પ્રશ્નપત્ર : 5

ગણિત-1 (050)

પ્રશ્ન-1 (અ)

(1) R^2 માં અંતરસૂત્ર મેળવો તથા અંતરસૂત્રનાં ગુણધર્મો જણાવો. (3)

(2) $\overline{AB}$ નાં ત્રિભાગબિંદુઓ (1, 2) અને (-2, 8) હોય તો A અને B નાં યામ મેળવો. (1)

(બ) કોઈ પણ બે ગણો. (4)

(1) $\triangle ABC$ માં D, $\overline{BC}$ નું મધ્યબિંદુ હોય તો સાબિત કરો કે $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

(2) A (1, -2) અને B (-3, 4) ને જોડતાં રેખાખંડને n એકરૂપ ભાગમાં વિભાગતાં બિંદુઓનાં યામ શોધો. જો n = 10 હોય અને A તરફથી r માં બિંદુના યામ $(-9/5, b)$ હોય તો r અને b શોધો.

(3) (5, 2), (3, 6), (2, 4) એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ હોય તો, ચોથા શિરોબિંદુના યામ મેળવો.

(ક) કોઈ પણ બે ગણો. (4)

(1) રેખાઓ $3x + y + 4 = 0$, $3x + 4y - 15 = 0$ અને $24x - 7y - 3 = 0$ કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓને સમાવતી રેખાઓ હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ છે. તેમ સાબિત કરો.

(2) એક ચોરસનાં પાસપાસેનાં શિરોબિંદુઓ (-1, 3) અને (2, -1) છે. તો ચોરસનાં અન્ય શિરોબિંદુઓના યામ શોધો.

(3) $P(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $Q(a\cos\beta, \sin\beta)$ બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાનું સમી.

$$\frac{x}{a}\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{y}{b}\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$ છે.

તેમ સાબિત કરો.

(ક) સમક્ષિતિજ કે શિરોલંબ ન હોય તેવી રેખાનું કાર્તેઝીય સમી. મેળવો. (3)

પ્રશ્ન-2 (અ)

(1) R^2 માં વ્યાપક સમપરિમાણ સિદ્ધાંત સમી. $ax^2+2hxy+by^2=0$, $a^2+b^2+h^2\neq 0$ બે રેખાઓ દર્શાવે તે માટેની શરત મેળવો. (3)

(2) રેખાઓ $x=2$ અને $x-y+5=0$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો. (1)

(બ)

(1) લંબછેદી વર્તુળોની વ્યાખ્યા આપો. તથા બે વર્તુળો, લંબછેદી હોવા માટેની આવશ્યક શરતો મેળવો. (2)

(2) $4x-8y+10=0$ અને $2x-4y+5=0$ નો છેદગણ શોધો. (1)

(3) $2x+ky-5=0$, $4x-y-3=0$ અને $kx-y-2=0$ રેખાઓ સંગામી હોય તો k શોધો. (1)

(ડ)

(1) રેખા $y = mx$ ના વર્તુળ $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ સાથેનાં છેદબિંદુઓ જેનાં વ્યાસાંત બિંદુઓ હોય તેવા વર્તુળનું સમીકરણ શોધો. (3)

અથવા

(1) વર્તુળની બહારના બિંદુ P માંથી વર્તુળને દોરેલી સ્પર્શક રેખાઓ પરસ્પર લંબ હોય તો P નો બિંદુગણ શોધો.

(2) વર્તુળ $x^2 + y^2 = 25$ ને (3, 4) બિંદુએ સ્પર્શક તથા અભિલંબના સમીકરણ મેળવો. (1)

(ડ) $3x + 4y - 8 = 0$ થી 3 એકમ દૂર આવેલાં રેખા $3x - 2y - 2 = 0$ પરનાં બિંદુઓ શોધો. (3)

અથવા

(ડ) ત્રિકોણની બાજુઓને સમાવતી રેખાઓનાં સમીકરણો $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ અને $x = 0$ છે. આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (3)

પ્રશ્ન-3 (અ)

(1) રેખા $y = mx + c$ એ પરવલયની સ્પર્શક બને તેની શરત તથા સ્પર્શબિંદુઓના નામ મેળવો. (2)

(2) પરવલયનાં બિંદુઓ $P(t_1)$, $Q(t_2)$ અને $R(t_3)$ છે. ΔPQR નું ક્ષેત્રફળ $a^2 |(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)|$ છે એમ બતાવો. (2)

અથવા

(2) રેખા $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ પરવલય $y^2 = 4ax$ને સ્પર્શે તે માટેની શરત મેળવો.

