ગણિત–2 (051) G

કુલગુણ–75 **પ્રશ્નપત્ર–3** **સમય : 3 કલાક**

પ્રશ્ન–1 (અ) (1) સાબિત કરો કે, જો $0 < \delta_1 < \delta_2$ તો $N(a, \delta_2) \subset N(a, \delta_2)$ $a \in R$ (2)

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ સાબિત કરો. તેમજ અનંતશ્રેણીના લક્ષની વ્યાખ્યા આપો. (2)

(બ) ગમે તે બે ગણો : (4)

(1) $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1}x - \frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}$

(2) $\lim_{x\to e} \frac{\text{lag } x - 1}{x - e}$

(3) $\lim_{x\to \pi/6} \frac{2\sin x - 1}{\sqrt{3}\tan x - 1}$

(ક) (1) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$ (2)

(2) ગમે તે બે ગણો (જરૂરી ગણતરી કરવી) (2)

(1) $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}$, $x \neq 0$ તથા $f(0) = K$ જો એ $x = 0$ માટે સતત છે તો K શોધો.

(2) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots\ldots + \frac{n}{n^2}\right]$ શોધો.

(3) $\lim_{n\to\infty} \cos^{-1}\left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right)$ શોધો.

(ડ) (1) જો $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ તો સાબિત કરો કે $x^2y_2 + xy_1 + n^2y = 0$ (2)

(2) જરૂરી ગણતરી સાથે ખાલી જગ્યા પૂરો (1)

$\frac{d}{dx}(x^x) =$ _____

પ્રશ્ન-2 (અ) (i) પ્રતિવિધેયના વિકલનનો નિયમ લખો અને તેની મદદથી $\frac{d}{dx}(Sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

સા. કરો $|x| > 1$ (2)

(ii) વિકલનની વ્યાખ્યાની મદદથી $\frac{d}{dx}(Sm = \sin^2 x) = Sm = \sin 2x$ સા. કરો. (1)

(iii) વધતું તથા ઘટતાં વિધેયની વ્યાખ્યા આપો. (1)

(બ) કોઈપણ બે ના માગ્યા પ્રમાણે ગણો. (4)

(i) $y = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ $0 < x < \frac{1}{2}$, તથા $\frac{1}{2} < x < 1$ માટે $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

(ii) વિકલનની વ્યાખ્યાની મદદથી x^3 નું વિકલન મેળવો.

(iii) $x = a(\theta - \sin\theta)$ $y = a(1 - \cos\theta)$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

(ક) ગમે તે બે ગણો. (4)

(1) રેતીનો ઢગલો શંકુ આકારે 10 ઘનમીટર / સેકન્ડના દરે થઈ રહ્યો છે. તેના પાયાની ત્રિજ્યા હંમેશા ઊંચાઈથી અડધી રહે છે. તો ઢગલો 5 મીટર ઊંચો થાય ત્યારે તેની ઊંચાઈ વધવાનો દર શોધો.

(2) $y = x^3$ તથા $x^2 + 6y = 7$ પરસ્પર કાટખૂણે છેદે તેમ સાબિત કરો.

(3) જો $x > 0$ તો $\log(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}$

(4) કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણની લંબાઈ આપેલ હોય તો સા. કરો કે તે સમદ્વિભૂજ કાટકોણ હોય ત્યારે તેનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય.

(ડ) માગ્યા પ્રમાણે ગણો. (3)

(1) આસન્ન મૂલ્ય શોધો $\tan^{-1}(0.99)$

(2) l લંબાઈના સાદા લોલકનો આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$ છે. જો લંબાઈમાં 2% જેટલો વધારો થાય તો આર્વતકાળ માં કેટલો ફેરફાર થશે ?

(3) a ની એવી સૌથી નાની કિંમત શોધો કે જેથી $x^2 + ax + 1$ એ [1, 2] પર વધતું વિધેય છે.

પ્રશ્ન-3 (અ) (1) f જ અંતરાલ $I \subset R$ પર પ્રતિવિકલનીય વિધ્યો હોય તો સા. કરો કે, (2)

(i) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(ii) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, K અચળ

અથવા

(1) $\int \text{See} \times dx = \log|\text{See}\, x + \tan x| + C$

$$= \log\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{d}{4}\right)\right| + C$$

(2) f એ [-a, a] પર સતત તથા યુગ્મ હોય તો સા. કરો કે $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ (2)

(બ) ગમે તે બે ગણો (4)

(1) $\int \frac{\sin x}{\sin 4x} dx$

(2) $\int e^x\left(\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\right)dx$ $\quad (0 < x < \pi)$

(3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$

(ક) ગમે તે બે ગણો (4)

(1) જો $f(n) = \int_{6}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$ તો સા. કરો કે $f(n) + f(n-2) = \frac{1}{n-1}$, $n \neq 1$

(2) $\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\, dx$ મેળવો.

(3) $\int_{0}^{\pi} x\, Sinx^4 dx = \frac{3\pi^2}{16}$ સા. કરો.

(ડ) (1) $\int \sqrt{See\, x + 1}\, dx$ મેળવો. (2)

(2) $\int \frac{f^1(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx = 2\sqrt{f(x)} + c$ (1)

પ્રશ્ન-4 (અ) ગમે તે બે જવાબ આપો. (4)

(1) R^2 માં આપેલી y– અક્ષને સમાંતર હોય તેવી તમામ સુરેખાઓનું વિકલ સમીકરણ મેળવો.

(2) $\frac{dy}{dx} = y + \text{Sin}\, x + \text{Cos}\, x$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

(3) એક દેશની વસ્તી 100 વર્ષમાં 3 ગણી થાય છે. જો વસ્તી વધારાનો દર તે સમયની વસ્તીના સમપ્રમાણમાં હોય તો કેટલા વર્ષમાં વસ્તી બમણી થશે ?

(4) $xy^2 \frac{dy}{dn} = x^3 + y$, $x = 1$ ત્યારે $y = 0$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ શોધો.

(બ) ગમે તે બેના જવાબ આપો. (4)

(1) $x = 3y^2 - 9$, y અક્ષ અને રેખાઓ $y = 0$, $y = 1$ વચ્ચેના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(2) $y = x^2 + 1$, અને $y = 2x + 1$,વચ્ચેના પ્રદેશનું ઘનાફળ શોધો.

