a]$ પર સતત હોય તો સા. કરો કે

$$\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx$$ 2

(બ) ગમે તે બેના સંકલિતો મેળવો. 4

(1) $\int \frac{\log x}{(1+\log x)^2}\, dx$ (2) $\int \frac{2x+3}{x^2+4x+9}\, dx$

(3) $\int \frac{x^2}{x^4+1}\, dx$

(ક) નીચેનામાંથી ગમે તે બે ગણો. 4

(1) $\int_a^b \sin x\, dx$ ને સરવાળાના લક્ષરૂપે મેળવો.

(2) $\int_0^{\pi/2} \frac{Sin\, x\, Cos\, x}{1+Sin^4 x}\, dx$

(3) $\int_0^{\pi} \frac{x\, Sin\, x}{1+Sin\, x}\, dx$

(ડ) (1) સૂત્ર $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx$ ની મદદથી $\int e^x \cos x\, dx$ મેળવો. 2

(2) $\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + C$ 1

પ્ર.–4 (A) ગમે તે બે ગણો. **4**

(1) ઉકેલો : $\frac{dy}{dx} = (9x + y + 5)^2$

(2) બરફનો એક ટુકડો કોઈપણ સમયે તેના જથ્થાના સમપ્રમાણમાં પીગળે છે. જો બરફનો અડધો જથ્થો 30 મિનિટમાં પીગળતો હોય તો સાબિત કરો કે મૂળ સમયથી 90 મિનિટ બાદ બરફના મૂળ જથ્થાનો $\frac{1}{8}$ ભાગ બાકી રહેશે.

(3) $(x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x})\, dx + x \cos \frac{y}{x}\, dy = 0$

નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

(b) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) જેનો અર્ધશીર્ષકોણની α હોય અને આધારના વર્તુળની ત્રિજ્યા r હોય એવા સમશંકુનું ઘનફળ શોધો.

(2) $y = 2x + 1$ અને $y = x^2 + 1$ વચ્ચેના પ્રદેશનું ઘનફળ શોધો.

(3) $x^2 + y^2 = 64$ અને $y^2 = 12x$ વચ્ચેના ભાગનું ઘનફળ શોધો.

(c) ગમે તે બેના જવાબ આપો. 4

(1) $E(x) = 5$, $6x = 3$, $V(x) = 9$ તો $E(x^2)$, $E(3x + 2)^2$ $V(2 - 3x)$ શોધો.

(2) એક પ્રકારના તાવના ઈલાજ માટે ઉપયોગમાં લેવાતી દવાની દર્દીને થતી પ્રતિક્રિયાની સંભાવના p છે. 4 દર્દી ઓને આ દવા આપવામાં આવી. જો બે દર્દીને આ દવાની પ્રતિક્રિયા થાય તેની સંભાવના $\frac{8}{27}$ તો P શોધો.

(3) એક પાસાની રચના એવી છે કે તેને ઉછાળતા મળતી બાજુ પરના પૂર્ણાકની સંભાવના તે બાજુ પરના પૂર્ણાકના પ્રમાણમાં છે આ પાસાને ઉછાળવાથી મળતા નિદર્શાવકાશથી U પર x નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે.

X (u) = –2 u = 1, 2

= 4 u = 3, 4 તો X નું સંભાવના વિતરણ શોધો.

= 8 u = 5,6

(d) (1) $\int e^t [\log \sin t + \cot t]\, dt$ શોધો. 1

(2) સુરેખ વિકલ સમી.નું વ્યાપક સ્વરૂપ સમજાવો. 1

(3) વિકલ સમી.ના ઉપયોગ જણાવો. 1

પ્ર.–5 **(અ)** (1) ત્રણ ઘટનાઓ માટે સંભાવનાનો સરવાળાનો નિયમ લખો અને સાબિત કરો. 2

અથવા

સમસંભાવી ઘટના એટલે શું ? પ્રચલિત સંકેત પ્રમાણે સાબિત કરો કે ઘટના A માટે $P(A) = \frac{r}{n}$ જ્યાં $0 \leq r\ n$.

(2) જો A અને B પરસ્પર નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો સાબિત કરો કે A' અને B' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. તથા A અને B' પણ નિરપેક્ષ છે. 2

(બ) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) 4 પુરુષો અને 4 સ્ત્રીઓ યાદચ્છિક રીત એક હરોળમાં બેસે છે. (i) 4 સ્ત્રીઓ એક સાથે બેઠી હોય અને (ii) કોઈપણ બે સ્ત્રીઓ એક સાથે બેઠી ન હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(2) જો ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A \cup B) = 0.9$, $P(A \cap B') = 0.4$, $P(A' \cap B) = 0.3$ તો P (A) અને $P(A' \cup B')$ શોધો.

(3) જો P (C) = P (D) = P (E) = 1 હોય તો બતાવો કે $P(C \cap D \cap E) = 1$

(ક) (1) A, B અને C નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. જો P (A) = 2, P (B) = 4, P (C) = 0.4 હોય તો $P(A \cup B \cup C)$ અને $P(A \cap B \cap C)$ શોધો. 2

(2) (i) ચાર પત્રોને ચાર સરનામાવાળા કવરમાં મૂકતાં બધા જ પત્રો સાચા કવરમાં ન મુકાયેલ હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો. 1

(ii) સાબિત કરો કે $P(A'/B) = 1 - P(A/B)$ 1

(ડ) (1) પ્રમાણિત ચલિત બિંદુ કોને કહે છે ? 1

(2) અષ્ટોકી સંખ્યા $(216.34)_8$ ને દશોકી સ્વરૂપમાં લખો. 2

પ્ર.–1 (અ) $\lim_{\theta \to o} \frac{Sin\,\theta}{\theta} = 1$

સાબિતિ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $\sin\theta < \theta < \tan\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad 1 < \frac{\theta}{Sin\,\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$ ($\sin\theta \neq 0$ કારણકે $\theta \neq 0$)

$\therefore \quad \cos\theta < \frac{Sin\,\theta}{\theta} < 1$

$$\lim_{\theta \to o+} \cos\theta \leq \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \to o+} 1$$

[કારણ કે આપણે અવલોકન કરેલ છે કે a ના છિદ્રિત સામિપ્યમાં પ્રત્યેક x માટે $f(x) < g(x)$ તો $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$ તથા $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ હોવાથી માત્ર જમણી બાજુના લક્ષની જ વાત થઈ શકે.]