(બ)

(1) ઉપવલયના નાભિઓ S અને S' હોય અને P ઉપવલય પરનું બિંદુ હોય તો સાબિત કરો કે $SP + S'P = 2a$ (2)

(2) ઉપવલય $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ના કોઈપણ બિંદુ P આગળના સ્પર્શકનું નાભિ S થી લંબઅંતર p હોય તો સાબિત કરો કે

$SP = \frac{2ap^2}{b^2+p^2}$ (2)

અથવા

(2) ઉપવલયના નાભિ S માંથી પસાર થતી જીવા $\overline{PQ}$ છે. તથા $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ હોય તો બતાવો કે (1) $SP \cdot S'P = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$

(2) $\Delta S'PQ$ ની પરિમિતિ અચળ છે.

(ક)

(1) અતિવલયનાં બિંદુ (x_1, y_1) આગળના સ્પર્શકનું સમી. મેળવો. (2)

(2) રેખા $21x + 5y = 116$ અતિવલય $7x^2 - 5y^2 = 232$ને સ્પર્શે છે. તેમ બતાવો. (2)

(ડ)

(1) શીર્ષ $(-4,0), (4,0)$ અને અનંત સ્પર્શકો $y = \pm\frac{5}{4}x$ માટે અતિવલયનું સમી. મેળવો (1)

(2) વર્તુળો $x^2+y^2+2gx+a^2=0$ અને $x^2+y^2+2fy+a^2=0$ પરસ્પર બહારથી સ્પર્શતા બતાવો કે $g^{-2}+f^{-2}=a^{-2}$. (2)

પ્રશ્ન- 4 (અ)

$7x^2-2xy+12\sqrt{2}x-36\sqrt{2}y+72=0$ વડે કયા વક્રનું નિરૂપણ થાય છે? વક્રના નાભિ, નિયામિકા, અક્ષોની લંબાઈ, તથા કેન્દ્રના યામ શોધો. ઉત્કેન્દ્રતા શોધો (4)

<u>અથવા</u>

નીચેનાં વક્રોના સમીકરણોને પ્રામાણિત રૂપમાં ફેરવીને ઓળખો. (4)

(1) $x^2 - 8x + 8y + 11 = 0$

(2) $xy = 6$

(બ)

(1) R^2નાં બે સદિશો સમાન હોય તો તેમના માન તથા દિશા સમાન થાય તેમ સાબિત કરો. (2)

(2) એ કોઈ સદીશ જે, X અને Y-અક્ષ સાથે અનુક્રમે $\pi/4$ અને $\pi/3$ ના માપના ખૂણા બનાવે તો તે Z- અક્ષ સાથે કેટલા માપનો ખૂણો બનાવશે તે શોધો. (2)

(ક)

(1) પ્રચલીત સંકેતોમાં R^2 તથા R^3ના સદિશો માટે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ તારવો. (2)

(2) $\triangle ABC$ નું મધ્યકેન્દ્ર G છે. P એ $\triangle ABC$ના સમતલનું બિંદુ છે. તો $\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}=3\vec{PG}$ સાબિત કરો. ($P \neq A, B, C, G$) (2)

(5)

(1) એક કણ ઉપર $2\sqrt{10}$ એકમ બળ $3\bar{i}-\bar{j}$ ની દિશામાં અને $3\sqrt{13}$ એકમનું બળ $2\bar{i}+3\bar{j}$ ની દિશામાં લગાડતાં તેનું સ્થાનાંતર A(1,2) થી B(6,4) સુધી થતું હોય તો થયેલ કાર્ય શોધો. (2)

(2) જો $\bar{x}=\bar{i}+\bar{j}$, $\bar{y}=t\bar{i}-\bar{j}$ વચ્ચેનો ખૂણાનું માપ $3\pi/4$ છે. તો t શોધો (1)

પ્રશ્ન-5 (અ)

(1) અવકાશનાં ભિન્ન બિંદુઓ $A(\bar{a}), B(\bar{b}), C(\bar{c})$ સમરેખ હોય તો અને તો જ શૂન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ l, m, n મળે કે જેથી $l\bar{a}+m\bar{b}+n\bar{c}=\theta$ અને $l+m+n=0$ (2)