(ક) ગમે તે બેના જવાબ આપો. (4)

(1) $n = 5$, $P = 0.3$, $g = 0.7$ તો $E(x)$ અને σx^2 શોધો.

(2) એક યાદચ્છિક ચલ x સમાન સંભાવના સાથે 1 થી 100 પૂર્ણાંકો કિંમતો તરીકે ધારણ કરે છે તો $E(x)$, Ex^2 σx^2 શોધો.

(3) 100 કેરીઓમાંથી 5 કેરી બગડેલી છે. પેટીમાંથી 10 કેરી યાદચ્છિકરી રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. 10 પૈકીની એકથી વધુ કેરી બગડેલી હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ડ) (1) સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ વિશે સમજાવો. (2)

(2) $\int [\text{Sin}^{-1} x + \text{Sec}^{-1} x^{-1}]^5\, dx$ મેળવો. (1)

પ્રશ્ન-5(અ) (1) જો A અને B કોઈ ઘટનાઓ હોય, તથા $A \subset B$ હોય તો સાબિત કરો કે, (2)

$P(B - A) = P(B) - P(A)$ અને $P(A) \leq P(B)$

અથવા

(i) વ્યાખ્યા આપો : સંભાવના વિધેય (1)

(ii) કોઈપણ ઘટના A માટે $P(A') = 1 - P(A)$ સાબિત કરો. (1)

(2) B_1 અને B_2 પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ છે. જ્યાં $P(B_i) \neq 0$. જો ઘટના A એ B_1 અને B_2 પૈકી ગમે તે એક ઘટના સાથે ઉદ્‌ભવતી હોય તો સાબિત કરો કે.

$P(A) = P(A/B_1)\ P(B_1) + P(A/B_2)\ P(B_2)$ (2)

(બ) ગમે તે બે ગણો. (4)

(1) એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો પ્રથમ બે પૈકીના દરેક પ્રયત્ને છાપ મળે તે ઘટના ને A વડે, ત્રીજા પ્રયત્ને કાંટો મળે તે ઘટના ને B વડે અને ત્રણ પ્રયત્નોમાં બરાબર બે વખત કાંટો મળે તે ઘટના ને C વડે દર્શાવીએ તો ઘટનાઓ A અને B તથા ઘટનાઓ B અને C નિરપેક્ષ છે કે કેમ તે ચકાસો.

(2) બરાબર ચીપેલા 52 પત્તાના એક ઢગમાંથી એક પત્તુ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. જો A અને B પસંદ કરેલ પત્તુ અનુક્રમે કાળા રંગ નું હોય અને ચિત્રવાળુ હોય તે ઘટનાઓ દર્શાવે તો $P(A \cup B)$ શોધો.

(3) એક કચેરીમાં બે કર્મચારી પૈકી એક કારકુન અને એક પટાવાળા છે. કચેરી ના કામના કોઈપણ દિવસે કારકુન ગેરહાજર હોય, પટાવાળો ગેરહાજર હોય અને બંને ગેરહાજર હોય તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.08, 0.05 અને 0.02 છે તો :

(i) બે કર્મચારીઓ પૈકી ઓછા માં ઓછા એક કર્મચારી ગેરહાજર હોય.

(ii) ગમે તે એક અથવા બંને કર્મચારી હાજર હોય.

(iii) માત્ર એક કર્મચારી ગેરહાજર હોય તે ઘટનાઓની સંભાવના શોધો.

(ક) ગમે તે બે ગણો. (4)

(1) એક વર્ષના સમાયગાળા માટે વાહનોનો વીમો ઊતારવાની એક સામાન્ય વીમા કંપની તેના વીમેદારોનું નીચેના ત્રણ પરસ્પર નિવારક સમૂહોમાં વર્ગીકરણ કરે છે.

T_1 : અતિશય જોખમી પ્રકૃતિવાળા

T_2 : જોખમી પ્રકૃતિવાળા

T_3 : ઓછા જોખમી પ્રકૃતિવાળા

ભૂતકાળ ના અનુભવને આધારે કંપનીને માલુમ પડે છે કે તેના વીમેદારો પૈકીના 30% સમૂહ ના T_1 માં, 50% સમૂહ ના T_2 માં અને બાકીના સમૂહ T_3 માં સમાવિષ્ટ છે. તેવા વીમેદાર ને વીમાના વર્ષમાં અકસ્માત નડે તેની સંભાવના અનુક્રમે 0.30, 0.15, 0.05 હોય, તો એક વર્ષનો વીમો ધરાવતા વીમેદાર ને અકસ્માત નડે તેનું પ્રમાણ કેટલું ? ઓછા જોખમી પ્રકૃતિવાળો સમૂહ ના સભ્ય હોય, તેની સંભાવના કેટલી ?

(2) (1) જવાબ વાંચ્યા વિના ચિઠ્ઠી ઉપાડીને માર્ક આપવામાં આવે તો તેમને આ પ્રશ્નપત્ર માં 74 માર્ક મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

(2) જો $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A/B) = \frac{4}{5}$ હોય તો $P(B/A)$ શોધો.

(ડ) (1) $(185.325)_{10}$ ને દ્વિઅંકી તેમજ અષ્ટાંકીમાં ફેરવો (2)

(2) કોમ્પ્યુટરનાં વિવિધ ભાગ જણાવી દરેકનું કાર્ય લખો. (1)

પ્રશ્ન-1 (અ) (1) જો $0 < \delta_1 < \delta_2$ તો $N(a, \delta_1) \subset N(a\ \delta_2)$, $a \leftarrow R$

$\delta_1 < \delta_2 \Leftrightarrow -\delta_2 < \delta_1 \Leftrightarrow a - \delta_2 < a - \delta_1$

વળી, $\delta_1 < \delta_2 \Leftrightarrow a + \delta_1 < a + \delta_2$

હવે, $\forall x. \in N(a, \delta_1) \Rightarrow a - \delta_1 < a + \delta_1$

$\Rightarrow a - \delta_2 < a + \delta_2$

(કારણકે $a + \delta_2 < a + \delta_2$ તથા $a - \delta_1 < a + \delta_1$)