હવે $\lim_{x \to a} k = k$ હોવાથી $\lim_{\theta \to 0+} 1 = 1$

વળી, cos વિધેય સતત હોવાથી $\lim_{\theta \to 0+} \cos\theta = \cos 0 = 1$

$$1 \leq \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1 \qquad \therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

જો $\theta < 0$ હોય તો $\theta = -\alpha$ લેતાં, $\theta \to 0-$ તો $\alpha \to 0+$

$$\lim_{\theta \to 0-} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

$\therefore \quad \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

(2) $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log_e a$

ધારોકે $a^h - 1 = x$

$\therefore \quad a^h = 1 + x$

આથી $\lim_{h \to 0} a^h = a^o = 1$

આમ $\lim_{h \to 0} x = \lim_{h \to 0} (a^h - 1) = 0$

આમ $h \to 0$ તો $x \to 0$ લખી શકાય

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\log_a (1+x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}\log_a (1+x)}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\log_a \left[\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right]} \quad (\because \text{સંયોજિત વિધેયનું લક્ષ})$$

$$= \frac{1}{\log_a e}$$

$$= \log_e a \qquad (\because \text{આધાર પરિવર્તન})$$

(બ) ગમે તે બે ગણો.

(1) $\lim\limits_{x\to \pi/6} \dfrac{1/\sqrt{3} - \tan x}{\pi/6 - x}$

$$= \lim_{x\to \pi/6} \frac{\tan \pi/6 - \tan x}{\pi/6 - x}$$

$$= \lim_{x\to \pi/6} \frac{\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} - \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\pi}{6} - x} = \lim_{x\to \pi/6} \frac{\sin(\pi/6 - x)}{(\pi/6 - x)\cdot \cos \pi/6 \cdot \cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}/2} \lim_{(\pi/6 - x)\to 0} \frac{\sin(\pi/6 - x)}{\pi/6 - x} \cdot \lim_{x\to \pi/6} \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} (1) \frac{1}{\sqrt{3}/2} = 4/3$$

(2) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sqrt{2} - \cos x - \sin x}{4x - \pi}$

$$= \lim_{x\to \pi/4} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right]}{4x - \pi} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to \pi/4} \frac{\sqrt{2}\left[1 - \left[\cos x \cos \pi/4 + \sin x \sin \pi/4\right]\right]}{4x - \pi}$$

$$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{\sqrt{2}\left[1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]}{16\left[x - \frac{\pi}{4}\right]^2}$$ ધારોકે $x - \frac{\pi}{4} = 0$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sqrt{2}[1 - \cos\theta]}{16.\theta^2}$$ $x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta \Rightarrow 0$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sqrt{2}.2\sin^2\frac{\theta}{2}}{16\left(\frac{\theta}{4}\right)^2}$$ $\left[\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right]^2 = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta^2}{4}}$

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}} \left[\lim_{\frac{\theta}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right]^2$$ (સંયોજીત વિધેયનું લક્ષ)

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}} (1)^2$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}}$$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+mx)^n + (1+nx)^m}{x^2}$; m, n ∈ N

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left[1 + {}^nC_1 mx + {}^nC_2 m^2x^2 + \ldots\ldots + {}^nC_n m^n x^n\right] - \left[1 + {}^mC_1 nx + {}^mC_2 n^2x^2 + \ldots\ldots + {}^mC_m n^m x^m\right]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left[{}^nC_1 m + {}^nC_2 m^2x + \ldots\ldots + {}^nC_n m^n . x^{n-1}\right] - \left[{}^mC_1 n + {}^mC_2 n^2x + \ldots\ldots + {}^mC_m n^m x^{m-1}\right]}{x}$$

$\because {}^nC_1 = n$, ${}^mC_1 = m$ & ${}^nC_n = {}^mC_m = 1$ & ${}^nC_r mx = nmx\ {}^{n-1}C_{r-1}$

$$= \lim_{x \to 0} \left[{}^nC_1 m^2 + {}^nC_2 m^3 x + \ldots\ldots + {}^nC_n m^n x^{n-2}\right]$$

$$- \lim_{x \to 0} \left[{}^mC_1 n^2 + {}^mC_2 n^3 x + \ldots\ldots + {}^mC_m n^m x^{m-2}\right]$$

$$= \left[{}^nC_1 m^2 + 0 + \ldots\ldots + 0\right] - \left[{}^mC_1 n^2 + 0 + \ldots\ldots + 0\right]$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} m^2 - \frac{m(m-1)}{2} n^2$$

$$= \frac{mn}{2} [(n-1)m - (m-1)n] = \frac{mn(n-m)}{2}$$

(ક) (1) $\lim_{x \to 2} \frac{\sin^{-1} x - \pi/6}{2x-1}$

$\sin^{-1} x - \pi/6 = \theta$ ધારો

$\therefore \quad x = \sin(\pi/6 + \theta)$

$x \to 1/2$ તેમ $\theta \to 0$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{2\sin(\pi/6 + \theta) - 1}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{2(\sin \pi/6 \cos\theta + \cos \pi/6 \sin\theta) - 1} \qquad = \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sqrt{3}\sin\theta - (1 - \cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta - 1} \qquad = \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{2\sin\theta/2\left[\sqrt{3}\cos\theta/2 - \sin\theta/2\right]}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sqrt{3}.2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\theta/2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta/2}{\sin\theta/2} - \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}} = 1./\sqrt{3}$$

(2) ગમે તે બે ગણો

(i) $\lim_{n \to \infty} nr^2 \tan\frac{\pi}{n}$

$$= \lim_{n \to \infty} nr^2 \frac{\tan \pi/n}{\pi/n} \frac{\pi}{n} = \pi r^2$$

(ii) $|an - 0| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow n > 1/\varepsilon$

$\therefore$ m = $(1/\varepsilon + 1) = (1/0.01 + 1) = 101$ લઈ શકાય.

(iii) 2.123 123 123 ...

$= 2 + \{0.123 + 0.000123 + 0.000000123 + ...\}$

$= 2 + \left(\frac{a}{1-r}\right)$

$= 2 + \left(\frac{0.123}{1-0.001}\right) = 2 + \frac{123}{999} = \frac{1998+123}{999}$ $\left[\because S = \frac{a}{1-r}\ a = 0.123\ r = 0.001\right]$

$= \frac{2121}{999}$

$= \frac{707}{333}$

(૬) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{\sqrt{\sin t} - \sqrt{\sin x}}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{\sin t - \sin x}{(t - x)\left(\sqrt{\sin t} + \sqrt{\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{2\cos\left(\frac{t+x}{2}\right)\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{(t - x)\left(\sqrt{\sin t} + \sqrt{\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{t \to x} \frac{\cos\left(\frac{t+x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{\left(\frac{t-x}{2}\right)}}{\left(\sqrt{\sin t} + \sqrt{\sin x}\right)}$$

$$= \frac{\cos x.1}{\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin x}\right)} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

(2) $f(x) = e^{-4\log x}$

$f(x) = e^{\log x^{-4}}$

$f(x) = x^{-4}$

$\therefore \quad f'(x) = -4\ x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$