(2) સમાંતર રેખાઓ $\bar{r}=\bar{a}+k\bar{l}$ $k \in R$ અને $\bar{r}=\bar{b}+k\bar{l}, k \in R$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો. (2)

(બ)

(1) સમીકરણ $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ ગોલક દર્શાવે તે માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત મેળવો તથા તેના કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા મેળવો. (1)

(2) રેખાઓ $\frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5}$ અને $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-9}{-3}$ વચ્ચેનું લઘુત્તમ અંતર શોધો. (3)

અથવા

(2) રેખાઓ $x-1 = y+2 = z-3$ અને $x-2 = y+3 = z-5$ વચ્ચેનું ~~લઘુ~~ લંબઅંતર શોધો. (3)

(ક)

(1) (1, 1, 3) (4, 3, 2) (5, 2, 7) (6, 4, 8) શિરોબિંદુઓ વાળા ચતુષ્ફલકનું ઘનફળ શોધો. (2)

(2) (2, −1, 2) માંથી સમતલ $2x-3y+4z=44$ પરના લંબની લંબાઈ તથા લંબરેખાનું સમી. મેળવો (2)

(3) A (1, 0, −1) B (−1, 1, 0) C (0, −1, 1) બિંદુઓમાંથી પસાર થતા ગોલકનું સમીકરણ શોધો જેનું કેન્દ્ર સમતલ ABC પર હોય. (3)

અથવા

(3) (1, 2, 3) અને (3, −1, 2) બિંદુઓમાંથી પસાર થતા અને સમતલ $x+3y+2z=7$ ને લંબ સમતલનું સમી. શોધો. (3)

જવાબો

પ્રશ્નપત્ર -૫

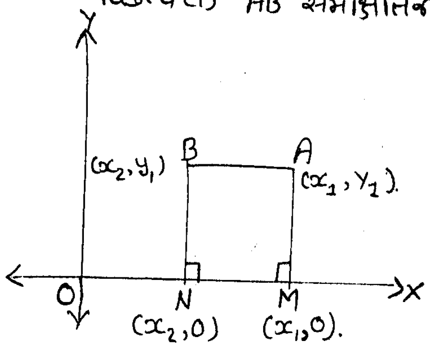
પ્ર: 1 (અ)

(1) R^2 માં અંતર સૂત્ર:

ધારોકે $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \in R^2$ છે.

અહીં બે સાપેક્ષ $\overline{AB}$ ના સ્થાન માટે ત્રણ વિકલ્પો

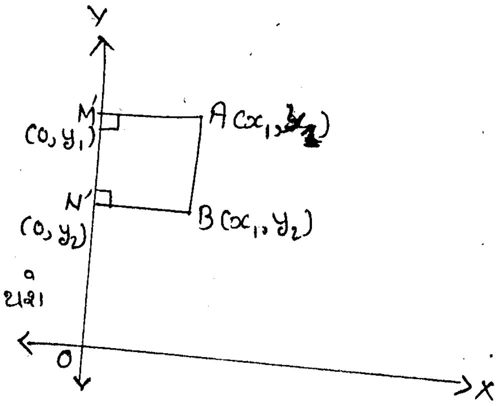
વિકલ્પ (1) $\overline{AB}$ સમક્ષિતિજ છે.



AB માંથી X-અક્ષ પર લંબપાદ અનુક્રમે M અને N છે. M, N ના યામ અનુક્રમે $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ થશે

અહીં $AB = MN$

$= |x_1 - x_2|$



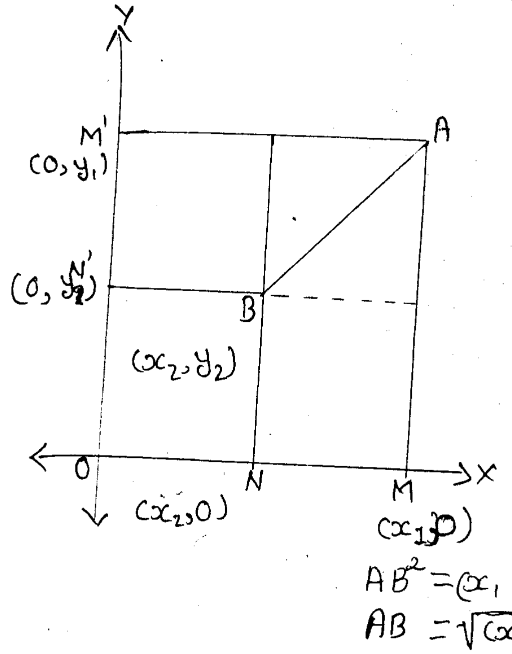
વિકલ્પ 2. $\overline{AB}$ શિરોલંબ છે.