$\Rightarrow x \in N(a, \delta_2)$

$N(a, \delta_1) \subset N(a, \delta_2)$

ભૌમિતિક રીતે જોતાં $N(a_1\ \delta_2)$ એ a થી δ_1 કરતાં ઓછા અંતરે આવેલાં બિંદુઓનો ગણ છે. $\delta_1 < \delta_2$ હોવાથી આ બિંદુઓનું a થી અંતર δ_2 કરતાં પણ ઓછું જ છે અને તેથી $N(a, \delta_1) \subset N(a\ \delta_2)$

(2) $\lim\limits_{n\to\alpha}$ જો $\frac{1}{n} = 0$

ધારો કે $\varepsilon > 0$, હવે $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}$

$m = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1\right]$ લેતાં, $m \in N$ તથા $m > \frac{1}{\varepsilon}$

$n \geq m \quad n \in N$ તો $n > \frac{1}{\varepsilon}$

આમ, $m \in N$ મળે છે જેથી $n \geq m \quad n \in N \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{n} = 0$

વ્યાખ્યા : અનંત શ્રેણીનું લક્ષ : આપેલ શ્રેણી $\{a_n\}$ તથા કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા l માટે જો પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ ને અનુરૂપ $m \in N$ મળે જેથી $n>, m, n \in N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$ તો શ્રેણી $\{a_n\}$ નું લક્ષ l છે તેમ કહેવાય છે. તથા $\lim\limits_{n\to\alpha} a_n = l$ લખાય. આને જેમ n અનંતને અનુલક્ષે તેમ શ્રેણી a_n નું લક્ષ l છે.

(બ) ગમે તે બે ગણો.

(1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1}x - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{3}}$

$= \lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1}x - \tan^{-1}\sqrt{3}}{x - \sqrt{3}}$

$= \lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}x}\right)}{\left(\frac{x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}x}\right)(1+\sqrt{3}x)} = \frac{1}{1+\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$

$\left(\because \lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1}x}{x} = 1 \text{ અને } \left(x - \sqrt{3}\right) \to 0\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\log x - 1}{x - e}$

$\log e^x = y$ ધારતાં, $x = e^x$ તથા જેમ $x \to e$ તેમ $y \to 1$ થાય

$\therefore$ લક્ષ $= \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y-1}{e^y - e} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y-1}{e(e^{y-1}-1)}$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{1}{e\left(\dfrac{e^{y-1}-1}{y-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{(y-1)y\to 0} \frac{1}{e\left(\dfrac{e^{y-1}-1}{y-1}\right)} = \frac{1}{e}, \frac{1}{1} = \frac{1}{e}$$

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{\sqrt{3}\tan x - 1}$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \left[\frac{2\sin x - 1}{\sqrt{3}\tan x - 1}.\frac{2\sin x + 1}{2\sin x + 1}.\frac{\sqrt{3}\tan x + 1}{\sqrt{3}\tan x + 1}\right]$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{(4\sin^2 x - 1)\left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)}{(3\tan^2 x - 1)(2\sin x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{(4\sin^2 x - 1)\left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)}{\left(\dfrac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1\right)(2\sin x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x(4\sin^2 x - 1)\left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)}{\left[3\sin^2 x - (1 - \sin^2 x)\right](2\sin^2 x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x(4\sin^2 x - 1)\left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)}{(4\sin^2 x - 1)(2\sin^2 x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x\left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)}{2\sin^2 x + 1}$$

$$= \frac{\cos^2 \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}\tan \frac{\pi}{6} + 1\right)}{2\sin \frac{\pi}{6}^2 x + 1}$$

$$\frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\left(\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)}{2\frac{1}{2} + 1} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{3}{4}$$

(ક) (1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{\sin x}{x-\sin x}}$

$\dfrac{Sin\,x}{x-Sin\,x}$ = h ધારો તેમજ $h \to \alpha$

$\therefore$ *Sin x = hx – h Sin x*

$\therefore$ *Sin x* (I + h) = *hx*

$\therefore \dfrac{Sin\,x}{x} = \dfrac{h}{1+h}$

$= \lim\limits_{h\to\alpha}\left(\dfrac{h}{1+h}\right)^{h}$

$= \lim\limits_{h\to\alpha}\left(\dfrac{1}{\dfrac{1+h}{h}}\right)^{h}$

$= \lim\limits_{h\to\alpha}\left(\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{h}}\right)$

$= \dfrac{1}{e}$

(2) (i) વિધેય $x = 0$ આગળ સતત છે.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$ = k

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\sin 2x}{2x}.2x}{3x}$ = k

k = $\dfrac{2}{3}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots\ldots+\dfrac{n}{n^2}\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+2+3+\ldots\ldots+n}{n^2}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\alpha} \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

(iii) $$\lim_{n\to\infty} \cos^{-1}\left(\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\times\frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \cos^{-1}\left[\frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}\right]$$

$$= \cos^{-1}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

(ઙ) (1) સ્વા.૩ નાં Ex.25

(2) $y = x^x$

$\log y = x \log x$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \log x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}x^x = x^x\ (1 + \log x)$$

પ્રશ્ન-2 (અ) (i) નિયમ પાના નં. 69 અને થીયરી પાના નં. 70

(ii) અહીં $f(x) = \sin^2 x$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\sin^2 x = \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

$$= \lim_{t\to x} \frac{\sin^2 t-\sin^2 x}{t-x}$$

$$= \lim_{t \to x} \sin(t+x) \frac{\sin(t+x)}{t-x}$$

$$= \lim_{t \to x} \sin(t+x) \frac{\sin(t+x)}{t-x}$$

$$= \lim_{t \to x} \sin(t+x) \lim_{t \to x} \frac{\sin(t+x)}{t-x}$$

$$= \sin 2x$$

(iii) પાના નં. 105 મુજબ

(બ) કોઈપણ બે ગણો

(i) $y = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$

ધારો કે $x = \sin\theta$ જ્યાં $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore y = \sin^{-1}(3\sin\theta - 4\sin^3)$

$= \sin^{-1}(\sin 3\theta)$ .....(i)

હવે (i) $0 < x < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 0 < \sin\theta < \frac{\pi}{6}$ (sin પ્રથમ ચરણમાં ↑ છે.)

