પ્રશ્નપત્ર-(1) <1>

ગણિત-(1) (050) (ક)

પ્રશ્ન:1 (અ)

(1) ત્રિકોણના અંતઃકેન્દ્ર ના યામ મેળવો. જો ત્રિકોણ સમબાજુ હોય તો અંતઃકેન્દ્ર મેળવી તમારા જવાબનું અર્થઘટન કરો. (3)

(2) બિંદુઓ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ અને $C(tx_2 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)y_1)$, $t \in R$ સમરેખ છે તેમ સાબિત કરો. (1)

પ્રશ્ન:1 (બ) કોઈ પણ બે ગણો: (4)

(1) $A(6,3)$, $B(-3,5)$ અને $C(4,-2)$ તથા $P(x,y)$ હોય તો સાબિત કરો કે.

$$\frac{\Delta PBC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{|x+y-2|}{7}$$

(2) ΔABC માં જો ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર હોય તો સાબિત કરો કે

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

(3) $B(4,1)$ અને $C(2,5)$ સમાંતરના બિંદુઓ છે. જો P સમાંતરનું એવું બિંદુ હોય કે જેથી $m\angle BPC = \pi/2$ તો P ના બિંદુપથનું સમીકરણ મેળવો.

પ્રશ્ન:1 (ક) કોઈ પણ બે ગણો. (4)

(1) રેખા $(\sqrt{3}, -1)$ માંથી પસાર થાય છે. તથા ઉદ્ગમબિંદુ માંથી તેના પરના લંબ ની લંબાઈ $\sqrt{2}$ છે. તો રેખાનું સમીકરણ મેળવો.

(2) $A(2,3)$ અને $B(5,-3)$ ને જોડતા રેખાખંડનું રેખા $2x + 3y - 9 = 0$, A તરફ થી કયા ગુણોત્તર માં અને કયા બિંદુએ વિભાજન કરશે તે શોધો.

(3) $A(6,3)$ અને $B(-2,1)$ બે બિંદુઓ છે. બિંદુ C રેખા $7x + 9y - 10 = 0$ પર આવેલું છે. બતાવો કે ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર રેખા $21x + 27y - 74 = 0$ પર આવેલું છે.

પ્રશ્ન:1 (ડ) બે ભિન્ન છેદતી રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનાં માપ ની ટ્રાંસ્વર્સ પરથી તેમની વચ્ચેનો ખૂણો શોધવા માટેનું સૂત્ર તારવો. (3)

પ્રશ્ન : 2 (અ)

(1) સમીકરણ $l(a_1x+b_1y+c_1)+m(a_2x+b_2y+c_2)=0$, $l^2+m^2\neq 0$ એ સામાન્ય બિંદુ માં છેદતી રેખાઓ $a_1x+b_1y+c_1=0$ અને $a_2x+b_2y+c_2=0$ ના છેદબિંદુ માંથી પસાર થતી રેખા દર્શાવે છે. તેમ સાબિત કરો. (3)

(2) (2,3) અને (2,5) ને જોડતા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકનું સમીકરણ મેળવો. (1)

પ્રશ્ન : 2 (બ)

(1) વર્તુળ $x^2+y^2=r^2$ પરના બિંદુ (x_1, y_1) આગળ સ્પર્શક અને અભિલંબના સમીકરણ મેળવો (2)

(2) રેખાઓ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$; $x\sin\alpha-y\cos\alpha=0$ ના છેદણ મેળવો. (1)

(3) સમીકરણ $x^2+y^2+2y+1=0$ રેખાયુગ્મ દર્શાવે છે? કારણ આપો. (1)

પ્રશ્ન : 2 (ક)

(1) વર્તુળો $x^2+y^2-6x+1=0$ અને $x^2+y^2-4y+1=0$ ને લંબારછેદી અને રેખા $3x+4y+6=0$ પર કેન્દ્ર હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો. (3)

અથવા

સાબિત કરો કે વર્તુળ $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ એ y અક્ષને સ્પર્શે છે. આ વર્તુળને y-અક્ષ પરના સ્પર્શબિંદુને સ્પર્શતા તથા 3 એકમ ત્રિજ્યા વાળા વર્તુળનું સમીકરણ શોધો.

(2) બિંદુ (3,4) કેન્દ્રવાળા અને રેખા $3x-4y+5=0$ ને સ્પર્શતા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો. (1)

પ્રશ્ન : 2 (ડ) ઊગમબિંદુ માંથી પસાર થતી અને રેખા $x+y=0$ સાથે α માપનો ખૂણો બનાવતી રેખાઓનું સમીકરણ $(x^2+y^2)\cos 2\alpha+2xy=0$ છે તેમ સાબિત કરો. $(0<\alpha<\frac{\pi}{4})$ (3)

અથવા

$x^2 - y^2 - 2xy \tan\theta + 2ay \sec\theta - a^2 = 0$, $\theta \in R$ સ્વરૂપમાં દર્શાવિ છે, એમ સાબિત કરો. તથા તેમના કેન્દ્રવિંદુના ગામ શોધો.

પ્રશ્ન:3 (અ)

(1) પરવલયનું પ્રમાણિત સમીકરણ $y^2 = 4ax$, $a > 0$ મોટે મેળવો. (2)

(2) બતાવો કે પરવલયો $y^2 = 4ax$ તથા $x^2 = 4by$ ના સામાન્ય સ્પર્શકનું સમીકરણ $(a)^{1/3}x + (b)^{1/3}y + (ab)^{2/3} = 0$ છે. (2)

અથવા

પ્રશ્ન:3 (અ-2)

(1) પરવલય $y^2 = 8x$ ને બિંદુ $(1,3)$ માંથી દોરેલા સ્પર્શકોના સમીકરણ મેળવો સ્પર્શબિંદુના ગામ જણાવો. (1)

(2) બિંદુ P માંથી પરવલયને દોરેલા સ્પર્શકોના ગાળનો સ્વરવાળો K સ્વયંચળ હોય તો P ના બિંદુગણનું સમીકરણ મેળવો. (1)

પ્રશ્ન:3 (બ)(1) ઉપવલયના $P(x_1, y_1)$ બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો. તો પરથી ઉપવલયના θ બિંદુએ સ્પર્શકનું સમીકરણ મેળવો. (2)

(2) ઉપવલય પરના બિંદુઓ P અને Q ના ઉત્કેન્દ્રીકોણ વર્ધકોનો તફાવત $\frac{\pi}{2}$ હોય અને $\overleftrightarrow{PQ}$ અક્ષો પર અનુક્રમે c અને d અંતઃ ખંડો કાપે તો સાબિત કરો કે $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2} = 2$ (2)

અથવા

~~(1) લંબવલયના~~

(1) ઉપવલય $x^2 + 4y^2 = 100$ પરના બિંદુ $P(6,-4)$ ને અનુરૂપ ઉત્કેન્દ્રીકોણ મેળવો. (1)

(2) જેના નાભિ $(2,0)$ અને પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ 6 એકમ હોય તેવા ઉપવલયનું સમીકરણ મેળવો (1)

પ્રશ્ન:3 (ક)

(1) લંબવલયના વ્યાખ્યા આપો. તેનું ~~સમીકરણ~~ સમીકરણ લખો તથા તેની ઉત્કેન્દ્રતા મેળવો.

(2) અતિવલય પરના બિંદુઓ $P(\alpha)$ અને $Q(\beta)$ ને જોડતી જીવા નાભિ $(ae, 0)$ માંથી પસાર થાય $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-e}{1+e}$ સાબિત કરો $(P, Q \neq A, A')$

પ્રશ્ન:3 (C)

(1) શાંકવકવર $25x^2 - 144y^2 = 3600$ માટે નાભિના યામ અને નિયામિકાના સમીકરણો મેળવો. (1)

(2) બિંદુઓ $A(a,0)$, $A'(-a',0)$, $B(0,b)$ & $B'(0,-b)$ વર્તુળના દારક હોય તો સાબિત કરો કે $aa' = bb'$ તથા વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો. (2)

પ્રશ્ન:4 (અથવા)

સમી. $x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ વડે કયા વક્રનું નિરૂપણ થાય છે? વક્રના નાભિ, નિયામિકા અધિકેન્દ્રતા અને રાશીની લંબાઈ શોધો. (4)

અથવા

નીચેનાં વક્રોના સમી. ને પ્રમાણિત રૂપમાં ફેરવીને ઓળખો.

(1) $x^2 + y^2 - 10xy + 18x + 6y - 14 = 0$

(2) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 2 = 0$

પ્રશ્ન:4 (બ)

(1) બહુગોલાર સદીશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ માટે સા. કરો કે $\bar{x} = \bar{y}$ $\Leftrightarrow |\bar{x}| = |\bar{y}|$ તથા $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા સમાન હોય. (2)

(2) જો $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ સમતલીય સદીશો હોય તો સમતલીય સદીશોની વ્યાખ્યાના આધારે $\bar{x}+\bar{y}$, $\bar{y}+\bar{z}$, $\bar{z}+\bar{x}$ પણ સમતલીય સદીશો છે તેમ બતાવો. (2)

પ્રશ્ન:4 (ક)

(1) ચતુષ્ફલકના ઘનફળનું સૂત્ર મેળવો. (સદિશની મદદથી) (2)

(2) સદિશ વર્તુળમાંનો ખૂણો કાટખૂણો છે. તેમ સાબિત કરો. (સદિશ વડે) (2)

પ્રશ્ન:4 (D)

(1) હોડીનો વેગ પૂર્વમાં $10\sqrt{2}$ કિ.મી. છે. અને જો હોડી પરના માણસોને પવન અગ્નિ ખૂણામાંથી 5 કિ.મી. ની ઝડપે ફૂંકાતો જણાય તો પવનનો સાચો વેગ શોધો.

(2) જો સદીશો $(a,2)$ અને $(a,-2)$ પરસ્પરનાં ખૂણાંનું રેડિયન માપ $\pi/3$ છે તો a શોધો.