A, B માંથી Y-અક્ષ પર લંબપાદ અનુક્રમે M', N' મેળવો. M', N' ના યામ અનુક્રમે $(0, y_1)$, $(0, y_2)$ થશે

અહીં $AB = M'N'$

$= |y_1 - y_2|$

વિકલ્પ 3. $\overline{AB}$ સમક્ષિતિજ કે શિરોલંબ નથી.



A અને B માંથી X-અક્ષ પરનાં લંબપાદ અનુક્રમે M અને N છે Y-અક્ષ પરનાં લંબપાદ અનુક્રમે M' અને N' છે. B માંથી $\overline{AM}$ પરનો લંબપાદ C છે. M, N, M', N' અને C ના યામ અનુક્રમે $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(0, y_1)$, $(0, y_2)$ અને (x_1, y_2) મળશે

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \text{—} (X)$$

વધુમાં $\overline{AB}$ સમક્ષિતિજ હોય ત્યારે $y_1 = y_2$ અને $\overline{AB}$ શિરોલંબ હોય ત્યારે $x_1 = x_2$ થાય.

∴ ⓧ અંતર સૂત્ર છે.

R^2 ના અંતર સૂત્રનાં ગુણધર્મો:

પ્રત્યેક $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3) \in R^2$ માટે

(i) $d(A,B) \geq 0$

(ii) $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

(iii) $d(A,B) = d(B,A)$

(iv) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$

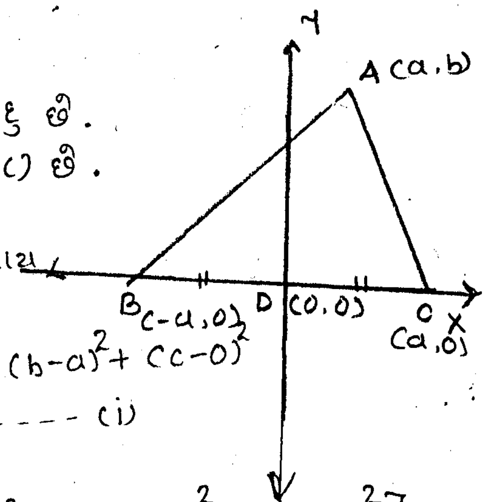
પ્ર: 1 (બ)

(1) ΔABC માં D, $\overline{BC}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

ધારો કે $D(0,0)$ છે. અને $A(b,c)$ છે.

$BD = CD = a \quad (a \neq 0)$

∴ $B(-a, 0)$, $C(a, 0)$ થાય.



હવે $AB^2 + AC^2$

$= (b+a)^2 + (c-0)^2 + (b-a)^2 + (c-0)^2$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2)$ ------ (i)

તથા $2[AD^2 + BD^2]$

$= 2[(b-0)^2 + (c-0)^2 + (-a-0)^2 + (0-0)^2]$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2)$ ------ (ii)

(i) અને (ii) પરથી

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

(2) ⟶ $A(1,-2)$ અને $B(-3,4)$ ને જોડતાં રેખાખંડ નાં n એકરૂપ ભાગ કરતાં બિંદુઓ અનુક્રમે $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$ છે.

અહીં P_r બિંદુ $\overline{AB}$ નું A તરફ થી $r : (n-r)$ ગુણોત્તર માં વિભાજન કરશે.

∴ P_r ના યામ $= \left[\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right]$

$= \left[\dfrac{r(-3) + (n-r)(1)}{r+n-r}, \dfrac{r(4) + (n-r)(-2)}{r+n-r}\right]$

$$= \left[\frac{n-4r}{n}, \frac{6r-2n}{n}\right] \quad r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n-1$$

અહીં $n = 10$ અને r માં બિંદુ P_r ના યામ $(-\frac{9}{5}, b)$ છે.