પ્ર.–2 (અ) (1) પાન નંબર 54 પ્રમેય – 1 (ટેક્સ મુજબ)

(2) (i) ટેક્સબુકના પાન નંબર – 76 મુજબ

(ii) સ્પર્શકની લંબાઈ = $\left|\frac{y_1}{m}\right|\sqrt{m^2+1}$

અભિલંબની લંબાઈ = $|y_1|\sqrt{m^2+1}$ જ્યાં $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$

(બ) (i) $y = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

$\therefore \quad y = \tan^{-1}\left(\tan^2 \frac{x}{2}\right)$

$\therefore \quad y = \tan^{-1}\left(\tan \frac{x}{2}\right) \qquad (\because \pi < x < 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi)$

$\therefore \quad y = -\tan^{-1}\left(\tan \frac{x}{2}\right)$

$\therefore \quad y = -\frac{x}{2}$ નું x ની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$

(ii) $\sin y = x \sin(a+y)$ નું x ની સાપેક્ષ વિકલન કરતા

$\therefore \quad \cos y \frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx}(\sin(a+y)) + \sin(a+y)\frac{d}{dx}(x)$

$\therefore \quad \cos y \frac{dy}{dx} = x \cos(a+y)\frac{dy}{dx} + \sin(a+y)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(a+y)}{\cos y - x\cos(a+y)}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(a+y)}{\cos y - \frac{\sin y}{\sin(a+y)}\cos(a+y)} \quad (\because x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)})$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin(a+y-y)}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

(iii) $x^y = y^x$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

$\therefore \quad y \log x = x.\log y$ ($\therefore$ બંને બાજુ log લેતાં)

$\therefore \quad y\frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(y) = x\frac{d}{dx}(\log y) + \log y \frac{d}{dx}(x)$

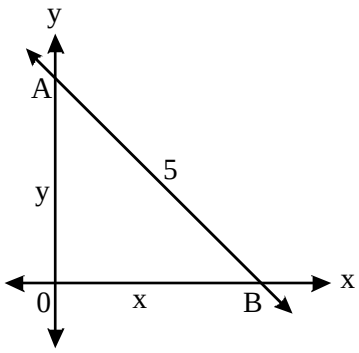
$$\therefore \quad \frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} (\log - \frac{x}{y}) = \log y - \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(x \log y - y)}{x(y \log x - x)}$$

પ્ર.–2 (ક)

(1)



ધોરોકે સીડી AB = 5

OA = y

OB = x છે.

Δ AOB કાટકોણ હોવાથી

$x^2 + y^2 = 25$ ... (1) સમી (1) નું x ની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-y}{x} \frac{dy}{dt} \qquad \text{... (2)}$$

સમી (1) જ્યાં $x = 3$ મૂકતાં $y^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore y = 4 \ (y > 0)$

$\rightarrow x = 3, y = 4 \ \frac{dy}{dt} = -3$ ની કિંમત સમી (2) માં મૂકતાં

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-4}{3} \ 3 = 4 \text{ મીટર / સેકન્ડ}$$

$\therefore$ નીચેનો છેડો 4 મીટર / સેકન્ડના દરે વધે છે.

(2) $x^2 - y^2 = a^2$ અને $x^2 + y^2 = a^2$ વક્રોને સરખાવતાં

$\therefore \quad x^2 - y^2 = x^2 + y^2$

$\therefore \quad 2y^2 = 0$

$\therefore \quad y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$

$\therefore \quad x^2 = a^2$

$\therefore \quad x = \pm a$

$\rightarrow$ જો $(a, 0)$ બિંદુઓ બંન્ને વક્રના ઢાળ

$2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$	$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$
$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$	$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
$\therefore m_1 = \frac{dy}{dx}$ (a, o) અશક્ય	$m_2 = \frac{dy}{dx}$ (a, o) અશક્ય

∴ $(a, 0)$ બિંદુઓ બંન્ને વક્ર y અક્ષને સમાંન્તર હોવાથી બંન્ને વચ્ચેનો કોણ $\theta = 0$ બને.

→ તે જ રીતે $(-a, o)$ બિંદુએ પણ બંન્ને વક્રવચ્ચેનો કોણ $\theta = 0$ બને.

(3) A (3, 0) અને B (4, 1) બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખાનો

ઢાળ $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{0-1}{3-4} = 1$ બને.

∴ $y = (x - 3)^2$ નું x ની સાપેક્ષ વિકલન કરતા

$\frac{dy}{dx} = 2(x - 3)$ $(x = \frac{7}{2} \Rightarrow y = (x - 3)^2)$

∴ $1 = 2(x - 3)$ $= (\frac{7}{2} - 3)^2$

∴ $2x = 1 + 6 = 7$ $y = \frac{1}{4}$

$x = \frac{7}{2}$ ∴ માગેલ બિંદુ $(x, y) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right)$ બંને.

(c) (4) ધારોકે એક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા x છે.

∴ બીજી ધન વાસ્તવિક સંખ્યા $60 - x$ બને.

∴ $f(x) = (60 - x)\, x^3$

∴ $f(x) = 60\, x^3 - x^4$ ... (1)

સમી (1)નું x ની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

∴ $f'(x) = 180x^2 - 4x^3$

$f''(x) = 360x - 12x^2$

→ $f(x)$ ની મહત્તમ અને ન્યુનતમ કિંમત માટે $f'(x) = 0$ મૂકતાં

∴ $4x^3 - 180x^2 = 0$

∴ $4x^2 (x - 45) = 0$

∴ $x = 0, x = 45$

(1) જો $x = 0$ તો $f''(x) = 0$ તેથી $x = 0$ માટે મહત્તમ કે ન્યુનત્તમ મલેનહી

(2) જો $x = 45$ તો $f''(x) < 0$ મલે છે તેથી

∴ માગેલ સંખ્યા એક = $x = 45$

બીજી સંખ્યા = $60 - x = 60 - 45 = 15$

(5) (i) અહી $f(x) = \log x$

∴ $f'(x) = \frac{1}{x}$

$x > 0$ માટે $f'(x) > 0$ મળે છે તેથી $x > 0$ માટે $f(x)$ વધતું વિધેય છે.

(ii) સ્થાનિય મહત્તમ અને ન્યુનત્તમ કિંમત માટે $f'(c) = 0$ બને.

∴ $3C^2 = 0$

∴ $C = 0$

પરંતુ $x < 0$ તો $f(x) < 0 = f(0)$

$x > 0$ તો $f(x) > 0 = f(0)$

$f(0)$ સ્થાનિક ન્યુનત્તમ કે મહત્તમ નથી.

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 \geq 0 \ \forall \ x \in R$ માટે બને છે.

$\therefore$ $[-1, 1]$ પર $f(x)$ વધતું વિધેય છે.