પ્રશ્ન 5 (અ)

(1) R^3 માં બે ભિન્ન સમાંતર રેખાઓ $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$ $k \in R$ અને $\bar{r} = \bar{b} + k\bar{m}$, $k \in R$ પરસ્પર છેદે તો માટેની અનિવાર્ય શરત મેળવો. (2)

(2) જે સમતલ પર ઊગમબિંદુ માંથી સમતલ પરના લંબનો લંબપાદ P અને લંબના દિક્કોસાઈન α, β, γ હોય તેવા સમતલનું સમીકરણ મેળવો. (2)

અથવા

બે છેદતી રેખાઓ $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$, $k \in R$ અને $\bar{r} = \bar{b} + k\bar{m}$, $k \in R$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

(બ)

(1) આપેલા ત્રણ-બિંદુઓવાળા ગોલકનું સમી. મેળવો. (1)

(2) બિંદુ (2, 4, 5) થી $\frac{x-9}{4} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-7}{3}$ નું લંબઅંતર મેળવો. (3)

અથવા

રેખાઓ $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ અને $x/2 = \frac{z+3}{3}, y+1=0$ નો છેદબિંદુ શોધો.

(ક)

(1) A (2, 1, -5), B (3, 2, -6), C (8, 7, -11) સમરેખ છે તેમ બતાવો તથા B એ AC નું A તરફથી કેટલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો. (2)

(2) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3x - 2y - 6z - 66 = 0$ સમીકરણ ગોલકને દર્શાવે છે કે કેમ તે ચકાસો. જો ગોલકને દર્શાવે તો કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો. (2)

(3) $3x + y - z = 0$ અને $x + 2y + 3z = 5$ ને લંબ તથા C (1, 3, 5) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો. (3)

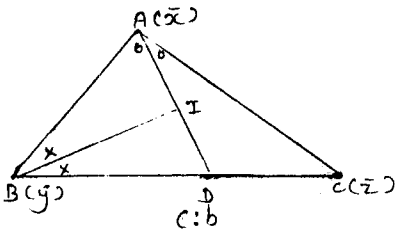
અથવા

સમતલો $x + 2y + 3z = 4$ અને $4x + 3y + 2z + 1 = 0$ ની છેદ રેખા તથા C (1, 1, 1) માંથી પસાર થતા સમતલનું સમી. મેળવો.

જવાબો

પ્રશ્નાવલિ-1 (050)

પ્રશ્ન-1 (વિકલ્પ (1))



ધારો કે $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ત્રિકોણના શિરો છે અને $AB = c$, $BC = a$ અને $CA = b$ છે. $\angle A$ નો દુભાજક BC ને D માં છેદે છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$\therefore$ D ના યામ $\left(\frac{cx_3 + bx_2}{c+b}, \frac{cy_3 + by_2}{c+b}\right)$ થાય.

હવે, ΔBDA માં $\angle B$ નો દુભાજક $\overline{AD}$ ને I માં છેદે છે.

$$\therefore \frac{DI}{IA} = \frac{BD}{BA}$$

પણ $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{c}{c+b}$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{c}{c+b}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{ca}{c+b}$$

તોપણ, $\frac{DI}{IA} = \frac{\frac{ca}{c+b}}{c} = \frac{a}{c+b}$

જો ધારીએ કે I ના યામ (x, y) હોય તો

$$x = \frac{ax_1 + (c+b)\left(\frac{cx_3 + bx_2}{c+b}\right)}{a+b+c}$$

$$= \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}$$

$$y = \frac{ay_1 + (c+b)\left(\frac{cy_3 + by_2}{c+b}\right)}{a+b+c} = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}$$

$$\therefore I = \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}\right)$$

જો ત્રિકોણ સમબાજુ હોય તો $a=b=c$ થાય.

$\therefore$ અંતઃકેન્દ્રના યામ $= \left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right)$

$= \left(\frac{ax_1+ax_2+ax_3}{3a}, \frac{ay_1+ay_2+ay_3}{3a}\right)$

$= \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

$=$ મધ્યકેન્દ્રના યામ

અવલોકન = જો ત્રિકોણ સમબાજુ હોય તો અંતઃકેન્દ્ર અને મધ્યકેન્દ્રના યામ સમાન થાય.

(2) ડાબી $\begin{vmatrix} tx_2+(1+t)x_1 & ty_2+(1-t)y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$

$R_{21}(-1+t)$ & $R_{31}(-t)$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 0$

$\therefore$ A, B, C સમરેખ બિંદુઓ છે.

પ્રશ્ન:1 (અ)

(1) ΔPBC માટે

$D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= x(7) - y(-7) + 1(6-20)$

$= 7x+7y-14$

$= 7(x+y-2)$

ΔPBC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}|D| = \frac{7|x+y-2|}{2}$

ΔABC માટે,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6(5+2) - 3(-3-4) + 1(6-20)$$

$$= 42 + 21 - 14$$

$$= 49$$

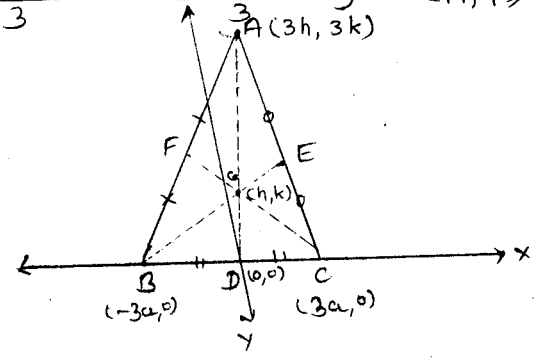
ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{49}{2}$

$$\therefore \frac{\Delta PBC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}}{\Delta ABC \text{ નું ક્ષેત્રફળ}} = \frac{\frac{7|x+y-2|}{2}}{\frac{49}{2}}$$

$$= \frac{|x+y-2|}{7}$$

(2) ΔABC માં G એ ગુરુકેન્દ્ર હોય, તો સાબિત કરો કે $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

દાખલો કે ΔABC માં $A(3h, 3k)$, $B(-3a, 0)$ અને $C(3a, 0)$ હોય તો ગુરુકેન્દ્ર G ના યામ $\left(\frac{3h-3a+3a}{3}, \frac{3k+0+0}{3}\right) = (h, k)$ થાય.



હવે $AB^2 + BC^2 + CA^2$

$= (3h+3a)^2 + (3k-0)^2 + (-3a-3a)^2 + (3a-3h)^2 + (0-3k)^2$

$= 18h^2 + 18k^2 + 54a^2$

$= 18(h^2 + k^2 + 3a^2)$ ..... (1)

અને $3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

$= 3[(h-3h)^2 + (k-3k)^2 + (h+3a)^2 + (k-0)^2 + (h-3a)^2 + (k-0)^2]$

$= 3[6h^2+6k^2+18a^2]$

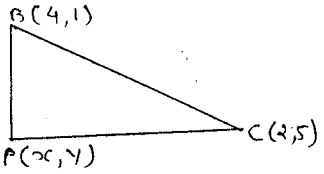
$= 18(h^2+k^2+3a^2)$ .... (2)

ઉપરોક્ત (1) અને (2) પરથી

ΔABC માં G મધ્યકેન્દ્ર હોય, તો $AB^2+BC^2+CA^2 = 3(GA^2+GB^2+GC^2)$

(3) B(4,1) અને C(2,5) સમભાજીનાં બિંદુઓ છે. જો P સમભાજીનું બિંદુ હોય કે જેથી $m\angle BPC = \pi/2$ છે.

અહીં B(4,1) અને C(2,5) છે.



તથા ધારો કે P(x,y) છે.

વળી, $m\angle BPC = \frac{\pi}{2}$

$\therefore PB^2+PC^2 = BC^2$

$\therefore (x-4)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-5)^2 = (4-2)^2+(1-5)^2$

$\therefore x^2-8x+16+y^2-2y+1+x^2-4x+4+y^2-10y+25 = 4+16$

$\therefore 2x^2+2y^2-12x-12y+26 = 0$

$\therefore x^2+y^2-6x-6y+13 = 0$

પરંતુ અહીં $P \neq B, P \neq C$

$\therefore$ અહીં, બિંદુગણ $S = \{(x,y) \mid x^2+y^2-6x-6y+13 = 0\}$ - $\{(4,1),(2,5)\}$ છે.

P નો બિંદુગણનું સમીકરણ $x^2+y^2-6x-6y+13=0$ છે જ્યાં $(x,y) \neq (4,1),(2,5)$

પ્રશ્ન 1 (B)

(1) ધારો કે માંગેલી રેખાનું સમીકરણ $x\cos\alpha+y\sin\alpha = p$ જો $(\sqrt{3},-1)$ માંથી પસાર થતા હોય તથા $p=\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha = \sqrt{2}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha = 1/\sqrt{2}$

$\cos\alpha\cdot\cos\pi/6-\sin\alpha\sin\pi/6 = \cos\pi/4$

$\therefore \cos(\alpha+\pi/6) = \cos(\pi/4)$

$\therefore \alpha+\pi/6 = 2k\pi \pm \pi/4, k\in Z$

$\therefore \alpha = \pi/12$ મળશે $\alpha = -5\pi/12$ ($k=0$ લેતાં)

$\therefore$ રેખા x-અક્ષની ધનદિશા સાથે $\pi/12$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

$-\frac{5\pi}{12}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

(i) $\alpha = \pi/12$ માટે રેખાનું સમી.

$x\cos\pi/12 + y\sin\pi/12 = \sqrt{2}$

$\therefore x\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

$\therefore (\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = 4$

(ii) $x\cdot\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right) + y\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{2}$

$x\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) - y\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

$\therefore (\sqrt{3}-1)x - (\sqrt{3}+1)y = 4$

(2) A(2,3) અને B(5,-3) આપેલાં બિંદુઓ છે.

ધારો કે P(x,y) બિંદુ $\overline{AB}$ નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

$\therefore$ P ના યામ $\left(\frac{5\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{-3\lambda+3}{\lambda+1}\right)$ થાય.

બિંદુ P, રેખા $2x+3y-9=0$ પર આવેલું છે.