$\therefore -\frac{9}{5} = \frac{n-4r}{n}$

$\therefore -\frac{9}{5} = \frac{10-4r}{10}$

$\therefore -18 = 10 - 4r$

$4r = 28$

$\boxed{r = 7}$

$b = \frac{6r-2n}{n}$

$= \frac{6(7)-20}{10}$

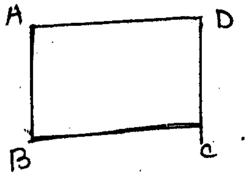
$= \frac{22}{10}$

$\boxed{b = \frac{11}{5}}$

(3) ⟶ $A(5,2)$, $B(3,6)$, $C(2,4)$ આપેલા બિંદુઓ છે.

વિકલ્પ (i) જો $\square ABCD$ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ હોય તો $\overline{AC}$ નું મધ્યબિંદુ = $\overline{BD}$ નું મધ્યબિંદુ

$\therefore \left(\frac{7}{2}, \frac{6}{2}\right) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{6+y}{2}\right)$

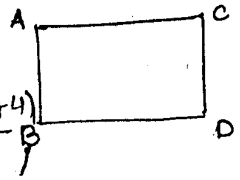


$\therefore 7 = 3 + x \qquad 6 = 6 + y$

$\boxed{x = 4} \qquad \boxed{y = 0}$

$\therefore$ ચોથા શિરોબિંદુ $\boxed{D \text{ ના યામ } (4, 0)}$

⟶ વિકલ્પ (ii) $\square ABDC$ સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ હોય તો, $\overline{AD}$ નું મધ્યબિંદુ = $\overline{BC}$ નું મધ્યબિંદુ



$\therefore \left(\frac{x+5}{2}, \frac{2+y}{2}\right) = \left(\frac{3+2}{2}, \frac{6+4}{2}\right)$

$\therefore x + 5 = 5 \quad , \quad 2 + y = 10$

$\therefore \boxed{x = 0} \qquad \therefore \boxed{y = 8}$

$\therefore \boxed{D \text{ ના યામ } (0, 8)}$

⟶ વિકલ્પ (iii) માટે $\square ACBD$ સમાંતરબાજુ હોય તો $\overline{AB}$ નું મધ્યબિંદુ = $\overline{CD}$ નું મધ્યબિંદુ

$= \left[\frac{5+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right] = \left[\frac{2+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right]$

$\therefore 8 = 2 + x$ $\qquad$ $8 = 4 + y$

$\therefore x = 6$ $\qquad$ $y = 4$

$\therefore$ **D ના યામ = (6, 4)**

[8] (1) રેખાઓ $3x + y + 4 = 0$, $3x + 4y - 15 = 0$ અને $24x - 7y - 3 = 0$ કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓને સમાવતી રેખા હોય તો આ ત્રિકોણ સમદ્વિભુજ છે એમ સાબિત કરો.

$l_1 : 3x + y + 4 = 0$ નો ઢાળ $= \frac{-3}{1} = -3$

$l_2 : 3x + 4y - 15 = 0$ નો ઢાળ $= \frac{-3}{4}$

$l_3 : 24x - 7y - 3 = 0$ નો ઢાળ $= \frac{24}{7}$

l_1 અને l_2 વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $= \tan^{-1}\left|\frac{-3 + \frac{3}{4}}{1 + 3\left(\frac{3}{4}\right)}\right|$

$= \tan^{-1}\frac{9}{13}$

l_2 અને l_3 વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $= \tan^{-1}\left|\frac{-\frac{3}{4} - \frac{24}{7}}{1 - \frac{3}{4}\left(\frac{24}{7}\right)}\right|$

$= \tan^{-1}\frac{117}{44}$

l_3 અને l_1 વચ્ચેના ખૂણાનું માપ $= \tan^{-1}\left|\frac{\frac{24}{7} + 3}{1 - \frac{24}{7}(3)}\right|$

$= \tan^{-1}\frac{9}{13}$

ત્રિકોણના બે ખૂણાઓના માપ સમાન છે.

$\therefore$ ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

(2) → અહીં A(−1, 3) અને B(2, −1)

$AB = 5$

$\overleftrightarrow{AB}$ નો ઢાળ $= \frac{-1-3}{2+1} = -\frac{4}{3}$.