$\Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 0 < 3\theta < \frac{\pi}{6}$

$\therefore y = \sin^{-1}(\sin 3\theta)$

$= 3\theta$

$y = 3\sin^{-1} x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

હવે (ii) $\frac{1}{2} < x < 1$

$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} < \sin\theta < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} < 3\theta < \sin\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < 3\theta - \pi < \frac{\pi}{2}$

હવે $\sin(3\theta - \pi) = -\sin(\pi - 3\theta)$

$= -\sin 3\theta$

$\therefore \sin 3\theta = -\sin(3\theta - \pi)$

$\therefore \quad y = \sin^{-1} - \sin(3\theta - \pi)$

$= \sin^{-1}(-\sin(3\theta - \pi))$

$= -\sin^{-1}(\sin(3\theta - \pi))$

$= \pi - 3\theta$

$= \pi - 3\sin^{-1}x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - 3\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

આમ $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ **અથવા** $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$

(ii) $f(x) = x^3$ $f(t) = t^3$

$= \lim_{t \to x} \frac{f(x) - f(x)}{t - x}$

$= \lim_{f \to x} \frac{f^3 - x^3}{t - x}$

$= 3x^{3-1}$

$= 3x^2$

(iii) $x = a(1 - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$

$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta) \neq 0$

$\frac{dy}{d\theta} = a(0 - \sin\theta) = a\sin\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$

$= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$

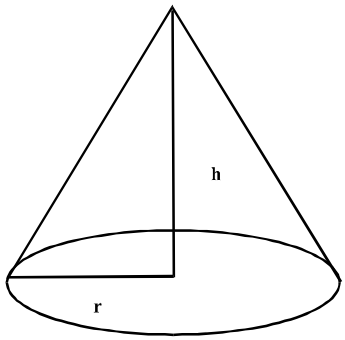
$= \cot\frac{\theta}{2}$

(ક) કોઈપણ બે ગણો

(1) અહીં ઢગલાનું કદ = V

આધારની ત્રિજ્યા = r

ઊંચાઈ = h



અહીં $\frac{dv}{dt}$ = 10 ઘનમી./સે. $\frac{dh}{dt}$

$r = \frac{h}{2}$

અને h = 5 મી.

અહીં $V = \frac{1}{3}\ \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h$

$= \frac{1}{12}\pi\ h^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{12}\pi\ 3h^2\ \frac{dh}{dt}$ (t પ્રત્યે વિકલિત કરતાં)

$= \frac{\pi}{4}\ h^2\ \frac{dh}{dt}$

$\therefore\ 10 = \frac{\pi}{4}\ (5)^2\ \frac{dh}{dt}$

$\therefore\ \frac{dh}{dt} = \frac{40}{25\pi} = \frac{8}{5\pi}$ મી./સે.

(2) $y = x^3$, $y = x^3$ || $x^2 - 6y = 7$

$m_1 = \frac{dy}{dx} = 3x^2$, || $2x + 6\ \frac{dy}{dx} = 0$

|| $m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{3}$

હવે $m_1.m_2 = (3x^2)\left(-\frac{x}{3}\right)$

$= -x^3$ (∵ બન્ને વક્રોના સમીકરણ સરખાવતાં)

$= -(1)$ $\therefore\ x^2 - 6x^3 = 7$

$m_1.m_2 = -(1)$ $\therefore\ 6x^3 - x^2 + 7 = 0$

$\therefore\ (x - 1) = 0$

$\therefore\ x = 1$

∴ બંન્ને વક્ર પરસ્પર લંબ છે.

(3) $x > 0$ માટે $\log (1 + x) > x - \frac{x^2}{2}$ સા. કરો.

ધારોકે $f(x) = \log (1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$

$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{1+x} - \left(1 - \frac{2x}{2}\right)$

$= \frac{1}{1+x} - (1 - x)$

$= \frac{1-(1-x^2)}{1+x}$

$= \frac{x^2}{1+x} > 0 \quad (\because x > 0)$

$\therefore x > 0$ માટે $f^1(x) > 0$

$x > 0$ માટે f વધતું છે.

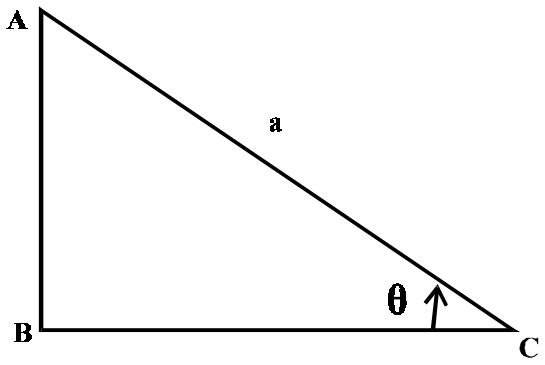
હવે $x > 0$

$\Rightarrow \quad f(x) > f(0)$

$\Rightarrow \quad \log (1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) > 0$

$\Rightarrow \quad \log (1 + x) > x - \frac{x^2}{2} \quad (\because f(0) = 0)$

(4) ધારો કે કાટકોણ ત્રિકોણ Δ ABC



માં $m \angle B = \frac{\pi}{2}$ તથા

AC = a આપેલ છે.

ઉપરાંત $m \angle ACB = \theta$

$\therefore$ BC = a cos θ

AB = a cos θ

Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ

$f(\theta) = \frac{1}{2}$ AB·AC

$= \frac{1}{2} (a\sin\theta) (a\cos\theta)$

$= \frac{1}{2} a^2 \sin\theta \cos\theta$

$= \frac{1}{4} a^2 (2\sin\theta \cos\theta)$

$f(\theta) = \frac{a^2}{4} \sin 2\theta$

હવે $f^1(\theta) = \frac{a^2}{4} \cos 2\theta \cdot (2)$

$= \frac{a^2}{2} \cos 2\theta$

$f^{11}(\theta) = \frac{a^2}{2} (-\sin(20) \cdot (2)$

$= -a^2 \sin 2\theta$

હવે સ્થાનીય મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્ય માટે

$f^1(\theta) = 0$ લેતાં

$\frac{a^2}{2} \cos 2\theta = 0$

$\therefore \cos 2\theta = 0$

$\therefore 2\theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ માટે $f^1\left(\frac{\pi}{4}\right) = -a^2 \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= -a^2 \sin \frac{\pi}{2}$

$= -a^2 (1)$

$= -a^2 < 0 \qquad (\because a > 0)$

$\therefore$ $\frac{\pi}{4}$ માટે કાટકોણત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ થાય છે.