$\therefore 2\left(\frac{5\lambda+2}{\lambda+1}\right) + 3\left(\frac{-3\lambda+3}{\lambda+1}\right) - 9 = 0$

$10\lambda+4-9\lambda+9-9\lambda-9=0$

$-8\lambda+4=0$ $\quad\boxed{\therefore \lambda = +1/2}$

$\therefore$ વિભાજન કરતાં બિંદુના યામ

$P\left(\frac{5(1/2)+2}{1/2+1}, \frac{-3(1/2)+3}{1/2+1}\right)$

$= (9/3, 1) = (3,1)$

(3) ધારો કે ΔABC નું ત્રીજું શિરોબિંદુ C(x,y) છે.

C એ રેખા $7x+9y-10=0$ પર આવેલું છે.

$\therefore$ C ના યામ $\left(x, \frac{10-7x}{9}\right)$

ત્રિકોણકેન્દ્ર $G_1 = \left(\frac{6-2+x}{3}, \frac{3+1+\frac{10-7x}{9}}{3}\right)$

$= \left(\frac{4+x}{3}, \frac{46-7x}{27}\right)$

જો $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi/2$ તો $\tan\alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2)$

$= |\tan(\theta_1 - \theta_2)| \quad (\because 0 < \theta_1 - \theta_2 < \pi/2)$

જો $\pi/2 < \theta_1 - \theta_2 < \pi$ તો $\tan\alpha = -\tan(\theta_1 - \theta_2)$

$= |\tan(\theta_1 - \theta_2)| \quad (\because \tan(\theta_1 - \theta_2) < 0)$

બન્ને કિસ્સામાં $\tan\alpha = |\tan(\theta_1 - \theta_2)|$

$\tan\alpha = |\tan(\theta_1 - \theta_2)|$

$$= \left| \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} \right| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$\therefore \alpha = \tan^{-1}\left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \quad \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

ઉદાહરણ: 2 (ક્રમ)

(1) આપેલી રેખાઓની રેખાઓનો પરસ્પર છેદ હોવા માટે

$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ રેખાઓનો છેદ. રેખાઓ $(la_1 + ma_2)x + (lb_1 + mb_2)y + (lc_1 + mc_2) = 0$

રેખા જો $(la_1 + ma_2)x + (lb_1 + mb_2) = 0$

કોઈપણ l, m માટે $la_1 + ma_2 = 0$

અને $lb_1 + mb_2 = 0$

$\therefore la_1 = -ma_2$ અથવા $lb_1 = -mb_2$

$\therefore l(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ અને $m(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$

હવે $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ હોવાથી $l = 0$ અને $m = 0$ આપણે

$\therefore l^2 + m^2 = 0$

આ પરિણામ પરથી આપણે કહી શકીએ કે

$\therefore (la_1 + ma_2)^2 + (lb_1 + mb_2)^2 \neq 0$

$\therefore$ રેખાઓ $(la_1 + ma_2)x + (lb_1 + mb_2)y + (lc_1 + mc_2) = 0$

રેખા બનાવે છે.

વધુમાં, જો રેખાઓની જોડીઓનું છેદબિંદુ (x', y') હોય તો

$a_1x' + b_1y' + c_1 = 0$ તથા $a_2x' + b_2y' + c_2 = 0$

$\therefore l(a_1x' + b_1y' + c_1) + m(a_2x' + b_2y' + c_2)$

$= l.0 + m.0$

$= 0$

$\therefore$ રેખા $l(a_1x + b_1y + c_1) + m(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

$l^2 + m^2 \neq 0$ રેખાઓની જોડીઓનો છેદબિંદુ આપે.

જો $0 < \theta_1 - \theta_2 < \pi/2$ તો $\tan\alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2)$

$= |\tan(\theta_1 - \theta_2)|$ $(\because 0 < \theta_1 - \theta_2 < \pi/2)$

જો $\pi/2 < \theta_1 - \theta_2 < \pi$ તો $\tan\alpha = -\tan(\theta_1 - \theta_2)$

$= |\tan(\theta_1 - \theta_2)|$ $(\because \tan(\theta_1 - \theta_2) < 0)$

આમ, કોઈ પણ કિસ્સામાં $\tan\alpha = |\tan(\theta_1 - \theta_2)|$

$\tan\alpha = |\tan(\theta_1 - \theta_2)|$

$= \left|\frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}\right| = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

$\therefore \alpha = \tan^{-1}\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ $\left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

ઉદાહરણ: 2 (ચા)

(1) બતાવો કે બિંદુઓની રેખાઓનો પરસ્પર છેદે છે તેવી શરત $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ બતાવો. ધારો કે $(la_1 + ma_2)x + (lb_1 + mb_2)y + (lc_1 + mc_2) = 0$ અને જો $(la_1 + ma_2)^2 + (lb_1 + mb_2)^2 = 0$

ફરીથી, તો $la_1 + ma_2 = 0$

અને $lb_1 + mb_2 = 0$

$\therefore la_1 = -ma_2$ અને $lb_1 = -mb_2$

$\therefore l(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$ અને $m(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$

કારણ $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ હોવાથી $l = 0$ અને $m = 0$ મળશે

$\therefore l^2 + m^2 = 0$

આ પરિણામ પરિકલ્પના વિરુદ્ધ છે.

$\therefore (la_1 + ma_2)^2 + (lb_1 + mb_2)^2 \neq 0$

$\therefore$ ધારો કે $(la_1 + ma_2)x + (lb_1 + mb_2)y + (lc_1 + mc_2) = 0$

રેખા સમીકરણ છે

વળી, જો રેખાઓનું છેદબિંદુ (x', y') હોય, તો $a_1 x' + b_1 y' + c_1 = 0$ તથા $a_2 x' + b_2 y' + c_2 = 0$

$\therefore l(a_1 x' + b_1 y' + c_1) + m(a_2 x' + b_2 y' + c_2)$

$= l.0 + m.0$

$= 0$

$\therefore$ આપણે $l(a_1 x + b_1 y + c_1) + m(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$

$l^2 + m^2 \neq 0$ રેખાઓનું છેદબિંદુ માંગે

પસાર થાય છે.

(2) A(2,3), B(2,5) લો.

$\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ M(2,4) થશે.

ધારો કે AB ના લંબદ્વિભાજક l છે.

A તથા B નો x યામ સમાન છે. માટે $\overline{AB}$ શિરોલંબ રેખા થશે. તેથી તેનો ઢાળ મળે નહીં.

$\therefore$ l સમક્ષિતિજ રેખા થશે. જે M(2,4) માંથી પસાર થાય છે. માટે લંબદ્વિભાજક નું સમી. $y = 4$ થશે.

પ્રશ્ન:2(બ)

(1) ઉપપત્તિ: ધારો કે $x^2+y^2 = r^2$ વર્તુળનું સમી. છે.

આપેલ તેના પરનું કોઈ બિંદુ (x_1, y_1) છે.

વિકલન કરતાં $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

અહીં $y \neq 0$ તો $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

$\therefore$ બિંદુ (x_1, y_1) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)} = \frac{-x_1}{y_1}$, $y_1 \neq 0$

$\therefore$ સ્પર્શકનું સમી. $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$

અથવા કે $y_1y - y_1^2 = -x_1x + x_1^2$

$\therefore x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2 = r^2$

[$\because (x_1, y_1)$ વર્તુળ પર છે.]

આપેલા વર્તુળનો બિંદુ (x_1, y_1) આગળના સ્પર્શકનું સમી. $x_1x + y_1y = r^2$ છે.

જો $y_1 = 0$ તો $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ હોવાથી $x_1 = \pm r$

આ બિંદુઓ $(-r, 0)$, $(r, 0)$ આગળના સ્પર્શકોના સમીકરણો $x = -r$ અને $x = r$ થશે. આ સમીકરણો $xx_1 + yy_1 = r^2$ માં $(x_1, y_1) = (\pm r, 0)$ મૂકવાથી મળે છે.

<u>અભિલંબ</u>: $y \neq 0$ તો બિંદુ (x_1, y_1) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ $-\frac{x_1}{y_1}$ હોવાથી જો $x_1 \neq 0$ તો અભિલંબનો ઢાળ $\frac{y_1}{x_1}$ થાય.

$\therefore$ અભિલંબનું સમી. $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$

અથવા કે $x_1y - x_1y_1 = y_1x - x_1y_1$ અથવા $y_1x - x_1y$

$x_1 = 0$ માટે અભિલંબનું સમી. $x = 0$ પરંતુ આ સમી. નો ઉદ્ભવ મળે.

(2) આપેલી રેખાઓ $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ અને
$x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$ માટે
$a_1b_2 - a_2b_1 = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1 \neq 0$
$\therefore$ રેખાઓ બિંદુમાં છેદે છે.
ક્રેમરના ~~22~~ પ્રમેય મુજબ

$$\left|\frac{x}{\sin\alpha \; -p \\ -\cos\alpha \; 0}\right| = \left|\frac{-y}{\cos\alpha \; -p \\ \sin\alpha \; 0}\right| = \left|\frac{1}{\cos\alpha \; \sin\alpha \\ \sin\alpha \; -\cos\alpha}\right|$$

$$\therefore \frac{x}{-p\cos\alpha} = \frac{-y}{p\sin\alpha} = \frac{1}{-1}$$
$\therefore x = p\cos\alpha, \; y = p\sin\alpha$
$\therefore$ છેદબિંદુ $= \{(p\cos\alpha, p\sin\alpha)\}$

(3) $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$
અહીં $a = 1, \; h = 0, \; b = 1, \; g = 0, \; f = 1, \; c = 1$ છે.

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc - 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$
$$= 1 - 1 = 0$$

$h^2 - ab = 0 - 1 = -1 < 0$

આમ, આપેલું સમીકરણ બે રેખાઓ દર્શાવે નહીં.
પરંતુ $x^2 + (y+1)^2 = 0$ છે. આથી
$x = 0, \quad y + 1 = 0$
$\therefore x = 0, \quad y = -1$
$\therefore$ આપેલ સમીકરણ માત્ર એકાકી બિંદુ $(0, -1)$ દર્શાવે છે.