$\overleftrightarrow{AD}$ નો તેમજ $\overleftrightarrow{BC}$ નો ઢાળ $= \frac{3}{4}$

$\therefore \tan\theta = \frac{3}{4}$ $\therefore \sin\theta = \frac{3}{5}$ અને

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

(i) A (-1, 3) થી 5 એકમ અંતરે આવેલાં બિંદુના યામ,

$= (-1 \pm 5(\frac{4}{5}), 3 \pm 5(\frac{3}{5}))$

$= (-1 \pm 4, 3 \pm 3)$

$= \boxed{(3, 6) \text{ અને } (-5, 0)}$

(ii) B (2, -1) થી 5 એકમ અંતરે આવેલાં બિંદુના યામ,

$= [2 \pm 5(\frac{4}{5}), -1 \pm 5(\frac{3}{5})]$

$= (2 \pm 4, -1 \pm 3)$

$= \boxed{(6, 2) \text{ અથવા } (-2, -4)}$

<3> ⟶ P (a cos α, b sin α) અને Q (a cos β, b sin β) માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\alpha & b\sin\alpha & 1 \\ a\cos\beta & b\sin\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore x(b\sin\alpha - b\sin\beta) - y(a\cos\alpha - a\cos\beta) +$
$(ab\cos\alpha \cdot \sin\beta - a\sin\alpha \cdot \cos\beta) = 0.$

$\therefore bx(\sin\alpha - \sin\beta) - ay(\cos\alpha - \cos\beta) -$
$ab\sin(\alpha - \beta) = 0$

$\therefore bx\left[2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] - ay\left(-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$

$= ab\left(2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$

$\therefore bx\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + ay \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = ab\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\therefore \frac{x}{a}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$

[S] ⟨1⟩ ⟶ કોઈ પણ રેખાનું કાર્તેઝિય સમીકરણ :

ધારો કે $A(x_1, y_1)$ તથા $B(x_2, y_2)$ સમતલમાં ભિન્ન બિંદુ આપ્યાં છે. અને $\overleftrightarrow{AB}$ શિરોલંબ કે સમક્ષિતિજ નથી. આથી $x_1 \neq x_2$ તથા $y_1 \neq y_2$

જો $P(x, y)$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ પરનું કોઈ બિંદુ હોય તો

$$x = tx_2 + (1-t)x_1,\ t \in R$$

$$y = ty_2 + (1-t)y_1,\ t \in R$$

$\therefore x = t(x_2 - x_1) + x_1$

$\therefore x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ તથા તે જ રીતે

$y - y_1 = t(y_2 - y_1)$

$\therefore (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x - x_1 & y - y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$C_{31}(x_1), C_{32}(y_1)$ કરતાં

$$\therefore \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

આથી ઊલટું $\begin{vmatrix} x_1 & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ તો સ્પષ્ટ છે કે

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$x_1 \neq x_2$ તથા $y_1 \neq y_2$ હોવાથી $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t$

$\therefore\ x = tx_2 + (1-t)x_1$

$y = ty_2 + (1-t)y_1$

$\therefore\ P(x, y) \in \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{AB}$ પરના બિંદુઓ અને માત્ર તે જ બિંદુઓ માટે

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ એ $\overleftrightarrow{AB}$ નું કાર્તેઝિય સમીકરણ છે.

(1) અને (2) ના આધારે કોઈ પણ રેખાનું કાર્તેઝિય

સમીકરણ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

પ્રશ્ન : 2 [A] <1> ⟶ R^2 માં વ્યાપક સમપરિમાણ દ્વિઘાત સમીકરણ

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0,\ a^2 + h^2 + b^2 \neq 0$

બે રેખાઓ દર્શાવે તે માટેની શરત.

(i) જો $b = 0$ તો સમીકરણ રેખાઓ $x = 0$ અને $ax + 2hy = 0$ દર્શાવે છે.

(ii) જો $b \neq 0$ તો ઉગમબિંદુ સિવાયનાં બધાં જ બિંદુઓ (x, y) માટે $x \neq y$ એટલે સમીકરણ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0,\ a^2 + b^2 + h^2 \neq 0$ --- (i) ને

$b\left[\frac{y}{x}\right]^2 + 2h\left[\frac{y}{x}\right] + a = 0$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય.

