# ગણિત–2 (051) G

**કુલગુણ–75** **પ્રશ્નપત્ર–4** **સમય : 3 કલાક**

**પ્રશ્ન-1 અ** (1) જો વાસ્તવિક વિધેય $f$ એ $a$ ના કોઈ છિદ્રિત સામિપ્યમાં સર્વત્ર વ્યાખ્યાયિત હોય તથા $\lim_{x\to a} f(x)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે લક્ષ અનન્ય હોય તેમ સાબિત કરો. (2)

(iii) અનંત ગુણોતર શ્રેઢીની વ્યાખ્યા આપી $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ સાબિત કરો. (2)

**બ. ગમે તે બે ગણો :** **(4)**

(1) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{\sqrt[6]{x+62}-2}$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\tan x}{e^x-2+e^{-x}}$

(3) $\lim_{n\to 0} \frac{8^n-4^n-2^n+1}{\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos n}}$

**ક.** (1) $f(x) = x \sin\frac{1}{x}, x \neq 0$
$= 0 \quad , x = 0$ } $x = 0$ આગળ સાતત્ય ચર્ચો. (2)

(2) ખાલીજગ્યા પૂરો (જરૂરી ગણતરી કરવી) (2)

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^o}{x}$ = _____

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{2^{3x}-2^{2x}}{\sin 3x}$ = _____

(3) $\lim_{x\to e}$ [illegible] = _____

**ડ.** (1) જો $2x = y^{1/m} + y^{-1/m}$, $x \geq 1$ તો સાબિત કરો કે $(x^2-1)\,y_2 + xy_1 = m^2y$.

(2) જો $f'(x) = f(x)$ અને $f(0) = 1$ તો $\lim_{x\to 0}$ [illegible] નું મૂલ્ય = _____

**પ્રશ્ન-2 (A)** (i) જો $f$ તથા $g : (a, b) \to R$ વિધેયો હોય તથા બંને $x \in (a, b)$ આગળ વિકલનીય હોય તો $f + g$ એ $x$ આગળ વિકલનીય છે. તથા $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$ (2)

(ii) $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)\,h(x)] = f(x)g(x)\frac{d}{dx}(h(x) + f(x)h(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\,h(x)\frac{d}{dx}f(x)$ (1)

(iii) સ્થાનીય મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મૂલ્યમાટેની બીજી કસોટી જણાવો. (1)

**(B) ગમે તે બે ગણો.** **(4)**

(i) $y = \sec^{-1}$ [illegible] . $x \neq \pm 1$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

(ii) $f(x) = e^x + 1$ $x \geq 0$,

$= 2 - 3$ $x < 0$ તો સા. કરો કે

$f$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

(iii) $x = \frac{1}{2} a (t + \frac{1}{t})$, $y = \frac{1}{2} b (t - \frac{1}{t})$ $a \neq 0, \pm 1$ તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

**(C) માગ્યા પ્રમાણે બે ગણો.** **(4)**

(i) જ્યારે સમભૂજ ત્રિકોણની બાજુ 200 સેમી હોય તથા તેનો વૃધ્ધિદર $\sqrt{3}$ સેમી / સેકન્ડ હોય ત્યારે તેના ક્ષેત્રફળનો વૃધ્ધિદર શોધો.

(ii) $a^2y = x^3$ ના $(a, a)$ બિંદુએ સ્પર્શક તથા અભિલંબનાં સમીકરણ મેળવો.

(iii) સાબિત કરો કે $e^x - 1 > x$, $x \in R - \{0\}$

(iv) બે અવરોધો $R_1$ તથા $R_2$ નો કુલ અવરોધ $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ દ્વારા મળે છે જો $R_1 + R_2$ અચળ હોય તો $R_1 = R_2$ માટે અવરોધ મહત્તમ હોય તેમ સાબિત કરો.

**(D) માગ્યા મુજબ ગણો.** **(3)**

(i) આસન્ન મૂલ્ય શોધો. $\sqrt[5]{242.99}$

(iii) રેખિય ગતિ કરતાં કણનુ ગતિસૂત્ર $S = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ છે. જ્યારે $v = 0$ ત્યારે S શોધો.

(iii) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in [\frac{1}{2}, 3]$ માટે મધ્યકમાન પ્રમેયનાં ઉપયોગથી C મેળવો.

**પ્રશ્ન-3. (અ)** (1) વિધેય $f$ અને $g$ એ $x \in (a, b)$ માટે વિકલનીય હોય તથા $\forall\ x \in (a, b)$ માટે $f'(x) = g'(x)$ હોય તો સાબિત કરો કે $f(x) = g(x) + c$ (જ્યાં c અચળ)

**OR**

(1) સાબિત કરો કે $\int e^{ax} \cos bx \cdot dx = \frac{e^{ax} \cos(bx - \theta)}{\sqrt{a^2 + b^2}} + C$ ... (2)

જ્યાં $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ તથા $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) વિધેય $f$ એ $[-a, a]$ પર સતત અને અયુગ્મ હોય તો સાબિત કરો કે $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ થાય. (2)

**(બ) નીચેનામાંથી કોઈપણ બે ગણો :** **(4)**

(1) $\int \frac{\sin x}{\sin 4x}\, dx$ (2) $\int x \sec^2 x \tan x\, dx$

(3) $\int \cos^{-1}\left[\frac{x^2}{1+x^2}\right] dx$ $(x > 0)$ (4)

**(ક) ગમે તે બે ગણો :**

(1) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$ (જ્યાં $0 < \alpha < 1$)

(2) $\int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx$

(3) $\int_a^b \cos x \, dx$ સરવાળાના લક્ષ સ્વરૂપે મેળવો.

(ડ) (1) $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} dx$ (2)

(2) $\int \cot x \, dx = \log |\sin X| + C$

**પ્રશ્ન–4 (અ) ગમે તે બે ગણો** **(4)**

(1) $xydx + (1 + x^2)\, dy = 0$ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

(2) ઉકેલ મેળવો : $xdy - ydx = \sqrt{x^2 - y^2}\ dx$

(3) $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

(4) એક પદાર્થ સીધી રેખામાં ગતિ કરે છે. તેની ગતિનું સૂત્ર $\frac{ds}{dt} = s + 1$ છે. જ્યાં S પદાર્થનું પ્રસ્થાપન બિંદુથી $t$ સમયે અંતર (સમય મિનિટમાં અને અંતર મીટરમાં છે) દર્શાવે છે. તો પદાર્થને $\sqrt{9801}$ મીટર અંતર કાપતાં કેટલો સમય લાગશે ? ($\log_e 10 = 2.3026$)

**(બ) ગમે તે બે ગણો** **(4)**

(1) પરવલય $y = 4x - x^2$ અને $x$ – અક્ષથી પરિમિત પ્રદેશના ક્ષેત્રફળ $\frac{32}{3}$ છે. એમ સાબિત કરો.

(2) વર્તુળ $x^2 + y^2 = r^2$ થી ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(3) (i) પ્રથમ કક્ષાના એકઘાતી વિકલ સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ લખો.

(ii) વિકલ સમીકરણ $y = x \frac{dy}{dx} + \sqrt[5]{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5}$ નું કક્ષા અને પરિમાણ જણાવો.

**(ક) ગમે તે બે ગણો** **.(4)**

(1) એક યાદચ્છિક ચલ $x$ નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે.

$P(x) = \frac{|x-3|}{7}$, $x = 0, 1, 2, 4$ તો યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

(2) $n$ અને P પ્રચલોવાળા એક દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 8 અને 4 છે. તો $n$, P તથા $E(X^2)$ શોધો.