(ii) (1) અહીં વર્તુળ $S_1 : x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ માટે
$g_1 = -3, \; f_1 = 0, \; c_1 = 1$ તથા
વર્તુળ $S_2 : x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$ માટે
$g_2 = 0, \; f_2 = -2$ અને $c_2 = 1$ છે.
આપેલ માંગેલ વર્તુળ $S : x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
$g^2 + f^2 - c > 0$ છે.
અહીં વર્તુળો S_1 તથા S ~~બંધ~~ બરાબર છે.

$\therefore 2g_1 g + 2f_1 f = c_1 + c$ <15>
$\therefore 2(-3)g + 2(0)f = 1 + c$
$\therefore -6g = 1 + c$ —— (1)

તથા વર્તુળો S_2 અને S સંપ્રસ્પર્શી છે.
$\therefore 2g_2 g + 2f_2 f = c_2 + c$
$\therefore 2(0)g + 2(-2)f = 1 + c$
$\therefore -4f = 1 + c$ —— (2)

(1) અને (2) પરથી $-6g = -4f$
$\therefore 3g - 2f = 0$ —— (3)

હવે માંગેલ વર્તુળનું કેન્દ્ર $(-g, -f)$ એ રેખા $3x + 4y + 6 = 0$ પર છે.
$\therefore -3g - 4f = -6$ —— (4)

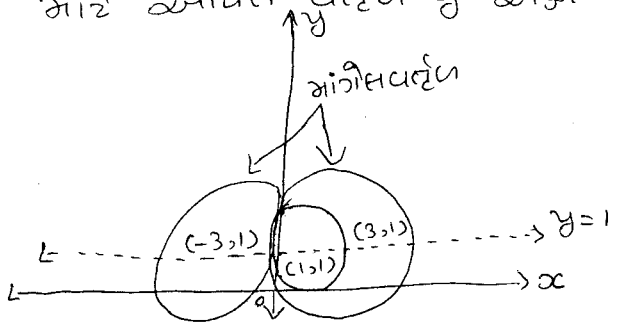
હવે સમીકરણ (3) અને (4) ઉકેલતાં $g = \frac{2}{3}$, $f = 1$ મળે.
હવે સમીકરણ (2) માં $f = 1$ લેતાં $c = -5$ મળે.

આમ $g = \frac{2}{3}$, $f = 1$, $c = -5$
$\therefore$ માંગેલ વર્તુળ $x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x + 2y - 5 = 0$
અથવા,
$3x^2 + 3y^2 + 4x + 6y - 15 = 0$ છે.

અથવા

(1) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ ને $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ સાથે સરખાવતાં

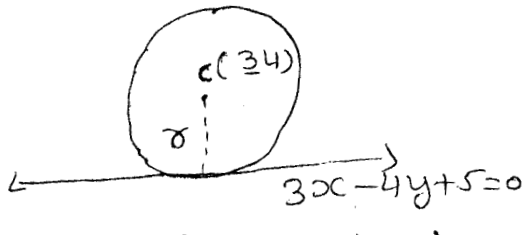
$2g = -2$, $2f = -2$, $c = 1$
$\therefore g = -1$, $f = -1$, $c = 1$
$\therefore$ વર્તુળનું કેન્દ્ર $= (-g, -f) = (1, 1)$ તથા
ત્રિજ્યા $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{1 + 1 - 1} = 1$
1 કેન્દ્ર નો x યામ $1 = |1| = 1 =$ ત્રિજ્યા છે.
માટે આપેલ વર્તુળ y-અક્ષ ને સ્પર્શે છે.



આપેલ વર્તુળ y-અક્ષને (0,1) બિંદુ એ સ્પર્શે છે.
માટે માંગેલ વર્તુળના કેન્દ્ર નો y યામ 1 છે
અને તેની ત્રિજ્યા 3 એકમ છે.

હવે 1 કેન્દ્ર નો x યામ = ત્રિજ્યા = 3
∴ માંગેલ વર્તુળ ના કેન્દ્ર નો x યામ = ±3
∴ માંગેલ વર્તુળ નું કેન્દ્ર = (±3, 1) = (h, k)
તથા $r = 3$
∴ માંગેલ વર્તુળ નું સમીકરણ
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
$\therefore (x-(\pm 3))^2 + (y-1)^2 = 3^2$
$\therefore (x \mp 3)^2 + (y-1)^2 = 9$
$\therefore x^2 \mp 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 9$
$\therefore x^2 + y^2 \pm 6x - 2y + 1 = 0$

(2)



વર્તુળની ત્રિજ્યા r
= કેન્દ્ર (3, 4) થી આપેલ રેખાનું લંબઅંતર

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{|3(3) - 4(4) + 5|}{\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{|14-16|}{5}$$

$$= \frac{2}{5}$$

કેન્દ્ર = (3, 4) = (h, k)

(1)

સમીકરણ $x^2 - y^2 - 2xy \tan\theta + 2ay \sec\theta - a^2 = 0$; $\theta \in R$ એ R^2 ના વ્યાપક ત્રિઘાત સમીકરણ

સમીકરણ

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

સાથે સરખામણી,

$a = 1, h = -\tan\theta, b = -1, g = 0, f = a\sec\theta$

અને $c = -a^2$

અહીં, $h^2 - ab = \tan^2\theta + 1 > 0 \therefore h^2 \geq ab$

$g^2 - ca = 0 + a^2 = a^2 > 0 \therefore g^2 \geq ca$

તથા $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\tan\theta & 0 \\ -\tan\theta & -1 & a\sec\theta \\ 0 & a\sec\theta & -a^2 \end{vmatrix}$

$= 1[a^2 - a^2\sec^2\theta] + \tan\theta[a^2\tan\theta]$

$= a^2(1 - \sec^2\theta + \tan^2\theta)$

$= a^2(1-1)$

$= 0$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણ રેખાયુગ્મ દર્શાવે છે,

અને તેમનું છેદબિંદુ $(\alpha, \beta) =$

$\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$ પ્રમાણે,

$(\alpha, \beta) = \left(\frac{-a\sec\theta\tan\theta - 0}{-1 - \tan^2\theta}, \frac{0 - a\sec\theta}{-1 - \tan^2\theta}\right)$

$= \left(\frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sec^2\theta}, \frac{a\sec\theta}{\sec^2\theta}\right)$

$= \left(\frac{a\sin\theta}{\cos\theta \cdot \sec\theta}, \frac{a}{\sec\theta}\right)$

$= (a\sin\theta, a(\cos\theta)$

આમ, માંગેલ છેદબિંદુ $(a\sin\theta, a\cos\theta)$ છે.

(D)

આપેલ સમીકરણ $x^2 - y^2 - 2xy \tan\theta + 2ay \sec\theta - a^2 = 0$; $\theta \in R$ એ R^2 માં રહેલ વક્ર નિર્દેશ

સમીકરણ

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

સાથે સરખાવતાં,

$a = 1, h = -\tan\theta, b = -1, g = 0, f = a\sec\theta$

અને $c = -a^2$

અહીં, $h^2 - ab = \tan^2\theta + 1 > 0 \therefore h^2 \geq ab$

$g^2 - ca = 0 + a^2 = a^2 > 0 \therefore g^2 \geq ca$

તથા $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\tan\theta & 0 \\ -\tan\theta & -1 & a\sec\theta \\ 0 & a\sec\theta & -a^2 \end{vmatrix}$

$= 1[a^2 - a^2\sec^2\theta] + \tan\theta[a^2\tan\theta]$

$= a^2(1 - \sec^2\theta + \tan^2\theta)$

$= a^2(1-1)$

$= 0$

$\therefore$ આપેલ સમીકરણ રેખાયુગ્મ દર્શાવે છે,

અને તેમનું છેદબિંદુ $(\alpha, \beta) = \left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$ પ્રમાણે,

$(\alpha, \beta) = \left(\frac{-a\sec\theta\tan\theta - 0}{-1 - \tan^2\theta}, \frac{0 - a\sec\theta}{-1 - \tan^2\theta}\right)$

$= \left(\frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sec^2\theta}, \frac{a\sec\theta}{\sec^2\theta}\right)$

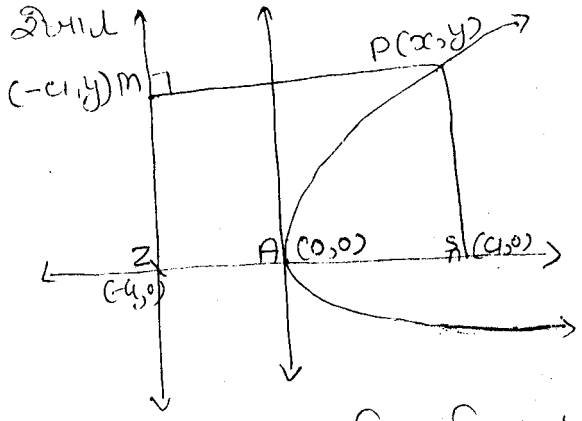
$= \left(\frac{a\sin\theta}{\cos\theta \cdot \sec\theta}, \frac{a}{\sec\theta}\right)$

$= (a\sin\theta, a\cos\theta)$

આમ, માંગેલ છેદબિંદુ $(a\sin\theta, a\cos\theta)$ છે.

પ્રશ્ન-3 (A)

$(y^2 = 4ax)$ પરવલય નું પ્રમાણિત સમીકરણ $a > 0$ માટે મેળવો.



નાભિ S અને નિયામિકા l લો આપેલા છે.

$\overline{SZ} \perp$ રેખા l દોરો.

$A = \overline{SZ}$ નું મધ્યબિંદુ $\Rightarrow AS = AZ$

A ને $(0,0)$ લઈએ, $\overrightarrow{A:S}$ ને x અક્ષ ની દિશા લેવામાં આવે છે.

$AS = ZA = a$ (ધારો) $a > 0$

S ના યામ $= (a,0)$, Z ના યામ $= (-a,0)$

$\Rightarrow$ રેખા l એ $(-a,0)$ માંથી પસાર થતી લંબરેખા થશે જેનું સમીકરણ $x = -a$ થાય,

ધારો કે $P(x,y)$ પરવલય પર આવેલું છે.