$\frac{y}{x} = m$ લેતાં, $bm^2 + 2hm + a = 0$ ----- (ii)

હવે $b \neq 0$, દ્વિઘાત સમીકરણની વિવેચક $\Delta = 4(h^2 - ab)$.
જો $\Delta > 0$ એટલે કે $h^2 - ab > 0$ હોય તો સમીકરણ (ii) નાં બીજ m_1 અને m_2 વાસ્તવિક અને ભિન્ન મળે. તેથી $h^2 - ab > 0$ હોય, તો સમીકરણ (i) $\frac{y}{x} = m_1$ અથવા $\frac{y}{x} = m_2$, જ્યાં $(x, y \neq 0)$ વળી, $(0,0)$ માટે $y = m_1 x$ તથા $y = m_2 x$ સત્ય છે. આમ સમીકરણ $y - m_1 x = 0$ અને $y - m_2 x = 0$ થાય. જો $\Delta = 0$ એટલે કે $h^2 - ab = 0$ હોય, તો સમીકરણ (ii) ને એક જ બીજ હોય. તેથી $h^2 - ab = 0$ હોય, તો સમીકરણ (i) ઉગમબિંદુમાંથી પસાર થતી એક રેખા દર્શાવે છે.

આમ, જો $h^2 - ab \geq 0$ હોય, તો R^2 માં રેખાયુગ્મ સમપરિમાણ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ઉગમબિંદુમાંથી પસાર થતી બે રેખાઓ દર્શાવે છે.

(2) ⟶ $l_1 : x = 2$, $l_2 : x - y + 5 = 0$.
રેખા l_1 શિરોલંબ છે માટે તેનો ઢાળ મળે નહિં.
રેખા l_2 નો ઢાળ $= -a/b = \frac{1}{-1} = 1 = m$ ધારો

હવે $\tan \theta = m = 1$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

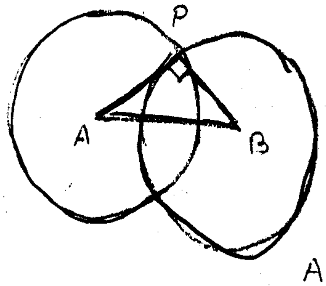
$\therefore$ બે રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ α હોય તો

$\alpha = |\frac{\pi}{2} - \theta| = |\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}| = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \alpha = \pi/4$

[B] <1> ⟶ લંબચ્છેદી વર્તુળો :

જો બે વર્તુળનાં છેદબિંદુ આગળ તેમના સ્પર્શક રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો કાટકોણ હોય તો બે વર્તુળો પરસ્પર લંબચ્છેદી વર્તુળો કહેવાય છે.



વર્તુળો $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ અને $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ લંબચ્છેદી હોય, તેમનું એક છેદબિંદુ P હોય અને તેમનાં કેન્દ્ર અનુક્રમે A અને B હોય તો

$PA = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}$,

$PB = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}$

અને $AB = \sqrt{(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2}$ $\overleftrightarrow{PA}$ અને $\overleftrightarrow{PB}$ આ વર્તુળોના P આગળના સ્પર્શકો છે.

હવે કાટકોણ ΔAPB માં $\overline{PA} \perp \overline{PB}$

$\therefore PA^2 + PB^2 = AB^2$

$\therefore g_1^2 + f_1^2 - c_1 + g_2^2 + f_2^2 - c_2 = (g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2$

$\therefore 2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$

આ બે વર્તુળો લંબચ્છેદી હોવાની આવશ્યક શરત છે.

<2> ⟶ $l_1 : 4x - 8y + 10 = 0$

$l_2 : 2x - 4y + 5 = 0$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 16 = 0$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 10 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -40 + 40 = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0.$$

∴ રેખાઓ સંપાતી છે.

∴ ઉકેલગણ = $\{(x, y) / 2x - 4y + 5 = 0, x, y \in R\}$

⟨3⟩ ⟶ $2x + ky - 5 = 0$, $4x - y - 3 = 0$, $kx - y - 2 = 0$

સંપાતી રેખાઓ છે.

$$\begin{vmatrix} 2 & k & -5 \\ 4 & -1 & -3 \\ k & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

∴ $2(2-3) - k(-8+3k) - 5(-4+k) = 0$.

∴ $-2 + 8k - 3k^2 + 20 - 5k = 0$.

∴ $-3k^2 + 3k + 18 = 0$

∴ $k^2 - k - 6 = 0$ ∴ $(k-3)(k+2) = 0$

∴ $k = 3$ અથવા $k = -2$

$k = 3$ માટે રેખાઓ $3x - y - 2 = 0$; $2x + 3y - 5 = 0$,

$4x - y - 3 = 0$ થશે.

અહીં $a_1b_2 - a_2b_1 = 3(3) - 2(-1) = 11 \neq 0$

$a_2b_3 - a_3b_2 = 2(-1) - 4(3) = -14 \neq 0$.