(3) જય નિશાન તાકવાની હરિફાઈમાં ભાગ લે છે. તેની નિશાન તાકવાની સંભાવના 0.4 છે. 5 વખત નિશાન તાકવાના પ્રયોગોમાં તે બરાબર ત્રણ વખત નિશાન તાકી શકશે. તેના સંભાવના કેટલી ?

**(ડ)** (i) $\int x^{4x} (1 + \log x)\, dx$ શોધો., $x \in R^+ - \{0\}$

(ii) વ્યાખ્યા આપો : વિકલ સમીકરણની કક્ષા

(iii) વિયોજનીય ચલ પ્રકારના વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ મેળવો.

**પ્રશ્ન–5 (અ)** (i) ત્રણ ઘટનાઓ માટે સરવાળાનો નિયમ લખો અને સાબિત કરો. (2)

**'અથવા'**

(i) A અને B બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે તો બતાવો કે A' અને B પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થાય.

(ii) નીચેનાં વિધાનની ટીકા કરો : (સત્યાર્થતા ચકાસો) (1)

''સંભાવના વિધેયનો વિસ્તાર [0, 1] છે.''

(iii) સંભાવના વિતરણનું આવૃત્ત – સૂત્ર લખો. (1)

**(બ) ગમે તે બે ગણો.** **(4)**

(1) રામ અને ભરત એક પુસ્તકમાંથી અનુક્રમે 70% અને 80% દાખલાઓ સ્વતંત્ર રીતે ઉકેલી શકે છે. પુસ્તકમાંથી એક દાખલો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી બન્નેને ઉકેલવાનું કહેવામાં આવે છે. દાખલો ઉકેલી શકાશે તેની સંભાવના કેટલી ?

(2) ત્રણ સમતોલ પાસાઓને એક વખત ઉછાળવામાં આવે તો ત્રણેય પાસાપર મળતાં પૂર્ણાંકો સમાન હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(3) જો ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A \cup B) = 0.9$, $P(A \cap B') = 0.4$ અને $P(B \cap A') = 0.3$ હોય તો $P(A' \cup B')$ અને $P(A)$ મેળવો.

**(ક)** (i) એક પેટીમાં 4 લાલ અને 3 સફેદ દડાઓ છે. બીજી પેટીમાં 3 લાલ અને 4 સફેદ દડા છે. એક પેટી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી તેમાંથી બે દડા ઉપાડતાં તે બન્ને દડા લાલ હોય તેની સંભાવના શોધો. (2)

(ii) (a) જો A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તો નીચેની ફાળવણી શક્ય છે કે નહીં તે જણાવો. (1)

$P(A) = 0.75$, $P(A \cap B') = 0.35$

(b) 52 પત્તામાંથી 2 પત્તાં એક પછી એક પુરવરણી સહિત લેતાં બન્ને કાળીના હોય તેની સંભાવના કેટલી ? 1

**(ડ)** (i) નીચેની દશાંકી સંખ્યાને અષ્ટાંકી સ્વરૂપમાં લખો. (2)

$(146.5)_{10}$

(ii) શોધો : .5427 E 04 + .4623 E 02 (1)

**પ્રશ્ન–1 (અ)**

**(1)** **પ્રમેય–1.** જો વાસ્તવિક વિધેય $f$ એ $a$ ના કોઈક છિદ્રિત સામિપ્યમાં સર્વત્ર વ્યાખ્યાયિત હોય તથા $\lim_{x\to a} f(x)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે લક્ષ અનન્ય હોય.

**સાબિતી :** ધારો કે $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ તથા $\lim_{x\to a} f(x) = l_2$

જ્યાં $l_1 \neq l_2$ અને $l_1, l_2 \in R$

વ્યાખ્યાનુસાર પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ ને અનુરૂપ $\delta_1 > 0$ તથા $\delta_2 > 0$ મળે,

જેથી $\forall x,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$

$\forall x,\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon$

હવે $0 < |x - a| < \delta$ હોય તેવા પ્રત્યેક $x$ માટે,

ધારો કે $\delta = \min\{\delta, \delta_2\}$

$\therefore\ \delta \leq \delta_1$ તથા $\delta \leq \delta_2$, $\delta > 0$

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon$

હવે $0 < |x - a| < \delta$ હોય તેવા પ્રત્યેક $x$ માટે

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \\ &\leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| \\ &\leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \end{aligned}$$

$\therefore |l_1 - l_2| < 2\varepsilon$

હવે આ અસમતા પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ માટે અનુરૂપ $\delta > 0$ મેળવીને સત્ય બને છે.

$\therefore\ \varepsilon = \left|\frac{l_1 - l_2}{2}\right|$ માટે પણ તે યોગ્ય $\delta > 0$ માટે સત્ય છે.

$l_1 \neq l_2$ હોવાથી $|l_1 - l_2| > 0$ અને આથી $\varepsilon$ ની આવી કિંમત લઈ શકાય.

$\therefore\ |l_1 - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|$ જે શક્ય નથી.

$\therefore$ આપણી ધારણા કે વિધેય $f$ ને એક થી વધુ લક્ષ હોઈ શકે તે સત્ય નથી.

$\therefore$ વિધેયનું લક્ષ અનન્ય છે.

**(2)** **અનંત ગુણોતર શ્રેણી :** આપણે જાણીએ છીએ કે ગુણોત્તર શ્રેણી માટે

$$S_n = a + ar + ar^2 + .... + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

આ શ્રેણી $\{S_n\}$ ના લક્ષને અનંત ગુણોત્તર શ્રેણીનો સરવાળો કહે છે, જ્યાં $|r| < 1$.

આ સરવાળાને $a + ar + ar^2 + ....$ (અનંત સુધી) દ્વારા દર્શાવાય છે.

વિધેયના લક્ષ માટે જે કાર્યનિયમો સ્વીકારેલા તે નિયમો શ્રેણી લક્ષ માટે પણ સત્ય છે, તે સ્વીકારતાં,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad (|r| < 1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(a - ar^n)}{1 - r}$$

$= \frac{a}{1-r}$ કારણ કે $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

આમ, અનંત ગુણોત્તર શ્રેણીનો સરવાળો $\frac{a}{1-r}$ છે.

**(બ)** **(1)** $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{\sqrt[6]{x+62}-2}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{(3x+2)^{1/3}-8^{1/3}}{(x+62)^{1/6}-64^{1/6}}$

$= \lim_{x\to 2} \left[\frac{(3x+2)^{1/3}-8^{1/3}}{3x+2-8}\cdot(3x+2-8)\right] \Big/ \left[\frac{(x+62)^{1/6}-64^{1/6}}{x+62-64}\cdot(x+62-64)\right]$

$= \frac{\frac{1}{3}8^{1/3-1}}{\frac{1}{6}64^{1/6-1}} \lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)}$

$= \frac{6}{3}\frac{8^{2/3}}{64^{2/3}}\cdot 3 = \frac{2.64^{5/6}}{8^{5/3}}\cdot 3 = \frac{2\cdot 32}{4}\cdot 3 = 48$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{x\tan x}{e^x-2+e^{-x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\tan x\cdot e^x}{(e^x-1)^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\tan x\cdot e^x}{(e^x-1)^2}$

$= \lim_{x\to 0} = \frac{x\frac{\tan x}{x}\cdot x\cdot e^x}{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2\cdot x^2} = 1$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{8^n-4^n-2^n+1}{\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos n}}$

$\lim_{x\to 0} = \frac{(4^n-1)(2^n-1)}{(\sqrt{5}-\sqrt{4+\cos n})}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5+\cos x}}{\sqrt{5}+\sqrt{4+\cos x}}$

$$= \lim_{n\to 0} \frac{(4^n - 1)(2^n - 1)(\sqrt{5} + \sqrt{4 + \cos n})}{2 \cdot \sin^2 \frac{n}{2}} \quad [\because 5 - [4 + \cos n] = 1 - \cos n = 2 \sin^2 \frac{n}{2}]$$

$$= \lim_{n\to 0} \frac{\left(\frac{4^n - 1}{n}\right)\left(\frac{2^n - 1}{n}\right) n^2 (\sqrt{5} + \sqrt{4 + \cos n})}{2 \cdot \left(\frac{\sin n/2}{n/2}\right)^2 \frac{n^2}{4}}$$

$$= \frac{\log_e^4 \cdot \log_e^2 (\sqrt{5} + \sqrt{4 + \cos n})}{2 \cdot 1^2 \cdot 1/4} = 4\sqrt{5} \ . \ \log_e 4 \ . \ \log_e 2$$

**(ક)** (1) $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

$= 0 \quad ; x = 0$ $\Big\}$ $x = 0$ આગળનું સાતત્ય.