$\therefore$ એક બાજુ $AB = a \sin \frac{\pi}{4} = a \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{a}{\sqrt{2}}$

બીજી બાજુ $BC = a \cos \theta$

$= a \cos > \left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ $AB = BC \qquad = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણની લંબાઈ આપેલ હોય તે સમદ્વિભૂજ કાટકોણત્રિકોણ છે.

(૩) આસન્ન મૂલ્ય શોધો.

(1) $f(x) = \tan^{-1}x$

$f^1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\therefore \quad f(1) = \tan^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}$

$f^1(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad \tan^{-1}(0.99)$

$\simeq f(1 + (-0.01))$

$\simeq f(1) + (-0.01)\, f^1(1)$

$\simeq \dfrac{\pi}{4} - 0.01\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\simeq \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{200}$

(2) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{g}}$

$\dfrac{dt}{d\ell} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}\ \dfrac{1}{2\sqrt{\ell}}$

હવે $dl = l$ માં થતો વધારો 2%

$= \dfrac{2\ell}{100}$

$\therefore$ T માં થતો ફેરફાર $\simeq$ માં થતો ફેરફાર $\cdot\ \dfrac{dt}{d\ell}$

$= \dfrac{2\pi}{\sqrt{g}}\ \dfrac{1}{2\sqrt{\ell}}\ \dfrac{22}{100}$

$= 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}\ \dfrac{1}{100}$

$= \dfrac{T}{100} = \dfrac{1}{100}\ T$

= T નો 1%

$\therefore$ અર્વતકાળમાં 1% નો વધારો નોંધાશે.

(3) $f(x) = x^2 + ax + 1$

$f^1(x) = 2x + a$

પરંતુ $x \in [1,2]$

$\therefore \quad 1 < x < 2$

$\therefore \quad 2 < 2x < 4$

$\therefore \quad 2 + a < 2x + a < 4 + 9$

$\therefore \quad 2 + a < f^{1}(x) < 4 + a$

પરંતુ $f^{1}(x) > 0$ માટે $2 + a > 0$ હોવું જોઈએ.

$a > -2$

પ્રશ્ન-3 (અ) (1) સાબિતી : $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)dx + \frac{d}{x}\int g(x)dx$

(વિકલનના નિયમથી)

$= f(x) + g(x)$

(પ્રતિવિકલલની વ્યાખ્યા પરથી)

$\therefore \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$\frac{d}{dx}k\int f(x)dx = k\frac{d}{dx}\int f(x)dx$

(વિકલનના નિયમ પ્રમાણે)

$= kf(x)$

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

અથવા

(1) સૌ પ્રથમ $\sec x + \tan x \neq 0$

$\Rightarrow 1 + \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq (4n - 1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in z$

$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}dx$

$= \int \frac{\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx$

$= \log|\sec x + \tan x| + c$

વળી $\log|\sec x + \tan x|$

$= \log\left|\frac{1 + \tan^2\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}} + \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}}\right|$

$= \log\left|\frac{\left(1 + \tan\frac{x}{2}\right)^2}{\left(1 - \tan\frac{x}{2}\right)\left(1 + \tan\frac{x}{2}\right)}\right|$

$$= \log \left| \frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}} \right|$$

$$= \log \left| \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \right|$$

$$= \log \left| \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \right|$$

આમ $\int \sec x\,dx = \log |\sec x + \tan x| + c$

જ્યાં $x \neq (2n-1)\frac{\pi}{2}$, $n \in z$

$$= \log \left| \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \right| + c$$

(2) સાબિતી : અહીં $-a < 0 < a$ હોવાથી,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

હવે $I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ લઈશું.

આ સંકલનમાં $x - t$ આદેશ લેતાં, $dx - dt = 0$

$x = -t$ તથા $\frac{dx}{dt} = -1$ $[-a, a]$ પર સતત છે તથા $\frac{dx}{dt}$ નું ચિહ્ન અચળ છે.

$$\therefore I = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt)$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{a} f(t)\,dt \quad (\because f \text{ યુગ્મ વિધેય છે.})$$

$$\because \quad I = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

I ની આ કિંમત (1) માં મૂકતાં

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(બ) (1) $I = \int \frac{\sin x}{\sin 4x}\,dx$

$$I = \int \frac{\sin x}{2\sin 2x\cos 2x}\,dx$$

$$I = \int \frac{\sin x}{4\sin x\cos x}\,dx$$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{\cos x}{(1-\sin 2x)(1-2\sin^2 x)}\,dx$$

sin x = t લેતાં $\cos x\,dx$ = dt

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1-t^2)(1-2t^2)}\,dx$$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{2(1-t^2)-(1-2t^2)}{(1-t^2)(1-2t^2)}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-2t^2}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1-t^2)}\,dt$$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2 - t^2}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1-t^2)}\,dt$$

$$I = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{2}}}\log\left|\frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| - \frac{1}{4}\,\frac{1}{2.1}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c$$

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\log\left|\frac{\sqrt{2}t+1}{\sqrt{2}t-1}\right| - \frac{1}{8}\,\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c$$

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\log\left|\frac{\sqrt{2}\sin x+1}{\sqrt{2}\sin x-1}\right| - \frac{1}{8}\,\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + c$$

(2) $I = \int \frac{x^2+1}{(x+a)^2} e^x \, dx$

$$I = \int e^x \left[\frac{(x+a)^2 - 2x}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$I = \int e^x dx - 2\int \left[\frac{e^x x}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$I = e^x - 2\int e^x \left[\frac{x+1-1}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$I = e^x - 2\int e^x \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$I = e^x - 2 \quad e^x \frac{1}{x+a} + c$$

$$I = e^x \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + c$$

(3) $I = \int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}} \, dx$ $\qquad 0 > x < \pi$

$$I = \int \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$$

$$I = \int \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{4}\right) - 1}{\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}} \, dx$$

$$I = \sqrt{2}\int \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sec\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right] dx$$

$$I = \sqrt{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\log \frac{\left|\sec\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|}{-\frac{1}{2}} \right] + c$$

$$I = -2\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\left|\sec\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| \right] + c$$

(ક) (1) LHS = $f(n) + f(n-2)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n-2} x) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x (\tan^2 x + 1) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n-2} \sec^2 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n-2} \frac{d}{dx}(\tan x) \, dx$$

$$= \left[\left(\frac{\tan x}{n-1} \right)^{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{1}{n-1} - 0 \right] = \frac{1}{n-1} \qquad n \neq 1$$