(iii) $S = 34.3\ t - 4.9t^2$ નું t ની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં વેગ $\frac{ds}{dt} = 34.3 - 9.8t$

$\rightarrow$ મહત્તમ ઊંચાઈ માટે $v = 0$ મૂકતાં $\quad 9.8\ t = 34.3$

$$qt = \frac{34.3}{9.8} = \frac{343}{98}$$

$\rightarrow$ $S = 34.3t - 4.9t^2$ માં t મૂકતાં $S = 60.025$ મીટર બને.

પ્ર.–3 1. ખંડશ : સંકલનનો નિયમ

જો (i) કોઈ અંતરાલ $I \subset R$ વિધેયો f અને g વિકલનીય હોય અને

(ii) તેમનાં વિકલિતો f' અને g' એ I પર સતત હોય તો,

$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx, \ x \in I$

સાબિતી : અહીં f અને g એ x નાં વિકલનીય વિધેયો છે.

$\therefore$ વિકલનના કાર્યનિયમ પ્રમાણે,

$$\frac{d}{dx}[f(x)\, g(x)] = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x) \quad (1)$$

વળી, આપેલી શરતો મુજબ f, g, f', g' અંતરાલ I પર સતત છે.

$\therefore$ fg' અને $f'g$ પણ સતત થશે અને તેથી તેઓ સંકલનીય છે.

$\therefore$ પરિણામ (1) માંથી પ્રતિવિકલનની વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$\begin{aligned} f(x)\, g(x) &= \int [f(x)g'(x) + f'(x)\, g(x)]\, dx \\ &= \int f(x)\, g'(x)\, dx + \int f'(x) \cdot g(x)\, dx \end{aligned}$$

$\therefore \quad \int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx \quad (2)$

જે ખંડશઃ સંકલનનું સૂત્ર છે.

અથવા (1)

$$\int \text{cosec}\ x\ dx = \log |\ \text{cosec}\ x - \cot x\ | = \log \left|\ \tan \frac{x}{2}\ \right| + C$$

$$\int \text{cosec}\ x\ dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cot \frac{x}{2}\ dx + \frac{1}{2} \int \tan \frac{x}{2}\ dx$$

બંને સંકલ્યો $\frac{x}{2} \neq \frac{n\pi}{2}$ ને સમાવતા કોઈપણ અંતરાલ પર પ્રતિવિકલનીય છે.

વળી, $\int f(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax + b)$ પ્રમાણે $a = \frac{1}{2}$ લેતાં,

$$\int \cot \frac{x}{2}\, dx = 2 \log\left|\sin \frac{x}{2}\right| \text{ અને } \int \tan \frac{x}{2}\, dx = -2 \log\left|\cos \frac{x}{2}\right|$$

$n\pi$, $n \in Z$ ને ન સમાવતા કોઈપણ અંતરાલ પર

$$\therefore \int \operatorname{cosec} x\, dx = \log\left|\sin \frac{x}{2}\right| - \log\left|\cos \frac{x}{2}\right| + c$$

$$= \log\left|\tan \frac{x}{2}\right| + c$$

વળી, $\log|\operatorname{cosec} x - \cot x| = \log\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| = \log\left|\tan \frac{x}{2}\right|$

આમ, $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log\left|\tan \frac{x}{2}\right| + c = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$

(2) સાબિતી : ધારો કે $I = \int_0^a f(a - x)\, dx$.

$x = a - t$ એટલે કે $a - x = t$ આદેશ લેતાં, $dx = -dt$

વળી, $\frac{dx}{dt} = -1$ નું ચિહ્ન અચલ છે. x તથા $\frac{dx}{dt}$ સતત છે.

$x = 0 \Rightarrow t = a$ અને $x = a \Rightarrow t = 0$

$$\therefore \quad I = \int_a^0 f(t)\,(-dt)$$

$$= -\int_a^0 f(t)\, dt = \int_0^a f(t)\, dt = \int_0^a f(x)\, dx$$

એટલે કે $\int_0^a f(x)\, dx = I = \int_0^a f(a - x)\, dx$

(બ) (1) $I = \int \frac{\log x}{(1+\log x)^2}\, dx$

$\log x = t$ આદેશ લેતાં

$x = e^t$

$dx = e^t\, dt$

$$I = \int \frac{t}{(1+t)^2}\, e^t\, dt$$

$$I = \int \frac{1+t-1}{(1+t)^2}\, e^t\, dt$$

$$I = \int \left[\frac{1+t}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \right] e^t \, dt$$

$$I = \int \left[\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \right] e^t \, dt$$

$$I = \frac{1}{1+t} \cdot e^t + c$$

$$I = \frac{x}{1+\log_e x} + c \quad \textbf{Ans.}$$

(2) $$\int \frac{2x+3}{x^2+4x+9} \, dx$$

$$= \int \frac{2x+4-1}{x^2+4x+9} \, dx$$

$$= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+9} \, dx - \int \frac{1}{x^2+4x+9} \, dx$$

$$= \int \frac{\frac{d}{dx}(x^2+4x+9)}{x^2+4x+9} \, dx - \int \frac{1}{x^2+4x+4+5} \, dx$$

$$= \int \frac{\frac{d}{dx}(x^2+4x+9)}{x^2+4x+9} \, dx - \int \frac{1}{(x+2)^2+(\sqrt{5})^2} \, dx$$

$$= \log | x^2 + 4x + 9 | - \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

(3) $$I = \int \frac{x^2}{x^4+1} \, dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x^2}{x^4+1} \, dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+x^2}{x^4+1} \, dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1+x^2-1}{x^4+1} \, dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+1} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4+1} \, dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-2+\frac{1}{x^2}+2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+2+\frac{1}{x^2}=2}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\,dx$$

$x - \frac{1}{x} = u$ ધારો $\qquad 1 + \frac{1}{x} = v$ ધારો

$(1 - \frac{1}{x^2})\,dx = du$ $\qquad \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = dv$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{v^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$I = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right| + c$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}\right| + c$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{x^2+1-\sqrt{2}\,x}{x^2+1-\sqrt{2}\,u}\right| + c$$

(ક) (1) $f(x) = \sin x$ એ $[a, b]$ પર સતત છે.