$\Rightarrow \overline{PM} \perp$ રેખા l દોરો

$\Rightarrow l$ ના યામ $= (-a,y)$ થાય.

$SP = PM$ હોવાથી

$SP^2 = PM^2$

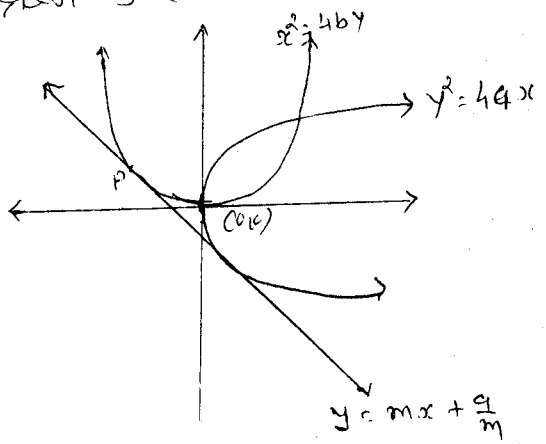
$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-0)^2 = (x+a)^2 + (y-1)^2$

$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$\Rightarrow y^2 = 4ax$ જે પરવલય નું પ્રમાણિત સમીકરણ થશે.

<20>

પ્રશ્ન-3 (A)-02



ધારીકે $y^2=4ax$ નો m ઢાળવાળો સ્પર્શક $y=mx+\frac{a}{m}$ એ $x^2=4by$ નો પણ સ્પર્શક છે.

$\Rightarrow y=mx+\frac{a}{m}$ અને $x^2=4by$ નો ઉકેલતા.

સમતુલ્ય હોય (એટલે કે તેમના સામાન્ય સમીકરણ નો એક અને માત્ર એકજ ઉકેલ મળે.)

તેમનું સામાન્ય સમીકરણ

$x^2=4b\left[mx+\frac{a}{m}\right]$

$\Rightarrow x^2=4bmx+\frac{4ab}{m}$

$\Rightarrow mx^2-4bm^2x-4ab=0$ ——— (1)

સમી. (1) માટે $\rightarrow Ax^2+Bx+C=0$ સ્વરૂપ

$A=(m)\quad B=(-4bm^2),\ C=(4ab)$

$\Delta=B^2-4AC=0$

$\Rightarrow 16b^2m^4-4(m)(-4ab)=0$

$\Rightarrow 16b^2m^4+16mab=0$

$\Rightarrow 16mb(bm^3+a)=0$

$\Rightarrow m=0$ અથવા $bm^3+a=0\quad (b\neq 0)$

$(m=0$ અશક્યતાથી$) \Rightarrow m^3=-\frac{a}{b}$

$\therefore m=\frac{(-a)^{\frac{1}{3}}}{(b)^{\frac{1}{3}}}=\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow$ માંગેલો સ્પર્શક $y = mx + \frac{a}{m}$

$\Rightarrow y = -\frac{(a)^{\frac{1}{3}}}{(b)^{\frac{1}{3}}}x + \frac{a(b)^{\frac{1}{3}}}{-(a)^{\frac{1}{3}}}$

$\Rightarrow y = -\frac{(a)^{\frac{1}{3}}x}{(b)^{\frac{1}{3}}} - (a)^{\frac{2}{3}}(b)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow (b)^{\frac{1}{3}}y = -(a)^{\frac{1}{3}}x - (a)^{\frac{2}{3}}(b)^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow (a)^{\frac{1}{3}}x + (b)^{\frac{1}{3}}y + (ab)^{\frac{2}{3}} = 0$

3 A-2 (1) $(1,3)$ માટે $y^2 - 8x = 9 - 8 = 1$

$y^2 - 8x > 0$

$\Rightarrow (1,3)$ માંથી $y^2 = 8x$ પરવલયને બે ભિન્ન સ્પર્શકો દોરી શકાય.

ધારીએ $(1,3)$ માંથી દોરેલા સ્પર્શક નો ઢાળ $= m$

$\Rightarrow y^2 = 8x$ નો m ઢાળવાળો સ્પર્શક $y = mx + \frac{a}{m}$

$4a = 8$
$a = 2.$

$\Rightarrow y = mx + \frac{2}{m}$

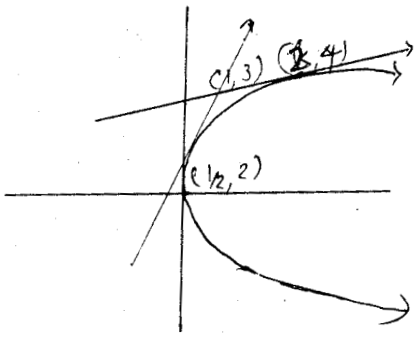
આ સ્પર્શક પર $(1,3)$ હોવાથી

$3 = m(1) + \frac{2}{m}$

$\Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$

$\Rightarrow (m-2)(m-1) = 0$

$\Rightarrow m = 2$ અથવા $m = 1$



માટે $m=2, a=2$

પરવલય $y=2x+\frac{2}{2}$

$y=2x+1$

પરવલયનું શિરોબિંદુ

$=\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

$=\left(\frac{2}{4}, \frac{4}{2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

માટે $m=1, a=2$

$y=x+\frac{2}{1}$

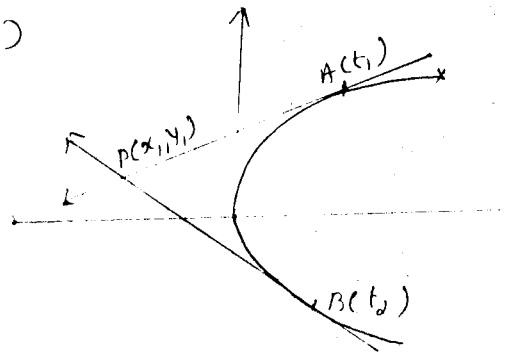
$y=x+2$

પરવલયનું શિરોબિંદુ $=\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

$=\left(\frac{2}{1}, \frac{4}{1}\right)$

$=(2,4)$

ઉકેલ-3 A (2)



ધારો કે $P(x_1, y_1)$ માંથી દોરેલા પરવલયને
બે ભિન્ન m_1 અને m_2 માટે $m_1 + m_2 = k$ (અચળ)
P. માંથી દોરેલા પરવલયને સ્પર્શતો
$A(t_1) = (at_1^2, 2at_1)$ અને
$B(t_2) = (at_2^2, 2at_2)$ માં
પરવલય છે.

$\overleftrightarrow{PA}$ = A $(t_1, 0)$ આગળને સ્પર્શક જેનું સમીકરણ

$y = \frac{x}{t_1} + at_1$

$\overleftrightarrow{PB}$ = B $(t_2, 0)$ આગળને સ્પર્શક જેનું સમીકરણ

$y = \frac{x}{t_2} + at_2$

$\Rightarrow$ P = A અને B આગળના સ્પર્શકનો છેદબિંદુ

$\Rightarrow$ P ના યામ $= (at_1t_2, a(t_1 + t_2))$ થાય.

$= (x_1, y_1)$

$\overleftrightarrow{PA}$ નો ઢાળ $= m_1 = \frac{1}{t_1}$

$\overleftrightarrow{PB}$ નો ઢાળ $= m_2 = \frac{1}{t_2}$

$m_1 + m_2 = k$

$\Rightarrow \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = k$

$\Rightarrow \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} = k$

$\Rightarrow a(t_1 + t_2) = a(k)\, t_1 t_2$

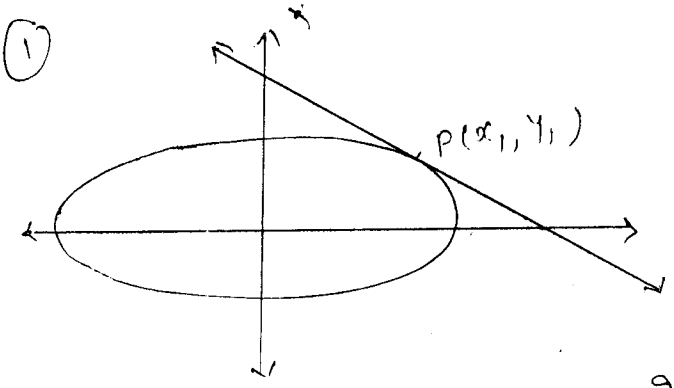
$\Rightarrow y_1 = kx_1$

$\Rightarrow$ P (x_1, y_1) માંથી દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ નો અચળકો $= k$ હોય તો

P (x_1, y_1) એ $y = kx$ રેખા પર હોય માંગેલ બિંદુ ગણ $= \{(x, y) / y = kx, k = \text{અચળ}\}$

Ans 3 B $m = \frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1}$

(1)



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $P(x_1, y_1)$ આપેલુ છે.

આપણ માટે $\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2 x}{a^2 y}$ થાય.

(1) જો $y_1 \neq 0$ માટે ઉપલબ્ધ પર આપેલા $P(x_1, y_1)$ આગળના સ્પર્શક ની ઢાળ

$= m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$

$\Rightarrow \boxed{m = \frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1}}$

$\Rightarrow$ માંગેલ સ્પર્શક $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - y_1 = \frac{-b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$

$\Rightarrow \frac{(y - y_1) y_1}{b^2} = -\frac{(x - x_1) x_1}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{y y_1 - y_1^2}{b^2} = -\frac{x x_1 + x_1^2}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$

$\Rightarrow \frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$

(જ્યાં $P(x_1, y_1)$ ઉપવલય પર હોવાથી

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$)

$y_1 = 0$ માટે સ્પર્શક $= (\pm a, 0)$ થાય.