(2) $$I = \int_0^1 x \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \, dx$$

$= dt$ આદેશ લેતાં

$2x \, dx = dt$

$$x \, dx = \frac{dt}{2}$$

જો $x = 0$ તો $t = 0$
$x = 1$ તો $t = 1$

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \, \frac{dt}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{(1-t)^2}{1-t^2}}\,dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} (-2t)\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{t}{1}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-t^2}{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right]^1 + \frac{1}{2}[1]$$

$$I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

(3) $$I = \int_0^{\pi} x\sin^4 x\,dx$$

$$I = \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin^4 x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$$

$$I = \int_0^{\pi} (\pi - x)\sin^4 dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \pi\sin^4 x\,dx - \int_0^{\pi} x\sin^4 x\,dx$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$2I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right) dx$$

$$2I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$2I = \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi}\left[3-4\cos 2x+\cos 4x\right]dx$$

$$2I = \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi}\left[3x-4\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$I = \frac{\pi}{16}[3\pi-0+0]=\frac{3\pi}{16}$$

(ઙ) (1) $I = \int\sqrt{\sec x+1}\,dx$

$$I = \int\sqrt{\frac{1+\cos x}{\cos x}}\,dx$$

$$I = \int\sqrt{\frac{1+\cos x}{\cos x}}+dx$$

$$I = \int\sqrt{\frac{2\cos\frac{x}{2}}{1-2\sin^2\frac{x}{2}}}\,dx$$

$\sin\frac{x}{2} = t$ આદેશ લેતાં

$\cos\frac{x}{2}\,\frac{1}{2}\,dx = dt$

$\cos\frac{x}{2}\,dx = 2dt$

$$I = \int\sqrt{\frac{\sqrt{2}\cdot t\,dt}{\sqrt{1-2t^2}}}\,dx$$

$$I = 2\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - t^2}} =$$

$$= 2\sin^{-1}\left(\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + c$$

$$= 2\sin^{-1}\left(\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\right) + c$$

(2) $I = \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx$

$I = \int [f(x)]^{-\frac{1}{2}} f^1(x)\, dx$

$I = 2\sqrt{f(x)} + c$

પ્રશ્ન-4 (અ) (1) R^2 માં આવેલી y- અક્ષને સમાંતર ન હોય તેવી તમામ સુરેખાઓનું વિકલ સમી મેળવો.

R^2 માં આવેલી y- અક્ષને સમાંતર ન હોય તેવી તમામ સુરેખાઓનું સમી. $y = mx + c$

$'x'$ પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = m$$

$'x'$ પ્રત્યે ફરીથી વિકલન કરતાં,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

(2) $\frac{dy}{dx} = y + \sin x + \cos x$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} - y = \sin x + \cos x$

$\therefore \quad e^{\int p dx} = e^{\int (-1) dx} = e^{-x}$

e^{-x} વડે ગુણતાં,

$$\frac{dy}{dx}\, e^{-x} - y\, e^{-x} = (\sin x + \cos x)\, e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx}\, (y \cdot e^{-x}) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) e^{-x}$$

પદવાર સંકલન કરતાં,

$$\therefore \int \frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{-x}\right) = \sqrt{2}\int \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^{-x}dx$$

$$\therefore ye^{-x} = \sqrt{2}\left[\frac{-e^{-x}}{2}\left[-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right]+c$$

$$\therefore ye^{-x} = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{-e^{-x}}{2}\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right]+c$$

(3) ધારોકે વસ્તી કોઈ t સમયે x છે. વસ્તી વધારાનો દર $\frac{dx}{dt}$ x

$$\therefore \frac{dx}{dt} = kx$$

$$\therefore \frac{dx}{x} = k.dt$$

પદવાર સંકલન કરતાં

$$\int \frac{dx}{x} = k\int dt + c$$

$$\therefore \log(x) = kt + \log c$$

$$\therefore \log\left|\frac{x}{c}\right| = \log = e^{kt}$$

$$\therefore x = e^{kt}c$$

હવે $t = 0$ ત્યારે $x = x_0$

$x_0 = (0)$ c

$c = x_0$

$x = e^{kt}_c\ x_0$

$\Rightarrow$ t = 100 વર્ષ ત્યારે $x = 3x_0$

$\therefore 3x_0 = e^{100k}x_0$

$\therefore 3 = e^{100k}$

$\therefore 100k = \log e^3$

$$\therefore k = \log \frac{\log e^3}{100} \quad .....(1)$$

$\Rightarrow$ t = T ત્યારે $x = 2x_0$

$2x_0 = e^{kt}x_0$

$\therefore 2 = e^{kt}$

$\therefore kT = \log e^2$

$$\therefore k = \frac{\log e^2}{100} \quad .....(2)$$

(1) અને (2) પરથી

$$\frac{\log e^3}{100} = \frac{\log e^2}{100}$$

$\therefore T = \frac{\log e^2}{\log e^2}(100)$ વર્ષમાં વસ્તી બમણી થશે.

(4) $xy^2 \frac{dx}{dy} = x^3 + y^3$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{x^3+y^3}{xy^2}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

ધારો કે $\frac{y}{x} = v$

$\therefore y = xv$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = y + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^3}{v^2}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = y + x\frac{dv}{dx}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^3-v^3}{v^2} - v$$

$$\therefore v^2 \cdot dv = \frac{dx}{x}$$

પદવાર સંકલન કરતાં

$$\int v^2 . dv = \int \frac{dx}{x} + c^1$$

$$\therefore \frac{v^3}{3} = \log |x| + \log c_1$$

$$\therefore \frac{y^3}{x^3} = 3\log |x| + 3\log c_1$$

$$\therefore \frac{y^3}{x^3} = \log (|x^3| \cdot c)$$

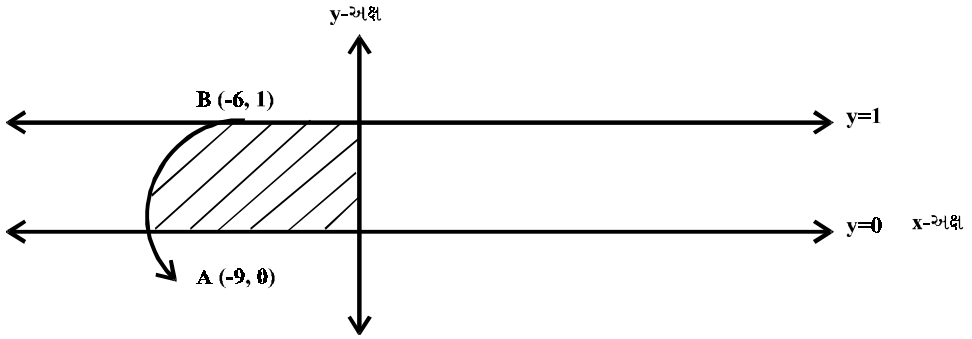
$\therefore \quad e^{\frac{y^3}{x^3}} = x^3.c$ જે વ્યાપક ઉકેલ મળે.