$|\sin \frac{1}{x}| \leq 1 \Rightarrow |x \cdot \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$

$\delta = \varepsilon$ લેતાં, $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |x| < \delta \Rightarrow |x \sin \frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$

$\therefore \quad \lim_{x\to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$

$\therefore \quad f$ એ $x = 0$ માટે સતત છે.

(2) ખાલી જગ્યા પૂરો. (જરૂરી ગણતરી કરવી)

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^o}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \pi/180}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}} \times \frac{\pi}{180}$

$= \lim_{\frac{\pi x}{180}\to 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} \cdot 1 = \frac{\pi}{180}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^{3x}-2^{2x}}{\sin 3x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{(2^{3x}-1)-(2^{2x}-1)}{\sin 3x}$

$= \lim_{x\to 0} = \dfrac{\lim_{x\to 0}\dfrac{3\cdot 2^{3x}-1}{3\cdot x} - \lim_{x\to 0} 2\cdot\dfrac{2^{2x}-1}{2x}}{3\cdot \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}$

$= \dfrac{\log_e^2 - 2\log_e^2}{3} = \log_e \sqrt[3]{2}$

(iii) $\lim_{x\to e} \dfrac{e^{1/x}-e^{1/e}}{x-e}$

$x - e = h$ લેતાં $x \to e \Rightarrow h \to 0$

લક્ષ : $\lim_{h\to 0} \dfrac{(e+h)^{1/h}-e^{1/e}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \left[1+\frac{h}{e}\right]^{1/h} = \lim_{h\to 0} \left[\left(1+\frac{h}{e}\right)^{\frac{1}{h}\cdot\frac{e}{e}}\right]$

$= e^{1/e}$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

**(૬)** (1) $2x = y^{1/m} + y^{-1/m}$ નું $x$ પ્રત્યે વિકલન કરતાં

$\left(\frac{1}{m}y^{1/m-1} + \left(-\frac{1}{m}\right)y^{-1/m-1}\right)\cdot\frac{dy}{dx} = 2$

$\therefore \quad \dfrac{1}{my}\,[y^{1/m} - y^{-1/m}].\, y_1 = 2$

$\therefore \quad (y^{1/m} - y^{-1/m})y_1 = 2my$

$\therefore \quad (y^{1/m} - y^{-1/m})^2 \cdot y_1^{\,2} = 4m^2y^2$ (બંને બાજુએ વર્ગ કરતાં)

$\therefore \quad [(y^{1/m} + y^{1/m})^2 - 4]\, y_1^{\,2} = 4m^2y^2$

$\therefore \quad [4x^2 - 4]\, y_1^{\,2} = 4m^2y^2$

$\therefore \quad (x^2 - 1)y_1^{\,2} = m^2y^2$

ફરીથી $x$ પ્રત્યે વિકલન કરતાં

$(x^2 - 1)\ 2y_1y_2 + y_1^2\ (2x) = 2m^2\ y \cdot y_1$

$2y_1 \neq 0$ આથી $(x^2 - 1)\ y_2 + xy_1 + m^2y.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $\because f(0) = 1$ આપેલ છે.

$= f'(0)$

$= f(0)$ $\because f'(x) = f(x)$

$= 1$ $\Rightarrow f'(0) = f(0)$

**પ્રશ્ન–2 (A)** (i) પાઠ્યપુસ્તકના પા.નં. – 60 નું પ્રમેય – 02

(ii) પાઠ્યપુસ્તકના પાનં – 61 નું ઉપપ્રમેય – 01

(iii) પાઠ્યપુસ્તકના પાન નં. – 113 ના પ્રમેય – 5 ની ફક્ત પ્રતિજ્ઞા

**(B)** (i) $y = \sec^{-1}\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$, $x \neq \pm 1$ તો $\dfrac{dy}{dx}$ શોધો.

$\therefore \quad y = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ $\left(\because \cos^{-1}\dfrac{1}{x}\ x = \sec^{-1}x\right)$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}}\left(\dfrac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}\right)$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{4x^2}}\left(\dfrac{-2x(1+x^2+1-x^2)}{1+x^2}\right)$

$= \dfrac{-1}{2|x|}(-4x)$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{|x|(1+x^2)}$ ... (1)

→ જો $x > 0$ તો $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$

→ જો $x < 0$ તો $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{1+x^2}$

→ જો $x = 0$ તો $\frac{dy}{dx}$ અશક્ય

(ii) $f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ (∵ વિકલનનુ સૂત્ર)

∴ $f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0}$ (∵ $x = 0$ આગળ વિકલનીયતા માટે)

∴ $f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - 2}{t}$ (∵ $x = 0$ તો $f(x) = e^x + 1$

$f(0) = 2$)

હવે $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t) - 2}{t}$ અને $\lim_{t \to 0^-} \frac{f(t) - 2}{t}$

∴ $f'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{e^t + 1 - 2}{t}$ અને $= \lim_{t \to 0^-} \frac{2 - 3t - 2}{t}$

$= \lim_{t \to 0^+} \cdot \frac{e^t - 1}{t}$ અને $= \lim_{t \to 0^-} \frac{-3t}{t}$

$= \log_e e$

$= 1$ અને $= -3$

∴ $x = 0$ આગળ લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી તેથી $x = 0$ આગળ $f(x)$ વિકલનીય નથી.

(iii) $x = \frac{1}{2} a (t + \frac{1}{t})$ ; $y = \frac{b}{2} (t - \frac{1}{t})$ તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

∴ $x = \frac{a}{2} (t + \frac{1}{t})$ અને $y = \frac{b}{2} (t - \frac{1}{t})$ નું $t$ ની સાપેક્ષ વિકલ્પ કરતાં

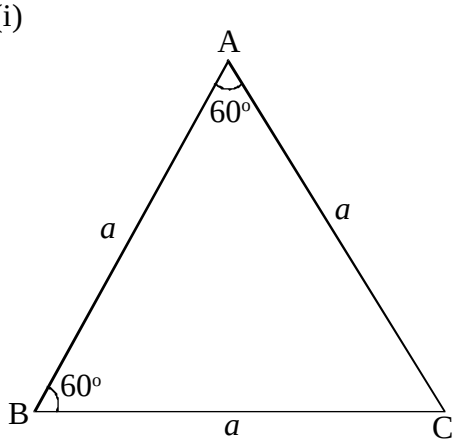
∴ $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{2} (1 - \frac{1}{t^2} \neq 0)$ [કારણ કે $t \neq 0$, $t \neq 1$, $a \neq 0$] અને $\frac{dy}{dt} = \frac{b}{2} (1 + \frac{1}{t^2})$

→ પરંતુ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$

$= \frac{b/2 \left[1 + 1/t^2\right]}{a/2 \left[1 + 1/t^2\right]}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \frac{\left[e + t^2\right]}{\left[e^2 - 1\right]}$

(C) (i)




ધારો કે સમભૂજ ત્રિકોણની બાજુ $a$ છે

અને $\frac{da}{dt} = \sqrt{3}$ સેમી / સેકન્ડ છે.