$(-a, 0)$ આગળનો સ્પર્શક $x = -a$ }
અને $(a, 0)$ આગળનો સ્પર્શક $x = a$ }

$(x_1, y_1) = (-a, 0)$ લેતાં

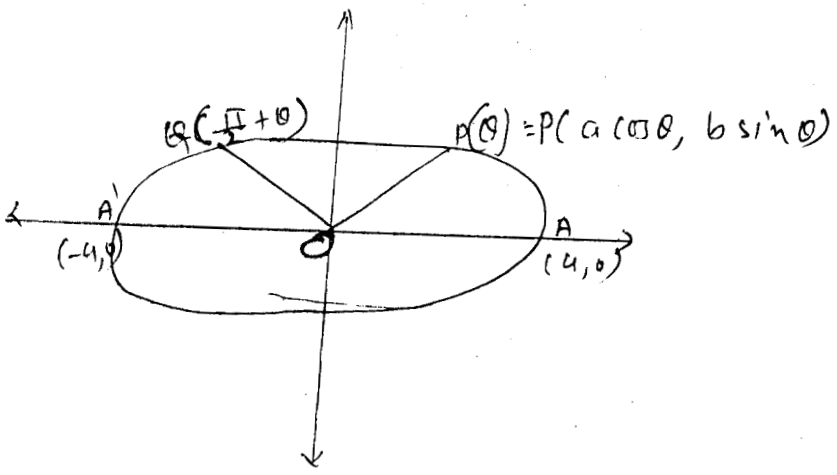
$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$ માં $x = -a$ સ્થાપતાં

$(x_1, y_1) = (a, 0)$ લેતાં $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$

$\Rightarrow$ ઉપવલય પર આવેલા $P(x_1, y_1)$ આગળનો
સ્પર્શક $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$ થાય.

પ્રશ્ન-3 (B)

(2)



ઉપવલય પર આવેલા P અને Q આગળના
ઉત્કેન્દ્રિક કોણનો તફાવત $\frac{\pi}{2}$ છે.

$\Rightarrow$ P ના યામ $= P(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$

Q ના યામ $= Q\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \left[a\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right), b\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$

$= (-a\sin\theta, b\cos\theta)$

$\hookrightarrow$ PQ નું $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\theta & b\sin\theta & 1 \\ -a\sin\theta & b\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow xb[\sin\theta - \cos\theta] - ya[\cos\theta + \sin\theta] + ab[\cos^2\theta + \sin^2\theta] = 0$

$\Rightarrow xb(\sin\theta - \cos\theta) - ya(\cos\theta + \sin\theta) + ab = 0$

$\hookrightarrow$ PQ નો x અંતઃખંડ $= c = -\frac{ab}{b(\sin\theta - \cos\theta)}$

$= \boxed{c = \frac{a}{\cos\theta - \sin\theta}}$ — (1)

$\overleftrightarrow{PQ}$ નો y અંતઃખંડ $= d = \dfrac{-ab}{-a(\cos\theta + \sin\theta)}$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{b}{\cos\theta + \sin\theta}} \quad \text{---(2)}$$

(1) & (2) પરથી

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{d}\right)^2 = (\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \sin\theta)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2} = 2[\cos^2\theta + \sin^2\theta]$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2} = 2$$

સાબિત થયું

પ્રશ્ન:3 (અ)

(2) $P(6,-4)$ માંથી $\left[\begin{matrix} x^2+4y^2=100 \\ \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1 \end{matrix}\right]$ પર આવેલું છે.

$\Rightarrow$ અહીં $a=10$, $b=5$

$\Rightarrow (6,-4) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$

$a\cos\theta = 6$ & $b\sin\theta = -4$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{6}{10}$ & $\sin\theta = \frac{-4}{5}$

$\tan\theta = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

(2) (ii) નાભિ $= (2,0)$ & પ્રધાનમાન અંતરાક્ષ $= 6$

$\Rightarrow (ae = 2)$

$\Rightarrow 3\times e = 2$

$\boxed{e = 2/3}$

$2a = 6$

$\Rightarrow \boxed{a = 3} \Rightarrow a^2 = 9$

$b^2 = a^2(1-e^2)$

$b^2 = 9\left(1-\frac{4}{9}\right) = 5$

$\Rightarrow$ માગેલ સમીકરણ $\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1}$

પ્રશ્ન:3 (c)

(1) જે અતિવલયના અનંત સ્પર્શકો વચ્ચેનો ખૂણો $\frac{\pi}{2}$ હોય તેવા અતિવલયને લંબાતિ વલય કહેવાય.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ના અનંત સ્પર્શકો

$y = \frac{b}{a}x$ & $y = -\frac{b}{a}x$

$\Rightarrow$ જો તે લંબાતિવલય હોય તો

તેના અનંત સ્પર્શકોના ઢોળનો ગુણાકાર $= -1$

$\Rightarrow \frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1$

$\Rightarrow a^2 = b^2$

$\Rightarrow$ માગ્યો લંબાતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

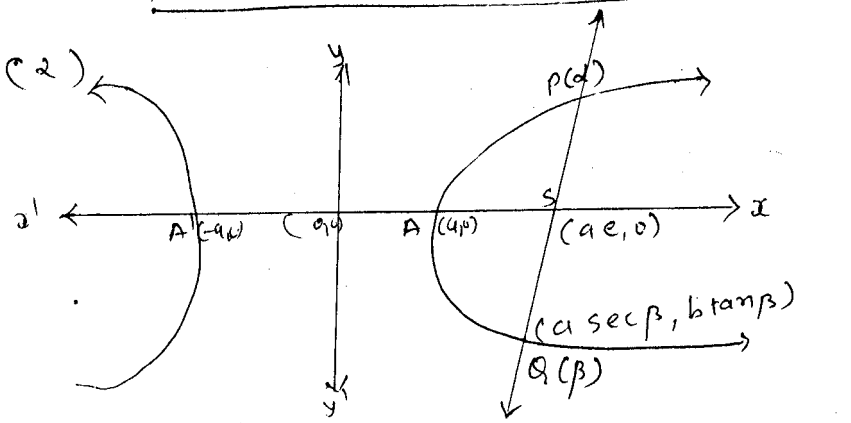
$\Rightarrow$ લંબાતિવલયનું સમીકરણ $\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$ થાય.

$b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$\Rightarrow e^2 - 1 = 1 \quad (a^2 = b^2)$

$\Rightarrow e^2 = 2 \Rightarrow e = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{લંબાતિવલયની ઉત્કેન્દ્રતા} = e = \sqrt{2}}$



$P \neq A, A'$

$Q \neq A, A'$

જો $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ અને $S(ae, 0)$ સમરેખ થાય,

તો $\begin{vmatrix} ae & 0 & 1 \\ a\sec\alpha & b\tan\alpha & 1 \\ a\sec\beta & b\tan\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow ab\begin{vmatrix} e & 0 & 1 \\ \sec\alpha & \tan\alpha & 1 \\ \sec\beta & \tan\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} e & 0 & 1 \\ \sec\alpha & \tan\alpha & 1 \\ \sec\beta & \tan\beta & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (a \neq 0, b \neq 0)$$

$$\Rightarrow e[\tan\alpha - \tan\beta] - 0[\sec\alpha - \sec\beta] + 1[\sec\alpha\tan\beta - \tan\alpha\sec\beta] = 0$$

$$\Rightarrow e\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right] + \left[\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\right] = 0$$

$$\Rightarrow e[\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta] = [\sin\alpha - \sin\beta]$$

$$\Rightarrow e[\sin(\alpha-\beta)] = (\sin\alpha - \sin\beta)$$

$$\Rightarrow e[\sin(\alpha-\beta)] = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \times e = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{1-e}{1+e}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{1-e}{1+e}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1-e}{1+e}}$$

પ્રશ્ન: 3 (D)

(1) $25x^2 - 144y^2 = -3600$

$\Rightarrow 3600 = 144y^2 - 25x^2$

$\Rightarrow 1 = \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144}$

$\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

$\Rightarrow$ ઉત્કેન્દ્રતા e માટે $a^2 = b^2(e^2-1)$

$\Rightarrow 144 = 25(e^2-1)$

$\Rightarrow \boxed{e = \frac{13}{5}}$

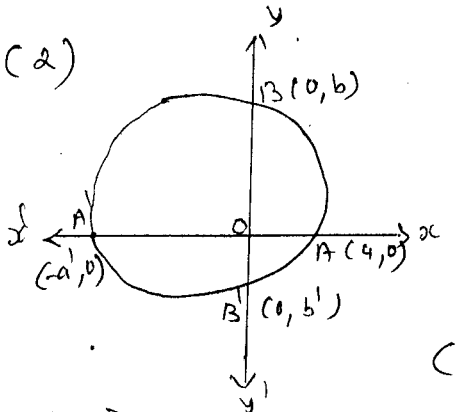
નાભિના યામ $= (0, \pm be) = (0, \pm 13)$

નાભિ લંબની લંબાઈ $= \frac{2a^2}{|b|} = \frac{288}{5}$

દિગાક્ષિકા ~~A છેદ~~ નું સમી. $y = \pm \frac{b}{e}$

$y = \pm \frac{25}{13}$.

(2)



A, B, A' & B' વર્તુળ પર આવેલા છે.

$\overleftrightarrow{AB}$ નું સમી. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\Rightarrow bx + ay - ab = 0$

$(x-a)(x-0) + (y-0)(y-b) = 0$

$\overleftrightarrow{AB}$ ને સમાવતા વર્તુળનું સમી+2બી

$x^2 + y^2 - ax - by = 0$

માંગેલું વર્તુળ એ $\overleftrightarrow{AB}$ અને $\overline{AB}$ ને સમાવતા વર્તુળોના છેદબિંદુઓમાંથી પસાર થાય છે.

જેનું સમી શ્રેણી

$\boxed{(x^2+y^2-ax-by) + \lambda(bx+ay-ab) = 0}$ — (1)

$A'(-a', 0)$ વર્તુળ પર હોવાથી

$(a')^2 + aa' + \lambda(-a'b + 0 - ab) = 0$

$\Rightarrow a'(a'+a) - b\lambda(a'+a) = 0$

$\Rightarrow (a'+a)(a' - b\lambda) = 0 \qquad a'+a \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{a'}{b}}$

એ જ રીતે $B(0, -b')$ પણ વર્તુળ પર હોવાથી

$\boxed{\lambda = \frac{b'}{a}}$ મળશે.