$x = 1, \quad y = 0$

$x^0 = (1).c$

$\therefore \quad e^{\frac{y^3}{x^3}} = x^3$ જે વિશિષ્ટ ઉકેલ મળે.

(બ) (1) $x = 3y^2 - 9$ y – અક્ષ અને રેખાઓ $y = 0, y = 1$ વચ્ચેનાં પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ A = |I|



વક્રનાં સમી. $y = 0, \quad y = 1$ મુકતાં,

$x = -9 \qquad x = -6$

છેદબિંદુ A (–9, 0), B (–6, 1), મુકતાં,

$$I = \int_0^1 x \, dy$$

$$I = \int_0^1 (3y^2 - 9) \, dy$$

$$= \frac{3}{3}[y^3]_0^1 - 9 \, [1 - 0]$$

$= 1 - 9$

$A = |-8|$

$A = |-8| \qquad \therefore \; A = 8$

(2) $y = x^2 + 1$ _____(1)

$y = 2x + 1$ _____(2)

(1) અને (2) નો ઉકેલ લેતાં

$x^2 + 1 = 2x + 1$

$\therefore \quad x^2 - 2x = 0$

$x = 0$ કે $x = 2$

$y = 1 \quad y = 5$

છેદ બિંદુ (0, 1) અને (2, 5) મળે.

$$v = \pi \int_0^2 \left(y_1^2 - y_2^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left[(x^2+1)^2 - (2x+1)^2 \right] . dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left[(x^4+2x^2+1-4x^2-4x-1) \right] . dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left[(x^4-2x^2-4x) \right] . dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}[x^5]_0^2 - \frac{2}{3}[x^3]_0^2 - 2[x^2]_0^2 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 8 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{96-80-120}{15} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{-104}{15} \right]$$

$$= \left| \frac{-104}{15} \pi \right|$$

$$v = \frac{104}{15} \pi$$

(ક) (1) $n = 5$

$P = 0.3$

$g = 0.7$

મધ્યક, $E(x) = np$

$= (5)\ (0.3) = 1.5$

વિચરણ $\sigma x^2 = npq$

$= (5)\ (0.3)\ (0.7)$

$\sigma x^2 = 1.05$

(2) સંભાવના વિતરણ કોષ્ટક

X	1	2	3	4	.....	100
$P(x)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	.....	$\frac{1}{100}$

$$E(x) = \sum xi\ p(xi)$$

$$= \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \ldots\ldots\ldots + (100)\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$= \frac{1}{100}[1 + 2 + \ldots\ldots 100]$$

$$= \frac{1}{100}\left[\frac{100}{2} + (100 + 1)\right]$$

$$E(x) = \frac{101}{2}$$

$$E(x^2) = \sum xi^2\ p(xi)$$

$$= \frac{1}{100} + \frac{(2)^2}{100} + \ldots\ldots\ldots + (100)^2 \frac{1}{100}$$

$$= \frac{1}{100}[(1)^2 + (2)^2 + \ldots\ldots\ldots + (100)^2]$$

$$= \frac{1}{100}\left[\frac{100}{0}(100 + 1)(200 + 1)\right]$$

$$= \frac{(101)(201)}{6}$$

$$E(x^2) = \frac{101 \times 67}{2}$$

$$v(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= \frac{(101)(67)}{2} - \left(\frac{101}{2}\right)^2$$

$$= \frac{101}{2} - \left[67 - \frac{101}{2}\right]$$

$$= \left(\frac{101}{2}\right)\left(\frac{33}{2}\right)$$

$$v(x) = \frac{3333}{4}$$

(3) ખામીવાળી કેરીઓ સફળ ઘટના ગણીએ તો,

$$P = \frac{5}{100}$$

$$P = \frac{1}{20}$$

$$n = 10$$

એક કરતાં વધુ કેરીઓ ખામીવાળી તે ઘટનાની સંભાવના,

$$P(x > 1) = 1 - [P(0) + P(1)]$$

$$= 1 - \left[{}^{10}c_0 \left(\frac{1}{20}\right)^0 \left(\frac{19}{20}\right)^{10} + {}^{10}c_1 \left(\frac{1}{20}\right)^1 \left(\frac{19}{20}\right)^3 \right]$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{19}{20}\right)^{10} + (10)\left(\frac{1}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^9 \right]$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{19}{20}\right)^9 \left(\frac{29}{20} + \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$P(x > 1) = 1 - \left[\left(\frac{19}{20}\right)^9 \left(\frac{29}{20}\right) \right]$$

(૬) (1) સ.પરિમાણ વિધેય : ધારો કે વિધેય f એ $R \times R$ નાં ઉપગણ પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય છે. $f(x, y)$ ને $x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ જ્યાં, $(n \in Q)$ સ્વરૂપે મુકી શકાય તો f ને x અને y નું n ધાતુવાળુ સમપરિમાણ વિધેય કહેવાય.

સમપરિમાણ વિકલ સમી. $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ઉકેલતાં,

ધારોકે $\frac{y}{x} = v$ ધારતાં,

$$\therefore \frac{y}{x} = v$$

'x' પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

વિકલ સમી.નું સ્વરૂપ,

$$\therefore v + x\frac{dv}{dx} = f(v) \text{ ઉકેલવાં,}$$

$$\therefore x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

$$\therefore \frac{dv}{f(v)-v} = \frac{dx}{x}$$

હવે પદવાર સંકલન કરતાં,

$$\therefore \int \frac{dv}{f(v)-v} = \int \frac{dx}{x} + c^1$$

$$\therefore F(v) = \log |x| + c$$

$$\therefore F\left(\frac{y}{x}\right) = \log |x| + c$$ વ્યાપક ઉકેલ મળે.