$[a, b]$ ના n સમાન ભાગ કરતાં પ્રત્યેક ઉપરાંત ચલની લંબાઈ $h = \frac{b-a}{n}$ થશે. તથા $x = a+ih$ થશે.

$$\int_a^b \sin x\,dx$$

$$= \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} h\,f\,(a + ih)$$

$$= \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} \sin (a + ih)$$

$$= \lim_{h \to 0} h \, [\sin (a + h) + \sin (a + 2h) + \sin (a + 3h) + ... + \sin (a + nh)]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} [2 \sin (a + h) \sin \frac{h}{2} + 2 \sin (a + 2h) \sin \frac{h}{2}$$

$$+ 2 \sin (a + 3h) \sin \frac{h}{2} + ... + 2 \sin (a + nh) \sin \frac{h}{2}]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} [+\cos(a + 3 \frac{h}{2}) - \cos (a + \frac{h}{2}) + \cos \left(a + \frac{5h}{2}\right) - \cos \left(a + \frac{3h}{2}\right)$$

$$+ ... + \cos (a + nh + \frac{h}{2}) - \cos (a + nh - \frac{h}{2})] \qquad h = \frac{b - a}{n} \quad nh = b - a$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} [- \cos (a + \frac{h}{2}) + \cos (a + nh + \frac{h}{2})] \qquad a + nh = b$$

$$= 1 \, . \, [\cos (b + 0) - \cos (a + 0)]$$

$$= \cos b - \cos a$$

(2) $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{1 + (\sin^2 x)^2} \, dx$$

$\sin^2 x = t$ આદેશ લેતાં

$2 \sin x \cos dx = dt$

$\sin x \cos x \, dx = \frac{dt}{2}$

જો $x = 0$ તો $t = 0$

$x = \pi/2$ તો $t = 1$

$$I = \int_0^1 \frac{dt/2}{1 + t^2}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_o^1 \frac{1}{1 + t^2} \, dt$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1} t\right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2}\ [\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0]$$

$$I = \frac{1}{2}\ [\frac{\pi}{4} - 0] = \frac{\pi}{8}$$

(3) $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin x}\ dx$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1 + \sin(\pi - x)}\ dx \qquad \because \int_0^a f(x)\ dx = \int_0^a f(a - x)\ dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1 + \sin x}\ dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x - x \sin x}{1 + \sin x}\ dx$$

$$I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \sin x}\ dx - \int_0^{1} \frac{\sin x}{1 + \sin x}\ dx$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 + \sin x - 1}{1 + \sin x}\ dx$$

$$2I = \pi \left[\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin x}\ dx\right]$$

$$2I = \pi \left[\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}\ dx\right]$$

$$2I = \pi \left[\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} (\sec^2 x - \tan x \sec x)\ dx\right]$$

$$2I = \pi\ [x - \tan x + \sec x]_0^{\pi}$$

$$2I = \pi\ \{(\pi - 0 - 1) - (0 - 0 + 1)\} = \pi\ (\pi - 2\ )$$ **Ans.**

(૪) (1) $\int e^x \cos x\ dx$

$$= \frac{1}{2} \int e^x\ 2 \cos\ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^x\ [\cos x + \cos x]\ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^x\ [\cos x + \sin x + \cos x - \sin x)]\ dx$$

$= \frac{1}{2} \int e^x [(\cos x + \sin x) + \frac{d}{dx} (\cos x + \sin x)] \, dx$

$= \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + c$ **Ans.**

(2) $[\int \tan x \, dx = \log | \sec x | + c]$, $x \neq n\pi$, $x \neq (2n - 1) \frac{\pi}{2}$, $n \in Z$

$\int \tan x \, dx = \frac{\sin x \, dx}{\cos x}$

હવે $f(x) = \cos x$ સતત તથા વિકલનીય છે તથા $(2n - 1) \frac{\pi}{2}$ ને ન સમાવતાં કોઈપણ અંતરાલ પર $\cos x \neq 0$

$f'(x) = -\sin x$ પણ સતત તથા વિકલનીય છ. તથા nπ ને ન સમાવતાં કોઈપણ અંતરાલ પર $\sin x \neq 0$. $t = \cos x$ લેતાં,

$\int \tan x \, dx = \int \frac{-dt}{t} = -\log | t | + c = -\log| \cos x | + c = \log | \sec x | + c$

શરત $x \neq \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$ છે સામાન્ય રીતે $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ અથવા $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ વગેરે લઈ શકાય.

પ્ર.4 **(અ)** (1) $\frac{dy}{dx} = (9x + y + 5)^2$

$9x + y + 5 = u$ લઈએ.

$\therefore \quad 9 + \frac{dy}{dx} + 0 = \frac{du}{dx}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 9.$

હવે, વિકલ સમી. નું નવું સ્વરૂપ.

$\frac{dy}{dx} - 9 = (u)^2$

$\frac{dy}{dx} = u^2 + 9$

$\frac{dy}{u^2 + 9} = dx$

$\therefore \quad \int \frac{1}{u^2 + 9} \, du = \int 1 \, dx.$

$$[(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{u}{3}) = x + e^{1}] \Rightarrow \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{3x+y+5}{3}\right) = x + C$$

(2) બરફનો જથ્થો = Q

સમય = t

બરફના જથ્થાનો પીગળવાનો દર = $\frac{dQ}{dt}$

અહીં $\frac{dQ}{dt} \alpha$ Q

$\therefore \quad \frac{dQ}{dt} = -$ KQ

જ્યાં K = ચલનનો અચળ ઋણ સંજ્ઞા ઘટાડો સૂચવે છે.

$\frac{1}{Q}$ dQ = – Kdt

$\int \frac{1}{Q}$ dQ = – K $\int$ (1) dt

$\therefore$ log Q = – Kt + C .... (1)

t = 0 ત્યારે બરફનો મૂળ જથ્થો = m

$\therefore$ log m = – K.O + C.

[C = log m] .... (1)

t = 30 મિનિટ ત્યાર Q = $\frac{m}{2}$

$\therefore$ log $\frac{m}{2}$ = – K (30) + log m

K (30) = log $\frac{m}{2}$

K = $\frac{1}{30}$ log 2

(1) પરથી

log Q = – $\frac{t}{30}$ log 2 + log m.

t = 90 મિનિટ ત્યારે Q = ?

$\therefore$ log Q = – $\frac{90}{30}$ log 2 + log m.

$\therefore$ log Q = log $(2)^{-3}$ + log m.

$\therefore \quad \log Q = \log \frac{1}{8} + \log m.$

$\log Q = \log \frac{m}{8}$

$[\therefore Q = \frac{m}{8}]$

આમ, 90 મિનિટ બાદ બરફના મૂળ જથ્થાનો $\frac{1}{8}$ ભાગ બાકી રહેશે.

(2) $(x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x})\, dx + x \cos \frac{y}{x}\, dy = 0$

હવે સમી. $(x \,.\, \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x})\, dx + x \cos \frac{y}{x}\, dy = 0$

હવે, x વડે ભાગતાં,

$(\sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x})\, dx = - \cos \frac{y}{x}\, dy$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} - \sin\frac{y}{x}}{\cos y/x}$ ... (ii) $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \tan \frac{y}{x}$

હવે $y / x = V$ એટલે કે $y = vx$.

આદેશ લઈ x – પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$ મળે.