$\Delta$ ABC નુ ક્ષેત્રફળ

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$\therefore \quad \Delta = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ$$

$$\therefore \quad \Delta = \frac{a^2}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$\Delta$ABC નું ક્ષેત્રફળ

$\Delta = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ નું $t$ ની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$$\therefore \frac{d\Delta}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2a) \frac{da}{dt}$$

$$\therefore \quad \frac{d\Delta}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} (200) \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \frac{d\Delta}{dt} = 300 \text{ ચો.સેમી./સેકન્ડ}^2$$

$\therefore$ ક્ષેત્રફળ વધવાનો દર $\frac{d\Delta}{dt} = 300$ ચો સે.મી./સેકન્ડ$^2$

(ii) $a^2y = x^3$ નું $x$ ની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

$$a^2 \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{a^2}$$

$$\therefore m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,\,a)} = \frac{3a^2}{a^2} = 3$$

$\rightarrow$ $(a, a)$ બિંદુમાંથી પસાર થતા અને 3 ઢાળવાળા સ્પર્શકનું સમી.

$$y - a = 3(x - a)$$

$$\therefore \quad 3x - y - 2a = 0$$

$\rightarrow$ $(a, a)$ બિંદુમાંથી પસાર થતા અને $-\frac{1}{3}$ ઢાળવાળા સ્પર્શકનુ સમી.

$$y - a = \frac{1}{3} (x - a)$$

$$\therefore \quad 3y - 3a = -x + a$$

$$\therefore \quad x + 3y - 4a = 0$$

(iii) ધારો કે $f(x) = e^x - 1 - x$

$\therefore \quad f'(x) = e^x - 1$

$\rightarrow$ જો $x > 0$ તો $f'(x) > 0$ મળે છે. $[\because e^x > 1]$

તેથી $x > 0$ માટે $f(x)$ વધતું વિધેય છે.

$\therefore \quad x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$

$\Rightarrow e^x - 1 - x > 0 (\because f(0) = 0)$

$\Rightarrow e^x > 1 + x$

$\Rightarrow e^x - 1 > x$ ... (1)

$\rightarrow$ જો $x < 0$ તો $f'(x) < 0$ મળે છે. $[\because e^x > 1]$

$x < 0$ માટે $f(x)$ ઘટતું વિધેય છે.

$\therefore \quad x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$

$\Rightarrow e^x - 1 - x > 0 (\because f(0) = 0)$

$\Rightarrow e^x - 1 > x$ ... (2)

$\therefore$ સમીકરણ (1), (2) પરથી $x \in R - \{0\}$ માટે $e^{x-1} > x$ બને છે.

(iv) અને $R_1 + R_2 = k$ (અચળ) ધારો

$\therefore \quad \frac{1}{R} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$

$\therefore \quad R = \frac{R_1 R_2}{K}$

$\therefore \quad R = \frac{R_1 (K - R_1)}{K}$

$\therefore \quad f(R) = \frac{KR_1 - R_1^2}{K}$

$\therefore f'(R_1) = \frac{K - 2R_1}{K}$ નું $[R_1$ ની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં]

$\therefore f''(R_1) = \frac{-2}{K}$

$\rightarrow f(R_1)$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત માટે $f'(R_1) = 0$ મૂકતાં

$\therefore \quad \frac{K - 2R_1}{K} = 0$

$\therefore \quad 2R_1 = K$

$\therefore \quad R_1 = K/2$

$R_1 = K/2$ ની કિંમત $f''(R_1)$ માં મૂકતાં

$f''(R_1) < 0$ બને છે.

$\therefore \quad R_1 = K/2$ માટે $f(R_1)$ ની કિંમત મહત્તમ છે.

$\rightarrow$ $R_1 = K/2$ ની કિંમત $R_1 + R_2 = K$ માં મૂકતાં

$R_2 = K/2$

$\therefore$ મહત્તમ કિંમત માટે $R_1 = R_2 = K/2$ બને છે.

(ઙ) (i) ધારો કે $f(x) = (x)^{1/5}$ જ્યાં $x = 243$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{5} x^{1/5 - 1}$ $\quad \delta x = -0.01$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{5} x^{-4/5}$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{5x^{4/5}}$

$\rightarrow$ $x = 243$ માટે $f(x) = \sqrt[5]{243} = 3$

$$f'(x) = f'(243) = \frac{1}{5(243)^{4/5}} = \frac{1}{5(3)^4} = \frac{1}{5\times 81}$$

$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{405}$

$\therefore \quad f(x + \delta x) \cong f(x) + \delta x f'(x)$ (સૂત્ર)

$\therefore \quad f(243 - 0.01) \cong 3 - (0.01)\ \frac{1}{405}$

$\therefore \quad \sqrt[5]{242.99} \cong 3 - (0.01)\ \frac{1}{405} = 1214.99$

(ii) $S = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ નું $t$ ની સાપેક્ષ વિકલન કરતાં

વેગ $v = 3t^2 - 12t + 9$

પ્રવેગ $a = 6t - 12$

$\rightarrow \quad v = 0$ તો $3t^2 - 12t + 9 = 0$

$\therefore \quad t^2 - 4t + 3 = 0$

$\therefore \quad (t - 3)\ (t - 1) = 0$

$\therefore \quad t = 3, \quad t = 1$

$\rightarrow$ જો $t = 1$ માટે $S(t = 1) = 1 - 6 + 9 + 4 = 8$ એકમ

$\rightarrow$ જો $t = 3$ માટે $S(t = 3) = 27 - 54 + 27 + 4 = 4$ એકમ

(iii) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in$ [illegible]

$\therefore \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$\rightarrow$ અહીં $x \in (\frac{1}{2}, 3)$ માં $f(x)$ વિકલનીય છે તથા $[\frac{1}{2}, 3]$ માં $f(x)$ સતત છે.

$\rightarrow f(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

અને $f(b) = f(3) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

$\therefore \quad f(a) \neq f(b)$

$\rightarrow$ C $\in (\frac{1}{2}, 3)$ એવો મળે કે જેથી $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ બને.

$\therefore \quad 1 - \frac{1}{C^2} = \frac{10/3 - 5/2}{3 - 1/2}$

$\therefore \quad 1 - \frac{1}{C^2} = \frac{20-15}{6-1} = \frac{5}{5} = 1$

$\therefore \quad \frac{1}{C^2} = 1 - \frac{1}{3}$

$\therefore \quad \frac{1}{C^2} = \frac{3-1}{3}$

$\therefore \quad C^2 = \frac{3}{2}$

$\therefore \quad C = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\therefore \quad C = \sqrt{\frac{3}{2}} \in (\frac{1}{2}, 3)$ છે અને $C = -\sqrt{\frac{3}{2}} \notin (\frac{1}{2}, 3)$

$\therefore \quad C = \sqrt{\frac{3}{2}}$ માટે મધ્યકના પ્રમેયનું પાલન થાય છે.

**પ્રશ્ન–3 (અ)**

**(1) પ્રમેય 1.** જો $f$ તથા $g$ બંને $(a, b)$ પર વિકલનીય વિધેયો હોય તથા $f'(x) = g'(x)$,

$\forall\ x \in (a, b)$ તો $f(x) = g(x) + c$ જ્યાં $c$ અચળ છે.