$\Rightarrow \frac{a'}{b} = \frac{b'}{a}$

$\Rightarrow aa' = bb'$

સમી. (1) માં $\left(\lambda = \frac{a'}{b}\right)$ અથવા $\boxed{\lambda = \frac{b'}{a}}$

મૂકીને સાદું રૂપ આપતાં

માગેલ વર્તુળનું સમીકરણ મળશે.

પૂર્તિ: 4 (અ) $(x+y)^2 = -\sqrt{2}(x-y)$

અહીં $a=1, b=1 \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ ખૂણો

પરીભ્રમણ આપતાં

$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \; y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ મળે $\; x+y = \sqrt{2}x'$, $x-y = -\sqrt{2}y'$

સમીકરણનું રૂપાંતર :

$\therefore 2x'^2 - 2y' = 0$

$\therefore x'^2 = y'$ જે પરવલયનું સમી. છે

$\therefore$ ઉત્કેન્દ્રતા $e = 1$ થાય. $a = 1 \therefore \frac{1}{4} = a$

માટે $(x', y') = (0, \frac{1}{4})$

હવે $(x, y) = \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{0-\frac{1}{4}}{\sqrt{2}}, \frac{0+\frac{1}{\sqrt{4}}}{\sqrt{2}}\right)$

$= \left(\frac{-1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$

નિયામિકા $y' = -4$

$y' = -\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{-x+y}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}$

$\therefore x - y = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ મળે.

અથવા

(અ)

(1) અહીં $a = b = 1$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ ખૂણો પરીભ્રમણ કરતાં $x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 10\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 18\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right) + 6\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) - 14 = 0$$

$\therefore -4x'^2 + 6y'^2 + 12\sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' - 14 = 0$

$\therefore 4\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 6\left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$

ઊગમબિંદુનું સ્થાનાંતર $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ આગળ કરતાં

નવા યામ $X = x' - \frac{3}{\sqrt{2}}$, $Y = y' - \frac{1}{\sqrt{2}}$ મુજબનો

$4x^2 - 6y^2 = 1$ જે અતિ વલય દર્શાવે છે.

(2) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 2 = 0$ માં $k = 0$ લેવાથી

યુગ્મવર્તી બનાવતાં

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 15$ ઊગમબિંદુને $(2, 3)$ પર મૂકેલું

જે વર્તુળ દર્શાવે છે. $x-2 = x'$, $y-3 = y'$ લેતાં

$x'^2 + y'^2 = 15$

પ્રશ્ન: 4 (ક)

(1) જો $\bar{x} = \bar{y}$ તો $|\bar{x}| = |\bar{y}|$ તથા $\bar{x} = 1 \cdot \bar{y}$ જ્યાં $k = 1 > 0$ હોવાથી $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા સમાન છે.

દ્વારા કે $\bar{x}, \bar{y} \in R^3$ માટે $|\bar{x}| = |\bar{y}|$ તથા $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ ની દિશા સમાન આપેલી છે.

$\therefore \bar{x} = k\bar{y}$ જ્યાં $k > 0$

$\therefore |\bar{x}| = |k\bar{y}|$

$\therefore |\bar{x}| = |k||\bar{y}|$

$\therefore |k| = 1 \quad \therefore k = \pm 1$

પરંતુ $k > 0$ હોવાથી $k = 1$

આમ $\bar{x} = \bar{y}$ સાબિત થયું

(2) અહીં $\bar{x}$, $\bar{y}$ તથા $\bar{z}$ અસમતલીય હોવાથી

$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ મળે.

હવે $l(\bar{x} + \bar{y}) + m(\bar{y} + \bar{z}) + n(\bar{z} + \bar{x}) = \bar{0}$

તો $l \neq 0, m = 0$, તથા $n = 0$ બતાવવું છે.

$\therefore l\bar{x} + l\bar{y} + m\bar{y} + m\bar{z} + n\bar{z} + n\bar{x} = \bar{0}$

$\therefore (l+m)\bar{x} + (l+m)\bar{y} + (m+n)\bar{z} = \bar{0}$

પરંતુ $\bar{x}$, $\bar{y}$ તથા $\bar{z}$ અસમતલીય હોવાથી

$l + n = 0, \quad l + m = 0, \quad m + n = 0$

$\therefore 2(l + m + n) = 0$

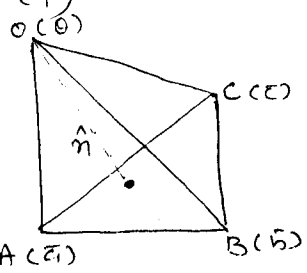
$\therefore l + m + n = 0$

$\therefore n = 0 \quad (\because l + m = 0)$

$m = 0 \quad l = 0$ આમ

$\bar{x} + \bar{y}$, $\bar{y} + \bar{z}$ તથા $\bar{z} + \bar{x}$ અસમતલીય છે.

(5) (1)



ધારો કે O-ABC ચતુષ્ફલક છે.
ધારો કે O(0) તથા A, B, C ના સ્થાન સદિશો $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ છે.
ΔABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

ધારો કે ΔABC ના સમતલ ને લંબ એકમ સદિશ $\hat{n}$ છે.

$\therefore$ ચતુષ્ફલકની ઊંચાઈ $= |\bar{a}$ નો $\hat{n}$ ની દિશામાં પ્રક્ષેપ$|$
$= |\vec{OA} \cdot \hat{n}|$

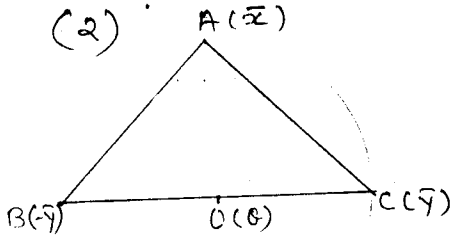
હવે ચતુષ્ફલક નું ઘનફળ $= \frac{1}{3}|\bar{a} \cdot \hat{n}| \cdot \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$
$= \frac{1}{6}|\bar{a} \cdot (\bar{b}-\bar{a}) \times (\bar{c}-\bar{a})|$

$\left(\because \hat{n} = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}\right)$

$= \frac{1}{6}|\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} + \bar{a} \times \bar{b})|$
$= \frac{1}{6}|\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})|$
$= \frac{1}{6}|[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]|$
$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ નો નિશાનાંક

વ્યાપક સ્વરૂપે O-ABC નું ઘનફળ
$= \frac{1}{6}|\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC})|$

(2)



ધારો કે O વર્તુળનું કેન્દ્ર BC વર્તુળનો વ્યાસ અને A અર્ધવર્તુળમાંનો ચાપીય બિંદુ છે.
ધારો કે O(0) ની સાપેક્ષ A($\bar{x}$), B($-\bar{y}$) અને C($\bar{y}$) છે.
$OA = OB = OC$ (ત્રિજ્યા) હોવાથી $|\bar{x}| = |\bar{y}|$ મળશે.

હવે, $\overrightarrow{BA} = \bar{x} + \bar{y}$, $\overrightarrow{AC} = \bar{y} - \bar{x}$ તથા

$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{y} - \bar{x})$

$= |\bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2 = 0 \quad (\because |\bar{y}| = |\bar{x}|)$

$\therefore \angle A = \frac{\pi}{2}$ આમ, અર્ધવર્તુળ નો અંતર્ગત ખૂણો કાટખૂણો છે.

પ્રશ્ન: 4 (5)

(i) અહીં હોડીનો વેગ $\bar{u} = 10\sqrt{2}\,i$ છે

પવનનો સાચો વેગ $\bar{v}$ હોયતો પવનનો હોડીને સાપેક્ષ વેગ $\bar{v} - \bar{u}$ થાય.

$\bar{v} - \bar{u} = 5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right) = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

$\therefore \bar{v} = (\bar{v} - \bar{u}) + \bar{u}$

$= \frac{-5}{\sqrt{2}}i + \frac{5}{\sqrt{2}}j + \frac{20}{\sqrt{2}}i$

$= \frac{15}{\sqrt{2}}i + \frac{5}{\sqrt{2}}j \quad = \left(\frac{15}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

$|\bar{v}| = \sqrt{\frac{225+25}{2}}$

$= \sqrt{\frac{250}{2}} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

પવનની દિશા $\theta = \cos^{-1} \frac{15/\sqrt{2}}{\sqrt{125}}$

$= \cos^{-1} \frac{15}{5\sqrt{10}}$

$= \cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{10}}$ પૂર્વ સાથે ઉત્તરમાં

(ii) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{(a,2)\cdot(a,-2)}{\sqrt{a^2+4}\,\sqrt{a^2+4}}$

$\frac{1}{2} = \frac{a^2-4}{a^2+4}$

$a^2 + 4 = 2a^2 - 8$

$a^2 = 12$

$a = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

પ્રશ્ન: 5 (અ)

(1) બંને રેખાઓ સમાંતર તથા એટલે $\bar{l} \times \bar{m} \neq 0$

દ્વારકે રેખાઓ પરસ્પર $C(\mathbb{C})$ માં છેદે છે.

એટલે કે $\bar{c}$ એ બંને રેખાઓનો સામાન્ય બિંદુ થશે.

આમ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ એવા અનેક જ રેખા

$\bar{c} = \bar{a} + k_1\bar{l}$ અને $\bar{c} = \bar{b} + k_2\bar{m}$

$\therefore \bar{a} - \bar{b} = k_2\bar{m} - k_1\bar{l}$

$\therefore (\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = (k_2\bar{m} - k_1\bar{l}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 0$

આમ, રેખાઓ પરસ્પર છેદે તે માટેની આવશ્યક શરત $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 0$ થશે.

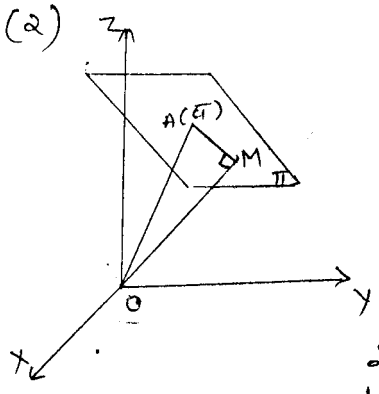
જો $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$\bar{l} = (l_1, l_2, l_3)$ $\bar{m} = (m_1, m_2, m_3)$ લઈએ તો

$(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 0$ તો $\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$

સ્વરૂપમાં પણ દર્શાવી શકાય. આ કાર્તેઝીય સ્વરૂપમાં આવશ્યક શરત છે.