આ કિંમતો સમી. (1) માં મૂકતાં,

$\therefore \quad v + \frac{xdv}{dx} = v - \tan v$

$\therefore \quad \frac{xdv}{dx} = - \tan v$

$\cot v\, dv = - \frac{dx}{x}$ ..... (3)

સંકલન કરતાં, $\int \cot v\, dv = - \int \frac{dx}{x} + \log C$

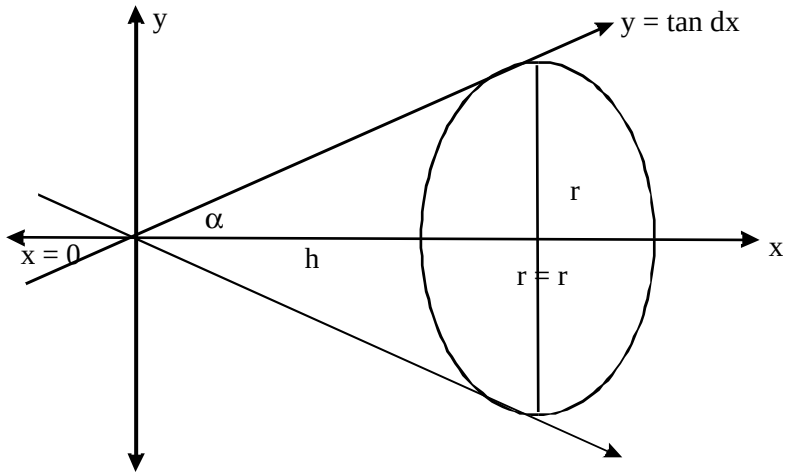
$\log | \sin V | + \log | x | = \log C$

$\log [x (\sin V)] = \log C$

$x \sin V = C$

$\therefore \quad x \sin \left[\frac{y}{x}\right] = C$, ઉકેલ મળે.

(બ)



આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ઉગમ બિંદુમાંથી પસાર થતી x – અક્ષની ધન દિશા સાથે α માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાનું સમી.

$$(y - 0) = \tan \alpha \, (x - 0)$$

$$y = \tan \alpha \, . \, x.$$

આ રેખાના $x = 0$ થી $x = h$ સુધીના ભાગનું x – અક્ષ આસપાસ ઘન પદાર્થનું ઘનફળ જરૂરી. સમશકું નું ઘનફળ થાય.

$$\therefore \quad V = \pi \int_0^h y^2 \, dx \quad \text{મુજબ,}$$

$$V = \pi \int_0^h \tan^2 \alpha \, . \, x^2 \, dx$$

$$\therefore \quad V = \pi \tan^2 \alpha \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h$$

$$= \pi \tan^2 \alpha \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h$$

$$= \pi \tan^2 \alpha \, \frac{h^3}{3}$$

$$= \pi \left(\frac{r}{h} \right)^2 \frac{h^3}{3} \qquad (\because \text{ આકૃતિપરથી})$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

જે જરૂરી ઘનફળ છે.

(2) આપેલ બે વક્રોના સમી.

$y = 2x + 1$, $y = x^2 + 1$

આ બંને પદોના છેદ બિંદુના યામ મળે

$2x + 1 = x^2 + 1$

$x^2 - 2x = 0.$

$x\ (x - 2) = 0$

$x = 0,\ x = 2$

આ બંને વક્રો વચ્ચે આવૃત પ્રદેશનું x – અક્ષ આસપાસ. પરિભ્રમણ કરાવતા રચાતા. ઘનપદાર્થનું ઘનફળ

$$V = \pi \int_o^2 [y_1^2 - y_2^2]\ dx$$

$y_1 = x^2 + 1,\ y^2 = 2x + 1$

$$\therefore \quad V = \pi \left| \int_o^2 [x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2 - 4x - 1]\ dx. \right.$$

$$= \left|\pi \int_o^2 [x^4 - 2x^2 - 4x]\ dx\right]$$

$$\therefore \quad V = \pi \left| \frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 8 - 0 - 0 - 0 \right.$$

$$= \pi \left| \frac{32}{5} - \frac{16}{3} - \frac{24}{3} \right.$$

$$= \pi \left| \frac{32}{5} - \frac{40}{3} \right.$$

$$= \pi \left| \frac{96 - 200}{15} \right.$$

$$[\therefore\ V = \frac{104}{15}\ \pi \text{ એકમ.}]$$

(3) અહીં $x^2 + y^2 = 64$ માં $y^2 = 12x$ મૂકતાં

$x^2 + 12x = 64.$

$x^2 + 12x - 64 = 0$

$(x - 4)\ (x + 16) = 0$

$\therefore \quad x = 4$ કે $x = -16$

હવે,

$y^2 = 12x$ માં $x = -16$ લેતાં, $y^2 < 0$ મળે જે અશક્ય છે.

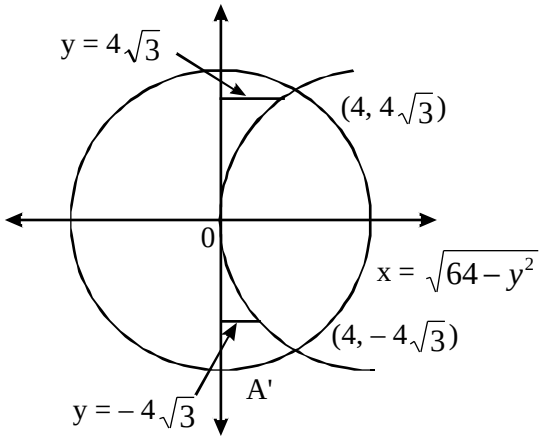
$\therefore \quad x \neq -16.$

તથા $x = 4$ લેતાં $y^2 = 48$

$\therefore \quad y = \pm 4\sqrt{3}$ મળે ... (1)

આપેલ વર્તુળ અને પરવલય છેદ બિંદુ A $(4, 4\sqrt{3})$ અને A' $(4, -4\sqrt{3})$ મળે.

આપલો y – અક્ષ પરત્વે ક્ષેત્રફળ શોધીશું.