**સાબિતી :** ધારો કે $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in (a, b)$

$x_1, x_2 \in (a, b)$ અને $x_1 < x_2$ તો $[x_1, x_2]$ પર $h$ સતત છે. તથા $(x_1, x_2)$ પર $h$ વિકલનીય છે. વળી,

મધ્યકાન પ્રમેયથી,

$h(x_1) - h(x_2) = h'(c)\ (x_1 - x_2)$ જ્યાં $c \in (x_1, x_2)$

આમ, $c \in (a, b)$

$\therefore \quad h'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$

$\therefore \quad h(x_1) = h(x_2),\ \forall\ x_1, x_2 \in (a, b)$

$\therefore \quad f(x_1) - g(x_1) = f(x_2) - g(x_2),\ \forall\ x_1, x_2 \in (a, b)$

$\therefore$ $f - g$ એ $(a, b)$ પર અચળ વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x) - g(x) = c$ જ્યાં $c \in R$ અચળ છે.

$\therefore$ $f(x) = g(x) + c$, $\forall\ x \in (a, b)$

અથવા

(1) $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + c$

$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos (bx - \theta) + c$

**જવાબ :**

$I = \int e^{ax} \cos bx\, dx$

$I = \int \cos bx \cdot e^{ax}\, dx$

$I = \cos bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int -\sin bx \cdot b \frac{e^{ax}}{a}\, dx$

$I = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int \sin bx \cdot e^{ax}\, dx$

$I = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a} \left[\sin bx \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \cos bx \cdot b \frac{e^{ax}}{a} dx\right]$

$I = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a} \sin bx \cdot e^{ax} - \frac{b^2}{a^2} \int \cos bx \cdot e^{ax}\, dx + c'$

$I = \frac{e^{ax} \cdot a\cos bx + b\sin bx e^{ax}}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} I + c'$

$I + \frac{b^2}{a^2} \cdot I = \frac{e^{ax}[a\cos bx + b\sin bx]}{a^2} + c'$

$(a^2 + b^2) I = e^{ax} [a \cos bx + b \sin bx] + c'$

$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + c$

હવે $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ લેતાં

$a^2 + b^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \therefore r = \sqrt{a^2+b^2}$

હવે

$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + c$

$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [r \cos \theta \cos bx + r \sin \theta \sin bx] + c$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\ [r\ \cos\ (bx - \theta)] + c$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}\ \cos\ (bx - \theta) + c$$

$$= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \cos\ (bx - \theta) + c$$

**(2) પ્રમેય :** જો વિધેય $f$ એ $[-a, a]$ માં સતત અને અયુગ્મ હોય તો

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0,\ a \in R^+$$

**સાબિતી :** અહીં $-a < 0 < a$ હોવાથી,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx \qquad ...(1)$$

હવે $I = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx$ લઈશું.

આ સંકલનમાં $x = -t$ લેતાં, $dx = -dt$

વળી, $x = -a \Rightarrow t = a$ અને $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$$\therefore \quad I = \int_{a}^{0} f(-t)\ (-dt)$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\ dt = \int_{0}^{a} f(-t)\ dt$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\ dt\ (\because f \text{ અયુગ્મ વિધેય છે.})$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

I ની આ કિંમત (1) માં મૂકતાં,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = -\int_{0}^{a} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx$$

$$= 0$$

(બ) (1) $\int \frac{\sin x}{\sin 4x}\, dx$

$= \int \frac{\sin x}{2\sin 2x \cos 2x}\, dx$

$= \int \frac{1}{2\cos x \cos 2x}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x \cos 2x}$ $\sin x = t$ (ધારો)

$\cos x\, dx = dt$

$= \int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}$

$= \int \frac{(1-t^2)-\frac{1}{2}(1-2t^2)}{(1-t^2)(1-2t^2)}\, dt$

$= \int \frac{1}{1-2t^2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t^2}\, dt$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \log\left|\frac{1-\sqrt{2}t}{1+\sqrt{2}t}\right| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C$

$= \frac{2}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{1+\sqrt{2}\sin x}\right| - \frac{1}{4}\log\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + C$

(2) $\int x \sec^2 x \tan x\, dx$

$= x \cdot \frac{\tan^2 x}{2} - \int (1)\, \frac{\tan^2 x}{2}\, dx$

$= \frac{x\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2}\int (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \frac{x\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2}(\tan x - x) + C$

(3) $\int \cos^{-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) dx$ $(x > 0)$ $x = \tan\theta$ (ધારો) $\therefore dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$= \int \cos^{-1}(\cos 2\theta) \cdot \sec^2\theta\, d\theta$ $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ તથા $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$= \int 2\theta \sec^2\theta\, d\theta$ $[\because x > 0 \ \therefore 0 < \theta < \pi/2 \ \ 0 < 2\theta < \pi]$

$= \int 2\theta \sec^2\theta \, d\theta$

$= 2 [\theta \cdot \tan\theta - \int (1) \tan\theta \, d\theta]$

$= 2 [\theta \tan 2\theta - \log |\sec \theta|] + C$

$= 2 [\tan^{-1}x \cdot x - \log |\sqrt{1+x^2}|] + C$

(C) (1) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ $\quad\quad 1 - 2\alpha x + \alpha^2 = t^2$ $\therefore$

$= \int_{1+\alpha}^{1-\alpha} -\frac{t}{\alpha} \frac{dt}{t}$ $\quad\quad -2\alpha \, dx = 2t \, dt$ $\therefore$

$= \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} dt$ $\quad\quad$ તથા $x = -1$ તો $t = 1 + \alpha$

$x = 1 \cdot$ તો $t = 1 - \alpha$

$= \frac{1}{\alpha} [t]_{1-\alpha}^{1+\alpha} \, dt = \frac{1}{\alpha} [(1 + \alpha) - (1 - \alpha)] = 2$

(2) $\int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx$

$I = \int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx$

$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin^3(\pi - x) \, dx$

$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin^3 x \, dx$

$I = \int_0^{\pi} \pi \sin^3 x \, dx - \int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx.$

$2I = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \sin x \, dx \quad \cos x = t \quad \therefore - \sin x \, dx = dt$

$= \pi \int_1^{-1} (1 - t^2) (-dt)$ $\quad\quad x = 0$ તો $t = 1$

$= \pi \int_{-1}^{1} (1 - t^2) \, dt$ $\quad\quad x = \pi$ તો $t = -1$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (1 - t^2)\, dt$$

$$= \pi \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left[ 2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{4\pi}{3}$$

(3) $\int_a^b \cos x\, dx, \quad f(x) = \cos x$

$\rightarrow$ $\cos x$ એ $[a, b]$ પર સતત વિધેય છે.

$\rightarrow$ $[a, b]$ ને $n$ – સમાન ઉપઅંતરાલમાં વિભાજિત કરતા મળતા દરેક ઉપઅંતરાલની લંબાઈ $h = \frac{b-a}{n}$ થાય.