(2)



દ્વારકે $A(\bar{a})$ સમતલ Π નું કોઈપણ બિંદુ છે. O માંથી સમતલ પર $\overline{OM} \perp \Pi$ છે. જ્યાં $OM = p$ આપેલું છે તથા સમતલ પર લંબ એકમ સદિશ

$\hat{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

જ્યાં $\overrightarrow{OA}$ ના $\hat{n}$ ની દિશામાં પ્રક્ષેપનું માપ $= p$

$\bar{a}$ તથા $\hat{n}$ વચ્ચેનો ખૂણો લઘુકોણ લઈએ

$\therefore \bar{a} \cdot \hat{n} = p$.

હવે $A(\bar{a})$ માંથી પસાર થતા અને $\hat{n}$ અભિલંબ વાળા સમતલનું સમીકરણ $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = 0$ એટલે કે

$\bar{r} \cdot \bar{n} = \bar{a} \cdot \bar{n}$ છે

$\therefore \bar{r} \cdot \bar{n} = p$ આપેલા સમતલનું સદિશ સમીકરણ થશે.

$\bar{r} = (x, y, z)$ બૂકતાં સમતલનું કાર્તેઝીય સમીકરણ $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ સ્વરૂપમાં આપશે.

અથવા

(2) ધારોકે $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$, $k \in R$ અને $\bar{r} = \bar{b} + k\bar{m}$, $k \in R$ એ સમતલ Π ની દ્વિદિક રેખાઓ છે

$\therefore (\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 0$

હવે સમતલ $(\bar{r} - \bar{a}) \cdot \bar{n} = 0$ માં $\bar{n} = \bar{l} \times \bar{m}$ લઈએ તો $\bar{n} \neq 0$

$(\bar{r} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 0$ સમતલ આપેલી રેખાઓને સમાવતું સમતલ છે તે સાબિત કરીએ.

અહીં $\bar{r} = \bar{a} + k\bar{l}$ બૂકતાં

$(\bar{r} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = k\bar{l} \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 0$ અને

$\bar{r} = \bar{b} + k\bar{m}$ બૂકતાં

$(\bar{r} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = (\bar{b} - \bar{a} + k\bar{m}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m})$

$= (\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) + k\bar{m} \cdot (\bar{l} \times \bar{m})$

$= 0 + 0 = 0$

સમતલના કાર્તેઝીય સમીકરણ

$(\bar{r} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = 0$ માંથી

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$ થશે.

જ્યાં $\bar{l} = (l_1, l_2, l_3)$, $\bar{m} = (m_1, m_2, m_3)$

(અ)

(1) ધારોકે R^3 માં ગોલકના કોઈ એક વ્યાસ ના અંત્યબિંદુઓ $A(\bar{a})$ અને $B(\bar{b})$ છે.

ધારોકે $P(\bar{r})$ ગોલક પરનું કોઈ એક બિંદુ છે

અહીં $\overline{AB}$ વ્યાસ છે અટલે બિંદુ $P (P \neq A, B)$ ગોલક પર છે $\iff m\angle APB = \frac{\pi}{2}$

$\iff \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$

$\iff \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$

$\iff (\bar{r} - \bar{a}) \cdot (\bar{r} - \bar{b}) = 0$

વ્યાપક ગોલકનું સદિશ સમીકરણ

$(\bar{r}-\bar{a})\cdot(\bar{r}-\bar{b})=0$

અહીં $\bar{r}=(x,y,z)$, $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$

બૂકનાં ગોલકનું કાર્તેઝીય સમીકરણ

$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)\cdot(x-x_2, y-y_2, z-z_2)=0$

એટલે કે $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+$
$(z-z_1)(z-z_2)=0$ સ્વરૂપનાં આપશે.

વળી, $\because$ P=A તથા B નાં P ના યામ =ના

સમીકરણનું સમાધાન કરશે જ.

(2) અહીં રેખાના કાર્તેઝીય સમીકરણ પરથી

$\bar{r}=(7,8,7)+k(4,3,2)$, $k\in R$

$\therefore \bar{a}=(7,8,7)$, $\bar{l}=(4,3,2)$, $\bar{P}=(2,9,5)$

હવે, $\overrightarrow{AP}=\bar{P}-\bar{a}=(2,9,5)-(7,8,7)=(-7,1,-2)$

તથા $|\bar{l}|=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}$

વળી $|\bar{l}|=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}$

વળી $\hat{l}=\left(\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$

તેથી $\overrightarrow{AP}\times\hat{l}=\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -7 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{29}}(8,6,-25)$

$\therefore$ બિંદુનું રેખાથી લંબ અંતર $|\overrightarrow{AP}\times\hat{l}|=$

$=\frac{1}{29}\sqrt{64+36+625}$

$=\sqrt{\frac{725}{29}}=\sqrt{25}$

$=5$ એકમ

અથવા

(2) દ્વારા કે $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{1}=m$ જ્યાં $m\in R$

તેથી રેખા પરનું બિંદુ $(m+3, -m-2, m+1)$ —(1)

વળી દ્વારા કે $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+3}{3}=n$ જ્યાં $n\in R$

તેથી રેખા પરનું બિંદુ $(2n, -1, 3n-3)$ —(2)

હવે જો રેખાઓ છેદતી ન હોય તેમ કહેવા માટે કે
$(m+3, -m-2, m+1) = (2m, -1, 3m-3)$
એટલે કે $m+3 = 2m$ $\therefore m-2m = -3$ ——(3)
$-m-2 = -1$ $\therefore m = -1$ ——(4)
$m+1 = 3m-3$ $m-3m = -4$ ——(5)
હવે, સમીકરણ (4) માંથી $m=-1$ સમી. (3) માં મૂકતાં $m=1$ મળે તથા m ના બે કિંમતો સમીકરણ (5) માં મૂકતાં સમીકરણ (5) નું સમાધાન થાય છે તેથી બંને રેખાઓ પરસ્પર છેદે છે. m ની કિંમત સમીકરણ (1) માં મૂકતાં છેદબિંદુ $(2, -1, 0)$ મળે.

(8)
(1) અહીં $A(2, 1, -5)$, $B(3, 2, -6)$, $C(8, 7, -11)$ છે
હવે $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (5, 5, -5)$
$\overrightarrow{CA} = (-6, -6, 6)$
$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ ના દિક્ગુણોત્તરો $1:1:-1$ છે
$\overrightarrow{BC}$ ના દિક્ગુણોત્તરો $1:1:-1$ છે
$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{BC}$ સમરેખ છે
$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ અને $\overrightarrow{BC}$ સમરેખ છે તેથી A, B, C સમરેખ છે

હવે, ધારોકે B, $\overleftrightarrow{AC}$ નું A તરફથી λ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે
$\therefore$ B નો x યામ $3 = \frac{\lambda(8)+2}{\lambda+1}$
$\therefore 3\lambda+3 = 8\lambda+2$
$\therefore 5\lambda = 1$
$\therefore \lambda = \frac{1}{5}$
એટલે B, $\overleftrightarrow{AC}$ નું A તરફથી $1:5$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

(2) આપેલ સમીકરણ $x^2+y^2+z^2-x-\frac{2}{3}y-2z-22=0$ ને $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ સાથે સરખાવતાં

$u=-\frac{1}{2}$, $v=-\frac{1}{3}$, $w=-1$, $d=-22$

હવે $u^2+v^2+w^2-d=\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}-\frac{21}{5}=\frac{-14}{20}<0$

∴ આપેલ સમીકરણ વાસ્તવિક દર્શાવતું નથી.

(5) અહીં સમીકરણો $3x+y-z=0$ અને $x+2y+3z=5$ પરિવર્તે

$(x,y,z)\cdot(3,1,-1)=0$ અને

$(x,y,z)\cdot(1,2,3)=5$ બંને સમતલના સમીકરણ $\bar{r}\cdot\bar{n}=d$ સાથે સરખાવતાં

$\bar{n_1}=(3,1,-1)$ અને $\bar{n_2}=(1,2,3)$ આપેલ સમતલ $\bar{n_1}$ અને $\bar{n_2}$ ને સમાવે છે તથા $\bar{a}=(1,3,5)$ આંક પસાર થાય છે.

માંગેલ સમતલનું સમીકરણ $(\bar{r}-\bar{a})\cdot(\bar{n_1}\times\bar{n_2})=0$

હવે $\bar{n_1}\times\bar{n_2}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\3&1&-1\\1&2&3\end{vmatrix}=5\bar{i}-10\bar{j}+5\bar{k}$

$=5(1,-2,1)$

હવે $(\bar{r}-\bar{a})\cdot(\bar{n_1}\times\bar{n_2})=0$

$\Rightarrow 5(x-1,y-3,z-5)\cdot(1,-2,1)=0$

$\Rightarrow x-1-2y+6+z-5=0$

$\Rightarrow x-2y+z=0$

જે માંગેલ સમતલનું સમીકરણ છે.

અથવા

(5) $A(1,1,1)$ સમતલ $4x+3y+z+1=0$ નું સમાધાન કરતું નથી તેથી A બિંદુ આ સમતલ પર નથી

∴ $4x+3y+z+1=0$ માંગેલ સમતલ નથી.

હવે, સમતલો $x+2y+3z=4$ અને $4x+3y+z+1=0$

જો છેદ રેખામાંથી પસાર થતું માંગેલ સમતલ

$x + 2y + 3z - 4 + \lambda(4x + 3y + 2z + 1) = 0$ જે

$A(1,1,1)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore 1 + 2 + 3 - 4 + \lambda(4 + 3 + 1 + 1) = 0$

$\therefore \lambda = -\frac{2}{9}$ $\therefore$ માંગેલ સમતલનું સમીકરણ

$(x + 2y + 3z - 4) - \frac{2}{9}(4x + 3y + 2z + 1) = 0$

$\therefore x + 12y + 25z = 38$