અહીં વર્તુળ $x^2 + y^2 = 64$, પરથી

$$x = \sqrt{64 - y^2}$$

$\therefore \quad y^2 = 12x$ પરથી $x = \dfrac{y^2}{12}$

હવે વર્તુળ અને પરવલય વડે ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ A = | I |;

જ્યાં $\quad I = \int_c^d [g_1(x) - g_2(x)]\, dy$

તથા

$g_1(u) = \sqrt{64 - y^2}$ અને

$g_2(u) = \dfrac{y^2}{12}$ લઈશુ

$$\therefore \quad I = \int_{-4\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}} \left[\sqrt{64 - y^2} - \frac{y^2}{12}\right] dy$$

$$= 2\int_{4\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}} \left[\sqrt{8^2 - y^2} - \frac{y^2}{12}\right] dy \qquad (\therefore \text{ યુગ્મ વિધેય})$$

$$= 2\int_0^{4\sqrt{3}} \sqrt{8^2 - y^2}\; dy - \frac{1}{6}\int_0^{4\sqrt{3}} y^2\, dy$$

$$= -2\left[\frac{y}{2}\sqrt{8^2 y^2} + \frac{8^2}{2}.\sin^{-1}\frac{y}{8}\right]_{4\sqrt{3}}^{8} - \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{4\sqrt{3}}^{8}$$

$$= 2\left[\frac{8}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.\sqrt{64-48} + 32\sin^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}\right] - 0 - \frac{1}{6}\left[\frac{64\ x3\sqrt{3}}{3} - 0\right]$$

$$= 16\sqrt{3} + \frac{64\pi}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{16}{3}\ [4\ \pi + \sqrt{3}]$$

Q.4 **(C)** (1) $E(x) = 5, \quad 6x = 3$

$V(x) = 9$

$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$9 = E(x^2) - 25$

$E(x^2) = 34$

$E(3x + 2)^2 = E(9x^2 + 12x + 4)$

$= 9E(x^2) + 12\ E(x) + 4.$

$= 9\ (34) + 12(5) + 4$

$= 306 + 60 + 4.$

$= 370$

$V(2 - 3x) = 9.V(x)$

$= 9(9)$

$= 81$

$V(2 - 3x) = 81$

(2) ધારોકે દવાથી પ્રતિક્રિયા થાય તે દર્દીઓની સંખ્યા દર્શાવતો યાચ્છિક ચલ X છે. સ્પષ્ટ છે કે X એ $n = 4$ અને P પ્રચલવાળા દ્વિપક્ષી યાદચ્છિક ચલ થશે જેનું સંભાવના વિધેય,

$$p(x) = P(X = x) = \binom{4}{x} p^x\ q^{4-x}\ ,\ x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

હવે, $x = 2$ મૂકતાં

$$P(2) = \binom{4}{2} p^2\ (1 - p)^2 = 6p^2\ (1 - p)^2$$

પરંતુ $p\ (2) = \frac{8}{27}$ આપેલ છે.

$$6\ p^2\ (1 - p)^2 = \frac{8}{27}$$

$$\therefore \quad P^2\ (1 - P)^2 = \frac{4}{81}$$

$$\therefore \quad P\ (1 - P) = \frac{2}{9} = \frac{1}{3}\ (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\ (1 - \frac{2}{3})$$

$\therefore$ [P = $\frac{1}{3}$] અથવા [P = $\frac{2}{3}$]

(3) V = {1, 2, 3, 4, 5, 6} , n = 6

ઘટના A : A_i = {i}, i = 1, 2 – 6

P (A_i) α *i*

P (A_i) = K*i*

હવે,

$$\sum_{i=1}^{6} p(x_i) = 1$$

K + 2K. + 3K. + 4K. + 5K + 6K = 1

$\therefore$ 21 K = 1

$\therefore$ K = $\frac{1}{21}$

X = –2, 4, 8.

P (X = –2) = P (U = 1, 2)

$= \frac{1}{21} + \frac{2}{21}$

$= \frac{3}{21}$

P (*x* = 4) = P (U = 3, 4)

$= \frac{3}{21} + \frac{4}{21}$

$= \frac{7}{21}$

P (*x* = 8) = P (U = 5, 6)

$= \frac{5}{21} + \frac{6}{21}$

$= \frac{11}{21}$

– X નુ સંભાવના વિતરણનું કોષ્ટક

$x = x_i$	– 2	4	8
$3(x_i)$	3/21	7/21	11/21

Q.4 (D) (1) I = $\int e^t$ [log sin *t* + $\frac{d}{dt}$ (log sin *t*) *dt.*

$\frac{d}{dt}$ (log sin *t*) = $\frac{\cos t}{smt}$ = cot t.

$\therefore$ I = log sint e^t + C.

(2) સુરેખ વિકલ સમી.નું વ્યાપક સ્વરૂપ

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q.$$

જ્યાં P, Q એ X ના વિધેયો છે.

બંને બાજુ $e^{\int pdx} = e^{p\int idx} = e^{px}$ વડે ગુણીએ

$$\frac{dy}{dx} e^{px} + Pe^{px} y = Q\ e^{px}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} (e^{Px} y) = Q\ e^{px}$$

$ye^{px} = \int Q\ e^{px}\ dx + C$ જેને સાદુંરૂપ આપતા વ્યાપક ઉકેલ મળે.

(3) વિકલ સમી.નો ઉપયોગ મેડીકલ ક્ષેત્રે, વ્યાપારી ક્ષેત્રે, પ્રયોગ શાળામાં, સ્ટીમરની ગતિમાં વગેરે જગ્યાએ થાય છે.

– વિવિધ પદાર્થો જેવા કે કે બરફ, યુરેનિયમનો ક્ષયદર માપવા માટે,

– સ્ટીમરનો વેગ, પ્રવેગ જાણવા માટે, વ્યાપારી ક્ષેત્રમાં

– વિવિધ વેગના સમી. મેળવવા.

જ. 5 (અ) (1) ત્રણ ઘટનાઓ માટે સંભાવનાનો સરવાળાનો નિયમ :

ત્રણ ઘટનાઓ A, B, C માટે

$P (A \cup B \cup C) = P (A) + P (B) + P(C) – P (A \cap B) – P (B \cap C) – P (C \cap A) + P (A \cap B \cap C)$

સાબિતી :

$P [(A \cup (B \cup C)]$

$= P (A) + P (B \cup C) – P [A \cap C\ B \cup C]$

$= P (A) + P (B \cup C) – P [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

(વિભાજનનો નિયમ)

$= P (A) + [P (B) + P (C) – P (B \cap C) – [P (A \cap B) + P (A \cap C) – P [(A \cap B) \cap (A \cap C)}$

$= P (A) + P(B) + P (c) – P (A \cap B) – P (B \cap C) – P (C \cap A) + P (A \cap B \cap C)$

અથવા

(1) સમસંભાવી ઘટનાઓ : ધારો કે $U = \{x_1, x_2, ... x_4\}$ એક સાન્ત નિદર્શાવકાશ છે. જો $P (\{x_1\} = p (\{x_2\}) = ... = p(\{x_n\})$ હોય તો મૂળભૂત ઘટનાઓ $\{x_1\}, \{x_2\} – \{X_n\}$ સમસંભાવી છે એમ કહેવાય.

ધારો કે $U = \{x_1, x_2, ... x_n\}$

તથા $A = \{x_1, x_2 ...., x_r\}$ જ્યાં $(r \angle n)$ કોઈ ઘટના છે.