$\rightarrow$ હવે $x_i = a + ih$

તથા $f(x_i) = \cos x_i = \cos (a + ih)$

$\rightarrow$ $\int_a^b \cos x\, dx = \lim_{n\to\infty} h \sum_{i=1}^{n} \cos (a + ih)$

$$= \lim_{n\to\infty} h\, [\cos (a + h) + \cos (a + 2h) + ..... + \cos (a + nh)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \left[ (2 \cos (a + h) \sin \frac{h}{2}) + (2 \cos (a + 2h) \sin \frac{h}{2}) + .... \right.$$

$$\left. + (2 \cos (a + nh) \sin \frac{h}{2}) \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \left[ \begin{array}{l} \sin \left(a + \frac{3h}{2}\right) - \sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \\ + \sin \left(a + \frac{5h}{2}\right) - \sin \left(a + \frac{3h}{2}\right) \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \sin \left(a + nh + \frac{h}{2}\right) - \sin \left(a + nh - \frac{h}{2}\right) \end{array} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \left[ \sin \left(a + nh + \frac{h}{2}\right) - \sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \right]$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ h\to 0}} \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}} \left[\sin\left(a + b - a + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{h}{2}\right)\right]$$

$h = b - a$

$n \to \infty$ ત્યારે $h \to 0$

$$= \sin b - \sin a.$$

**(૬)** (1) $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$1 = A(x^2 + 4) + (x - 1)(Bx + C)$

$x = 1$ તો $1 = A(5) \therefore A = \frac{1}{5}$

$x = 0$ તો $1 = A(4) + (-1)(C)$

$$\therefore \quad C = 4A - 1 = \frac{4}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

$x = 2$ તો $1 = A(8) + (2B + C)$

$2B = 1 - 8A - C$

$$= 1 - \frac{8}{5} + \frac{1}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$B = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore \int \frac{1}{(x-1)(x^2+h)}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}}{x^2+4}\right) dx$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{5}\log|x-1| - \frac{1}{10}\log|x^2+4| - \frac{1}{10}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

(2) $\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + c \quad x \neq \frac{n\pi}{2},\ n \in Z$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x}$$

$t = \sin x$ એ $k\pi = \frac{2k\pi}{2}$ ને ન સમાવતાં કોઈપણ અંતરાલ પર સતત, વિકલનીય અને શૂન્યેત્તર છે.

$\frac{dt}{dx} = \cos x$, $(2k-1)\frac{\pi}{2}$ ને ન સમાવતાં અંતરાલ પર શૂન્યેતર અને સતત છે.

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\sin x| + c$$

**પ્રશ્ન–4 (અ) ગમે તે બે ગણો.**

(1) $xy\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$ વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

**Ans.** $xy\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$

$\therefore \quad \frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{dy}{y} = 0$ (વિયોજનિય ચલ)

$\therefore \quad \frac{1}{2}\int \frac{\frac{d}{dx}(1+x^2)}{1+x^2}\,dx + \int \frac{dy}{y} = \log c'$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\log(1 + x^2) + \log y = \log c'$

$\therefore \quad \log(1 + x^2) + \log y^2 = \log c'^2$

$\therefore \quad \log [y2\ (1 + x2)] = \log c$ ; જ્યાં $c = c'^2$

$\therefore \quad y^2(1 + x^2) = c$, વ્યાપક ઉકેલ મળે.

(2) $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 - y^2}\,dx$

અહીં $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 - y^2}\,dx$

$\therefore \quad x\,dy = (y + \sqrt{x^2 - y^2})\,dx$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$ સમપરિમાણ વિકલ સમીકરણ છે.

હવે $\frac{y}{x} = v$ એટલે કે $y = vx$ આદેશ લેતાં, $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

આ કિંમતો વિકલ સમીકરણમાં મૂકતાં,

$\therefore \quad v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1-v^2}$

$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1-v^2}$

$\therefore \quad \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dx}{x}$ (વિયોજનીય ચલ)

સંકલન કરતાં, $\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \int \frac{dx}{x} + c$

$\therefore \quad \sin^{-1} v = \log x + c$

$\therefore \quad \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + c$ વ્યાપક ઉકેલ મળે.

(3) $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$ નો વ્યાપક ઉકેલ શોધો.

અહીં, $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$ માં $4x + y + 1 = t$ આદેશ લેતાં,

$$4 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 4$$

આ કિંમતો વિકલ સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$\frac{dt}{dx} - 4 = t^2$$

$$\therefore \quad \frac{dt}{dx} = t^2 + 4$$

$$\therefore \quad \frac{dt}{t^2+4} = dx \text{ (વિયોજનીય ચલ)}$$

સંકલન કરતાં, $\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \int dx + c_1$ ($c_1$ સ્વૈર અચલ)

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{t}{2} + x + c_1$$

$$\therefore \quad \tan^{-1} \frac{t}{2} = (2x + 2c_1)$$

$$\therefore \quad \frac{t}{2} = \tan (2x + 2c_1)$$

$$\therefore \quad t = 2 \tan (2x + 2c_1)$$

$$\therefore \quad 4x + y + 1 = 2 \tan (2x + c), \text{ (જ્યાં } c = 2c_1, \text{ સ્વૈર અચલ)}$$

વ્યાપક ઉકેલ મળે.

**(4)** એક પદાર્થ સીધી રેખામાં ગતિ કરે છે. તેની ગતિનું સૂત્ર $\frac{ds}{dt} = S + 1$ છે. જ્યાં S પદાર્થનું પ્રસ્થાપન બિંદુથી $t$ સમયે અંતર (સમય મિનિટમાં અને અંતર મીટરમાં છે) દર્શાવે છે, તો પદાર્થને $\sqrt{9801}$ મીટર અંતર કાપતાં કેટલો સમય લાગશે ? [$\log_e 10 = 2.3026$]

અહિં ગતિનું સૂત્ર $\frac{ds}{dt} = S + 1$ છે.

$$\therefore \frac{ds}{S+1} = dt \text{ (વિયોજનીય ચલ)}$$

હવે સંકલન કરતાં,

$\int \frac{ds}{S+1} = \int dt + c$; જ્યાં $c$ સ્વૈર અચલ

$\therefore \log (S + 1) = t + c$, વ્યાપક ઉકેલ મળે.

હવે પ્રસ્થાપન બિંદુએ $t = 0$ લેતાં, $s = 0$

$\therefore$ $\log 1 = 0 + c$

$\therefore$ $c = 0$

$\therefore$ આપેલ રાશી પ્રમાણેનો વિશિષ્ટ ઉકેલ $\log (S + 1) = x$ મળ.

હવે $s = 99$ મૂકતાં,

$t = \log_e^{100}$

$= 2 \log_e^{10}$ $= 2(2.3026) = 4.6052$

આમ, 99 મીટર અંતર કાપતાં પદાર્થને 4.6052 મિનિટ લાગે.

**પ્રશ્ન–4 (બ) ગમે તે બે ગણો :**

(1) પરવલય $y = 4x - x^2$ અને $x$ – અક્ષથી પરિમિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{32}{3}$ છે. એમ સાબિત કરો.

**Ans.** અહીં વક્ર $x$ – અક્ષને છેદે, તો $y = 0$ લેતાં, $4x - x^2 = 0$

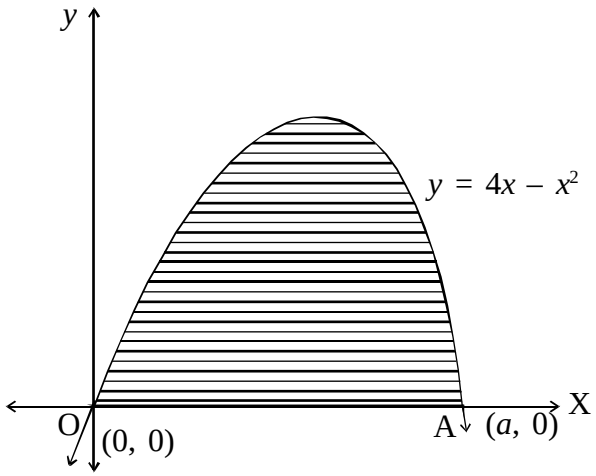
$\therefore$ $x(4 - x) = 0$

$\therefore$ $x = 0$ કે $x = 4$

$\therefore$ વક્ર $x$ – અક્ષને 0 (0, 0) અને A (4, 0) માં છેદે.