(2) $\int (\sin^{-1}x + \sec^{-1}x^{-1})^5 . dx$

$$= \int \left(\sin^{-1}x + \cos^{-1}\frac{1}{x}\right)^5 . dx$$

$$= \int \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 . dx$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 . x + c$$

પ્રશ્ન-5 (અ) (1) નિર્દશાવકાશ :-

$B = (B - A) \cup A$

$P(B) = P[(B - A) \cup A]$

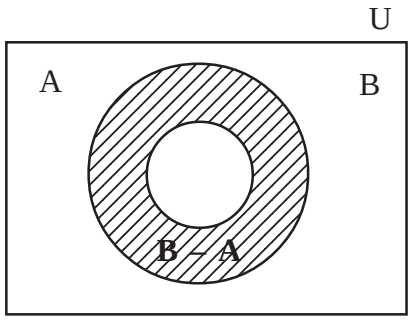
A, B – A પરસ્પર નિવારક ઘટના છે. ∴ પૂર્વ A મુજબ

$= P(B - A) + P(A)$

$\therefore P(B - A) = P(B) - P(A) \geq 0$

$\therefore P(B) \geq P(A)$ [પૂ.ધા. 1 મુજબ $P(B - A) \geq 0$]

$\therefore P(A) \leq P(B)$



અથવા

(i) સંભાવના વિધેય :-

ધારો કે ગણવિધેય $P : S \to B$ નીચેની પૂર્વધારણાઓનું પાલન કરે છે.

પૂર્વ. 1 : પ્રત્યેક $A \in S$ માટે $P(A) \geq 0$

પૂર્વ. 2 : $P(\cup) = 1$

પૂર્વ. 2 : $A_1, A_2 \in S$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + \cup P(A_2)$ થાય તો $P : S \to R$ સંભાવના વિધેય છે.

અને P(A) ઘટના Aની સંભાવના છે.

(ii) કોઈપણ ઘટના A માટે

$A(A \cup A^1) = \cup$

$\therefore P(A \cup A^1) = P(\cup)$ [A અને A^1 પરસ્પર નિવારક છે.]

$\therefore$ P(A) + P(A^1) = 1 [પૂ.ધારણા : 3]

$\therefore$ P(A^1) = 1 –P(A)

(2) $B_1 \cup B_2 = \cup$, $B_1 \cap B_2 = \theta$

$\therefore$ A $= A \cap \cup$

$= A \cap (B_1 \cup B_2)$

$\therefore$ A $= (A \cap B) \cup (A \cap B_2)$

$\therefore$ P(A) $= P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$

$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$ [$(A \cap B_1)$ અને $(A \cap B_2)$ બંને પરસ્પર નિવારક છે.]

$\therefore$ P(A) $= P(A/B_1)\ P(B_1) + P(A/B_2)\ P(B_1)$

(બ) ગમે તે બે ગણો (ગમે તે બે દાખલા ચકાસવા)

(1) U = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $P(C) = \frac{3}{8}$ $P(P \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

$P(A)\ P(B) = \frac{1}{8}$ $\therefore P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

$\therefore$ A અને B નિરપેક્ષ છે.

$P(B)\ P(C) = \frac{3}{16} \neq P(B \cap C)$

$\therefore$ B અને C નિરપેક્ષ નથી.

n(v) = 52

ઘટના A = (યાદ. રીતે પસંદ કરેલ પત્તું કાળા રંગનું)

B = (યાદ. રીતે પસંદ કરેલ પત્તું ચિત્ર વાળું)

$A \cap B$ = (પત્તું કાળા રંગ અને ચિત્ર વાળું)

(2) $P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{12}{52}$

$P(A \cap B) = \frac{6}{52}$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{26}{52} + \frac{12}{52} + \frac{6}{52} = \frac{8}{13}$

(3) A – કારકૂન ગેરહાજર હોય

B – પટાવાળો ગેરહાજર હોય

P(A) = 0.08, P(B) = 0.05, $P(A \cap B)$ = 0.02

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.11$

(ii) $P(A^1 \cup B^1) = 1 - P(A \cap B) = 0.98$

(iii) $C = (A \cup B^1) \cup (A^1 \cup B)$

$= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)] = 0.09$

(ક) ગમે તે બે ગણો.

(1) વીમેદારને અકસ્માત નડે તે ઘટના A

$\therefore$ $P(B_1) = 0.30$ $P(B_2) = 0.50$ $P(B_3) = 0.20$

$P(A/B_1) = 0.30$ $P(A/B_2) = 0.15$ $P(A/B_3) = 0.05$

$P(A) = P(A/B_1)\ P(B_1) + P(A/B_2) + P(A/B_3)\ P(B_3)$

$= (0.30)\ (0.30) + (0.50)\ (0.15) + (0.20)\ (0.05)$

$= 0.175$

અકસ્માત ન નડે તેની સંભાવના = 0.825 [$\because$ P(A') = 1 – P(A)]

$$P(B_3A^1) = \frac{P(A^1 \cap B_3)}{P(A^1)} = \frac{P(B_3)\,P\left(A^1/B_3\right)}{P(A^1)}$$

$$\therefore\ P(A^1/B_3) = \frac{19}{20}$$

$$P\left(B_3/A'\right) = \frac{38}{165}$$

(2) (i) $U = \{1, 2, 3, ..., 75\}$ $\therefore$ $n = 76$

$A = \{74\}$ $P(A) = \frac{r}{n} = \frac{1}{76}$

પ્રશ્નપત્રમાં 74 માર્ક મળે તેની સંભાવના $\frac{1}{76}$

(ii) $P(B^1) = - P(B)$ $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore$ $P(B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ $\frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = P(A \cap B)$

$\therefore$ $P(B/A) = \frac{1/5}{2/3} = \frac{3}{10}$ $\therefore$ $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

(ડ) (1) $(185.3125)_{10} = (10111001.0101)_2$

$= (271.24)_8$

(2) કમ્પ્યુટરના મુખ્ય પાંચ વિભાગો.

(1) નિવેશ એકમ (Input Unit)

(2) સ્મૃતિ એકમ (Memory Unit)

(3) નિયંત્રણ એકમ (Control Unit)

(4) અંકગણિત અને તર્ક એકમ (Arithmatic & Logic Unit)

(5) નિર્ગમ એકમ (Output Unit)