A ની પ્રાથમિક ઘટનાઓ માટે

$\{x\} \cap \{x_2\} \cap – \cap \{x_r\} = \phi$ તથા

$\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup – \cup \{x_r\} = A$ હોવાથી

$\{x_1\}, \{x_2\} ... \{x_r\}$ એ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ થશે.

પૂ.(3) પરથી

$P\ [\ \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup - \cup \{x_r\}] = P\ \{x_1\} + P\ \{x_2\} + ... + ... + P\ \{x_r\}$

$\therefore$ P (A) = $P\ (\{x_1\}) + P\ (\{x_2\} + ... + P\ (\{x_r\})$

પરંતુ પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી હોવાથી તેની સંભાવના $\frac{1}{n}$ છે.

$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}$ (r – વખત)

$= rx$ 

[p (A) = $\frac{r}{n}$] જ્યાં $r \leq n$

(2) A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોવાથી

P (A $\cap$ B) = P (A) . P (B) ... (I)

હવે A' અને B' નિરેપક્ષ છે. તેમ બતાવવા માટે

P (A' $\cap$ B') = P (A'). P (B') સાબિત કરવું પડે.

P (A' $\cap$ B') = p [(A $\cup$ B)']

= 1 – P (A $\cup$ B)

= 1 – [P (A) + P (B) – P(A $\cap$ B)]

= 1 – [P (A) + P (B) – P (A) . P (B)] = 1 – P (A) – P(B) + P(A)P(B)

= 1 [1 – P (A)] – P (B) [1 – P (A)]

= [1 – P (A)] [1 – P (B)]

= P (A') P (B') $\swarrow\nearrow$ A' અને B' નિરપેક્ષ છે.

તથા P (A $\cap$ B') = P (A) – P (A $\cap$ B)

= P (A) – P (A) . P (B)

= P (A) [1 – P(B)]

= P (A) . P (B')

A અને B' નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

(બ) (1) 4 પુરુષો + 4 સ્ત્રીઓ = 8 વ્યક્તિઓને એક હરોળમાં

8p n = $8P_8$

= 8!રીતે બેસાડી શકાય

(i) ધારોકે A = 4 સ્ત્રીઓ એક સાથે બેઠી હોય તે ઘટના.

r = 4! x4! x5 = 4! x5!

$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{4! \times 5!}{8!}$

$= \frac{4 \times 3 \times 2 \times 5}{8 \times 7 \times 8 \times 5} = \frac{1}{14}$

(ii) B = કોઈપણ બે સ્ત્રીઓ એકી સાથે બેઠી ન હોય તે ઘટના

$r = 4! \times 5P_4$

$P(B) = \frac{r}{n} = \frac{4! \times 5P_4}{8!} = \frac{4! \times 5!}{8! \times 1!} = \frac{1}{14}$

(2) અહીં $A \cap B'$, $A \cap B$, $A' \cap B$ એ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

$A \cap B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(A \cap B) + P(A' \cap B)$

$0.9 = 0.4 + P(A \cap B) + 0.3$

$P(A \cap B) = 0.9 - 0.7 = 0.2$

હવે $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

$0.4 = P(A) - 0.2$

$P[(A) = 0.6]$

$P(A' \cup B') = P(A \cap B)'$

$= 1 - P(A \cap B)$

$= 1 - 0.2$

$[P(A' \cup B') = 0.8]$

(3) $P(C) = P(D) = P(E) = 1$

હવે $c \subset U$ હોવાથી

$P(c) \leq P(U) = 1$

$P(C) \nless 1$ ($\because P(C) = 1$)

$\therefore$ $C \not\subset U$ પરંતુ $C = U$

તેજ રીતે $P(D) = 1$ હોવાથી $D = U$

$P(E) = 1$ હોવાથી $E = U$ મળે.

તેથી $C \cap D \cap E = U \cap U \cap U$ હોવાથી

$P(C \cap D \cap E) = P(U) = 1.$

(ક) (1) અહીં $P(A) = 2P(B) = 4P(C) = 0.4$

$\therefore$ $\nearrow P(A) = 0.4$, $P(B) = \frac{0.4}{2} = 0.2$, $P(C) = \frac{0.4}{4} = 0.1$

$\therefore$ $P(A') = 0.6$, $P(B') = 0.8$, $P(C') = 0.9$

વળી A, B, C નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. તેથી A', B', C' પણ નિરપેક્ષ છે.

હવે (i) $P(A \cup B \cup C) = 1 - P[(A \cup B \cup C)']$

$= 1 - P(A' \cap B' \cap C')$

$= 1 - P(A') \cdot P(B') \cdot P(C')$

$= 1 - (0.6)(0.8)(0.9)$

$= 1 - 0.432$

$= 0.568$

(ii) $P(A \cap B \cap C) = P(A).\ P(B)\ .\ P(C)$

$= (0.4)\ (0.2)\ (0.1)$

$= 0.008$

(2) (i) ચાર પત્રોને ચાર સરનામાવાળા કવરમાં મૂકવાના કુલ પ્રકાર = 4! = 24

$\therefore \quad n = 24$

ધોરોકે A = બધાં જ પત્રો ખરા કવરમાં મૂકાય તે ઘટના

$\therefore \quad r = 4C_4 = 1$

$\therefore \quad P(A) = r_n = \frac{1}{24}$

$\therefore$ બધા જ પત્રો સાચા કવરમાં મૂકાયેલ ન હોય તે ઘટના A' ની સંભાવના

$P(A') = 1 - P(A)$

$= 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$

(ii) $P(A'/B) = 1 - P(A/B)$

અહીં A અને A' પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.

$\therefore \quad P(A'/B) = \frac{p(A' \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{P[B - (A \cap B)]}{P(B)} \quad (\because A \cap B \subset B)$

$= \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

[P (A'/ B) = 1 – P (A / B)]

(૩) (1) પ્રમાણિત ચલિત – બિંદુ નિરૂપણ :

જેના અપૂર્ણ અંશની સંખ્યા 0 અને 1 ની વચ્ચ એટલે કે (0.1) માં હોય અને તેનો દશાંશ – ચિહ્ન પછીનો એક શૂન્યેત્તર હોય તો વાસ્તવિક દશાંકી સંખ્યાના આ પ્રકારના ચલિત બિંદુપ નિરૂપણને પ્રમાણિત ચલિત–બિંદુ નિરૂપણ કહે છે.

(2) $(216.34)\ 8$

$= (2 \times 8^2) + (1 \times 8^1) + (6 \times 8^0) + (3 \times 8^{-1}) + (4 \times 8^{-2})$

$= (2 \times 64) + (1 \times 8) + (6 \times 1) + (3 \times 1/8) + (4 \times 1/64)$

$= 128 + 8 + 6 + 3 \times 0.125 + 4 \times 0.015625$

$= 142 + 0.375 + 0.0625$

$= 142.4375 \nearrow\swarrow (216.34)_8 = (142.4375)_{10}$