અહીં વક્ર અને $x$ – અક્ષ વડે સીમિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ A હોય, તો

$A = |I|$ ; જ્યાં $I = \int_a^b y\,dx$ પ્રમાણે,




$$I = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \left[2(4)^2 - \frac{64}{3}\right] - (0 - 0)$$

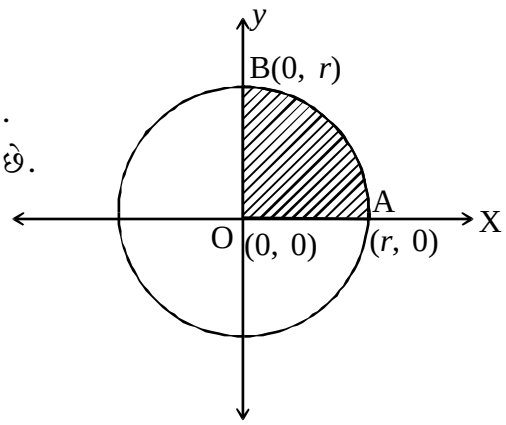
$$= \frac{32}{3}$$

આમ, માંગેલ પરિમિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{32}{3}$ એકમ છે.

(2) વર્તુળ $x^2 + y^2 = r^2$ થી ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

અહીં વર્તુળ $x^2 + y^2 = r^2$ એ બંને અક્ષો પરત્વે સંમિત છે.

તેથી પ્રથમ ચરણમાંના ચાપ હેઠળનું ક્ષેત્રફળ મેળવીને તેને 4 વડે ગુણીશું.




$\therefore$ વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= 4 \int_0^r y\,dx$

$= 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$ $(\because x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2})$ $(\therefore$ પ્રથમ ચરણ)

$$= 4 \left[ \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} + \sin^{-1}\frac{x}{2} \right]_0^r$$

$$= 4 \left[ \frac{r}{2}\sqrt{r^2 - r^2} + \frac{r^2}{2} \cdot \sin^{-1}1 - 0 \right]$$

$$= 4 \left[ 0 + \frac{r^2}{2} \cdot \sin^{-1}1 - 0 \right]$$

$$= \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi r^2$$

આમ, વર્તુળ $x^2 + y^2 = r^2$ થી ઘેરાયેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $\pi r^2$ છે.

(3) (i) પ્રથમ કક્ષાના એકઘાતી વિકલ સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ લખો.

પ્રથમ કક્ષાના એકઘાતી વિકલ સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ:

$(ax + by + c)\, dx + (a'x + b'y + c')\, dy = 0$

એટલે કે, $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+bx+c}{a'x+b'y+c'}$ છે.

(ii) નીચેના વિકલસમીકરણનાં કક્ષા અને પરિમાણ જણાવો.

$$y = x\frac{dy}{dx} + 5\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

**Ans.** અહીં, $y = x\frac{dy}{dx} + 5\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$\therefore \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = 25\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

આપેલ વિકલ સમીકરણમાં ઉચ્ચતમ વિકલનફળ $\frac{dy}{dx}$ છે અને તેને ઉચ્ચતમ ઘાતાંક 2 છે.

$\therefore$ આપેલ વિકલ સમીકરણની કક્ષા 1 અને પરિમાણ 2 છે.

**પ્રશ્ન–(4) (ક) ગમે તે બે ગણો :**

(1) એક યાદચ્છિક ચલ $x$ નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે.

$P(x) = \frac{|x-3|}{7}$; $x = 0, 1, 2, 4$, તો યાદચ્છિક ચલ $x$ ના મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

**Ans.** અહીં $P(x) = \frac{|x-3|}{7}$ ; $x = 0, 1, 2, 4$

તેથી યાદચ્છિક ચલ $x$ નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે મળે છે.

| X = $x$ | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |

હવે, યાદચ્છિક ચલ $x$ નો મધ્યક = E(X)

$$= \sum x_i \, P(x_i)$$

$$= (0)\left(\frac{3}{7}\right) + 1\left(\frac{2}{7}\right) + 2\left(\frac{1}{7}\right) + 4\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$= 0 + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$$

$$= \frac{8}{7}$$

અને વિતરણ, $\sigma_X^2 = v(X)$

$$= E(X)^2 - [E(X)]^2$$

$$= \sum x_i^2 \cdot P(x_i) - [\sum x_i \cdot P(x_i)]^2$$

$$= 0\left(\frac{3}{7}\right) + 1^2\left(\frac{2}{7}\right) + 2^2\left(\frac{1}{7}\right) + 4^2\left(\frac{1}{7}\right) - \left(\frac{8}{7}\right)^2$$

$$= 0 + \frac{3}{7} + \frac{12}{7} + \frac{48}{7} - \frac{64}{49}$$

$$= \frac{63}{7} - \frac{64}{49}$$

$$= \frac{441-64}{49}$$

$$= \frac{375}{49}$$

(2) $n$ અને P પ્રચલોવાળા એક દ્વીપદી યાદચ્છિક ચલ $x$ ના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 8 અને 4 છે. તો $n$, P તથા $E(x^2)$ શોધો.

$E(X) = nP = 8$ અને $v(X) = npq = 4$ પરથી $q = \frac{1}{2}$

હવે, $E(x^2) = v(x) + (E(x_1))^2$

$$= 4 + (8)^2 = 4 + 64$$

$$= 68$$

આમ, $n = 16$, $p = \frac{1}{2}$ અને $E(x)^2 = 68$ મળે.

(3) જય નિશાન તાકવાની હરીફાઈમાં ભાગ લે છે. તેની નિશાની તાકવાની સંભાવના 0.4 છે. 5 વખત નિશાન તાકવાના પ્રયોગોમાં તે બરાબર ત્રણ વખત નિશાન તાકી શકશે તેની સંભાવના કેટલી ?

**Ans.** જય નિશાન તાકી શકે તેને સફળતા ગણીએ તો સફળતાની સંભાવના $p = 0.4$ છે.

આ વખતે નિષ્ફળતાની સંભાવતા $q = 1 - p = 0.5$ થશે.

ધારો કે જય 5 પ્રયત્નો પૈકી X પ્રયત્નોમાં નિશાન તાકી શકે છે, તો $x$ એ યાદચ્છિક દ્વિપદી ચલ થશે.

તેના પ્રચલો $n = 5$ અને $p = 0.4$ છે.

તેથી $x$ ની સંભાવના વિતરણનું સૂત્ર,

$$p(x) = \binom{5}{x} (0.4)^x (0.6)^{5-x} \; ; \; x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

હવે, રમેશ બરાબર 3 વખત નિશાન તાકી શકે તે ઘટનાની સંભાવના,

$$p(3) = \binom{5}{3} (0.4)^3 (0.6)^{5-3}$$

$$= 10 \; (0.064) \cdot (0.38)$$

$$= 0.64 \times 0.36$$

$$= 0.2304$$

**પ્રશ્ન–4 (ડ)**

(1) $\int x^{4x} (1 + \log x) \, dx$ શોધો, જ્યાં $x \in R^+ - (0, 1)$

**Ans.** $\int x^{4x} (1 + \log x) \, dx$

$$= \int x^{3x} \cdot x^x (1 + \log x) \, dx$$

$$= \int (f(x))^3 \cdot f'(x) \, dx; \text{ જ્યાં } f(x) = x^x \text{ અને } f'(x) = x^x (1 + \log x)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (f(x)^4 + c$$

$$= \frac{1}{4} (x^x)^4 + c$$

$$= \frac{1}{4} x^{4x} + c$$

**(2) (i) વ્યાખ્યા લખો :** વિકલ સમીકરણની કક્ષા

બહુપદી સ્વરૂપે લખેલા વિકલ સમીકરણમાં આવતા વિકલિતોમાંના ઉચ્ચતમ કક્ષાના વિકલિતની કક્ષાને વિકલ સમીકરણની કક્ષા કહે છે.

(ii) વિયોજનીય ચલ પ્રકારના વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક ઉકેલ મેળવો.

**Ans.** વિકલ સમીકરણના સ્વરૂપ $P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = d$ માં $P(x, y) = f(x)$ અને $Q(x, y) = g(y)$ હોય તો, આ વિયોજનીય ચલ પ્રકારના સમીકરણનું સ્વરૂપ $f(x) \, dx + g(y) \, dy = 0$ તેનું પદવાર સંકલન સંકલન કરતાં, $\int f(x) \, dx + \int g(y) \, dy = c$; (જ્યાં, (સ્વૈર અચલ)

તેથી $F(x) + G(y) = C$, વ્યાપક ઉકેલ મળે.

**પ્રશ્ન–5 (અ) (i)** પાઠ્યપુસ્તક (સંભાવના Theory)

પ્રમેય – 5 (સંભાવના)

પ્રશ્ન–5 (અ) 'અથવા'

* **પક્ષ :** A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

**સાધ્ય :** B અને A' નિરપેક્ષ થાય એમ બતાવો.

એટલે $P(B \cap A') = P(B) \cdot P(A')$

**સાબિતી :**

$P(B \cap A') = P(B - B \cap A)$ ($\because B \cap A \subset B$)

$= P(B) - P(B \cap A)$ (પ્રમેય – 2)

$= P(B) - P(B) \cdot P(A)$ {પક્ષ, નિરપેક્ષ ઘટના}

$= P(B)[1 - P(A)]$ ... (2)

$= P(B) \cdot P(A')$ $\{P(A') = 1 - P(A)\}$

**(અ) (ii)** "સંભાવના વિધેયનો વિસ્તાર [0, 1] છે."

આ વિધાન ખોટું છે.

વિસ્તાર એ [0, 1] નો ઉપગણ છે, વ્યાપત વિધેય નથી.

**ઉદાહરણ :** એક સમતોલ પાસો એક વખત ઉછાળવાનાનો નિદર્શાવકાશ U = {H, T} ચાર ઘટનાઓ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે.

$\phi$, {H}, {T}, {H, T} ની સંભાવના

0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 1 છે.

આમ સંભાવના વિધેયનો વિસ્તાર $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ જે [0, 1] નથી પણ તેનો ઉપગણ છે.

* જો [0, 1] સંભાવના વિધેયનો વિસ્તાર હોય તો $\frac{1}{3} \in [0, 1]$ હોય તો કોઈ ઘટના A મળવી જોઈએ

કે જેથી $P(A) = \frac{1}{3}$ પણ આ શક્ય નથી

∴ ઉપગણ છે.

(iii) સૂત્ર : $P(x + 1) = \left(\frac{n - x}{x + 1}\right) \cdot \frac{p}{q} P(x)$ જ્યાં $x = 0, 1, 2, \ldots\ldots (n - 1)$

**પ્રશ્ન–5 (બ) (i)** A = રામ દાખલો ગણી શકે તે ઘટના ∴ $P(A) = \frac{7}{10}$

A' = " " ન " " " $P(A') = \frac{3}{10}$

B = ભરત દાખલો ગણી શકે તે ઘટના ∴ $P(B) = \frac{8}{10}$

B' = " " ન " " $P(B') = \frac{2}{10}$ ... (1)

C = બન્ને દાખલો ગણી શકે તે ઘટના

$C = (A \cup B) = (A' \cap B')$ '

$\therefore$ $P(c) = P(A' \cap B')'$

$= 1 - P(A' \cap B')$

$= 1 - P(A').\ P(B') = 1 - \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{94}{100}.$ ... (1)

(બ) (3) $P(A \cap B') = 0.4$ $P(A \cup B) = 0.9$

$P(B \cap A') = 0.3$

$P(A - A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4$

$P(B - A \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.3$

$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0.7$ સરવાળો

$P(A) - P(B) = 0.1$ બાદબાકી ....

હવે $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0.9 = 0.7 + 2P(A \cap B) - P(A \cap B)$

$\therefore$ $0.2 = P(A \cap B)$

હવે $P(A' \cup B') = P(A \cap B)'$

$= 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$

**પ્રશ્ન–5 (ક) (i)**

| $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|
| 4 લાલ<br>3 સફેદ | 4 સફેદ<br>3 લાલ |

* બન્ને પેટી પસંદ થાય તે સમસંભાવી ઘટનાઓ છે.

$\therefore$ $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$

* A = પેટીમાંથી પસંદ કરેલ દડો (બે) લાલ હોય તે ઘટના

(i) હવે $\frac{A}{B_1}$ = પ્રથમ પેટી $B_1$ પસંદ થયા પછી, તેમાંથી બે લાલ દડા પસંદ થાય તે ઘટના

$\therefore$ $P\left(\frac{A}{B_1}\right) = \frac{4C_2}{7C_2} = \frac{4\times3}{7\times6} = \frac{2}{7}$

(ii) $\frac{A}{B_2}$ = બીજી પેટી $B_2$ પસંદ થાય પછી તેમાંથી લાલ દડાઓ (બે) પસંદ થાય તે ઘટના

$\therefore$ $P\left(\frac{A}{B_2}\right) = \frac{4C_2}{7C_2} = \frac{3\times2}{7\times6} = \frac{1}{7}$

બેયઝ પ્રમેય $P(A) = P\left(\frac{A}{B_1}\right).P(B_1) + P\left(\frac{A}{B_2}\right).P(B_2)$

$= \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$

$= \frac{3}{14}$ જવાબ

**(ii) A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે.**

(a) $\therefore \quad P(A \cap B) = 0$

હવે $P(A \cap B') = P(A - A \cap B) = P(A) - P(A \cap B)$

$\therefore \quad P(A \cap B') = P(A) \quad \{\because P(A \cap B) = 0\}$

$0.35 \neq 0.75$

ફાળવણી શક્ય નથી.

(b) 52 પત્તા માંથી બે પત્તા લેવાના છે. (પૂરવણી સહિત)

$A_1$ = પ્રથમ પ્રયત્ન પસંદ થયેલ પત્તુ કાળીનું હોય તે ઘટના

$$P(A_1) = \frac{13C_1}{52C_1} = \frac{1}{4}$$

$A_2$ = બીજા પ્રયત્ને પસંદ થયેલ પત્તું કાળીનું હોય તે ઘટના

$$P(A_2) = \frac{13C_1}{52C_1} = \frac{1}{4}$$

બન્ને ઘટનાઓ નિરપેક્ષ છે.

$$\therefore \quad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

(c) $(146.5)_{10} = (_____)_8$

| | ભાગાકાર | શેષ |
|---|---|---|
| $146 \div 8$ | 18 | 2 |
| $18 \div 8$ | 2 | $2 \uparrow$ |
| $2 \div 8$ | 0 | 2 |

$\therefore \quad (146)_{10} = (222)_8$

| અપૂર્ણાંક ભાગનો 8 વડે ગુણાકાર | પૂર્ણાંક ભાગ |
|---|---|
| $0.5 \times 8 = 4.0$ | $4 \downarrow$ |

$(0.5)_{10} = (4)_8$ ... (2)

$(146.5)_{10} = (222.4)_8$ જવાબ

.5427 E 04 + .4623 E 02

= .5427 E 04 + .0046 E 04

.5427 E 04

\+ .0046 E 04

.5473 E 04 ... (1)

જ. .5473 E 04