$a_3b_1 - a_1b_3 = 4(-1) - 3(-1) = -1 \neq 0$

∴ $k = 3$ માટે રેખાઓ સંગામી છે. તેજ રીતે

$k = -2$ માટે પણ રેખાઓ સંગામી છે.

∴ $\boxed{k = 3 \ , \ k = -2}$

[C] ⟨1⟩ ⟶ રેખા $y = mx$ એ વર્તુળ $x^2 + y^2 - 2ax$

ને છેદે, તો $x^2 + m^2x^2 - 2ax = 0$

∴ $x[(1+m^2)x - 2a] = 0$

∴ $x = 0$ અથવા $x = \frac{2a}{1+m^2}$ મળે.

∴ $y = mx$ પરથી x ને અનુરૂપ $y = 0$ અથવા

$y = \frac{2am}{1+m^2}$ મળે.

∴ $y = mx$ નાં $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ આથેનાં

છેદબિંદુઓ $O(0, 0)$ અને $A\left(\frac{2a}{1+m^2}, \frac{2am}{1+m^2}\right)$ મળે

હવે O અને A વ્યાસાંત બિંદુઓવાળું વર્તુળ

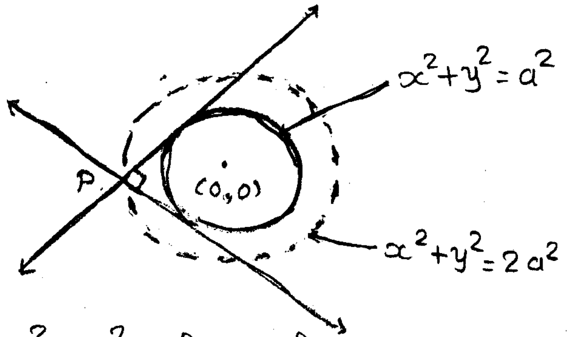
$$(x-0)\left(x-\frac{2a}{1+m^2}\right)+(y-0)\left(y-\frac{2am}{1+m^2}\right)=0$$

$$\therefore x^2+y^2-\frac{2ax}{1+m^2}-\frac{2amy}{1+m^2}=0$$

$\therefore (1+m^2)(x^2+y^2)-2a(x+my)=0$ એ માંગેલા વર્તુળનું સમીકરણ છે.

અથવા

(1) →



ધારો કે વર્તુળ $x^2+y^2=a^2$ નો સ્પર્શક

$y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$ છે.

જે વર્તુળના બહારના બિંદુ $P(x_1, y_1)$ માંથી પસાર થાય છે.

$$\therefore y_1=mx_1\pm a\sqrt{1+m^2}$$

$$\therefore (y_1-mx_1)^2=a^2(1+m^2)$$

$$\therefore y_1^2-2x_1y_1m+m^2x_1^2=a^2+a^2m^2$$

$\therefore (a^2-x_1^2)m^2+2x_1y_1m+(a^2-y_1^2)=0$ મળે.

જો આ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ m_1, m_2 હોય તો

$$m_1m_2=\frac{a^2-y_1^2}{a^2-x_1^2}$$

હવે P માંથી દોરેલા સ્પર્શકો લંબ છે.

$$\therefore m_1m_2=-1 \quad \therefore \frac{a^2-y_1^2}{a^2-x_1^2}=-1$$

$$\therefore a^2-y_1^2=x_1^2-a^2$$

$$\therefore x_1^2+y_1^2=2a^2$$

આ સમીકરણ વ્યાપક રીતે $x^2+y^2=2a^2$

આમ P નો બિંદુગણ $x^2+y^2=2a^2$ છે.

<2> ⟶ વર્તુળ નું સમીકરણ $x^2+y^2=25$ છે.

$x^2+y^2=r^2$ સાથે સરખાવતા માં $r^2=25$

(x_1, y_1) બિંદુ આગળ ના સ્પર્શક નું સમીકરણ $xx_1+yy_1=r^2$ છે.

∴ (3, 4) બિંદુ આગળ ના સ્પર્શક નું સમીકરણ $3x+4y=25$

તથા (x_1, y_1) બિંદુ આગળ ના અભિલંબ નું સમીકરણ

$y_1x-x_1y=0$ છે.

∴ (3, 4) બિંદુ આગળ ના અભિલંબ નું સમીકરણ

$4x-3y=0$ છે.

[D] <1> ⟶ રેખા $3x-2y-2=0$ પરનું બિંદુ $A(x_1, y_1)$ ધારો

∴ $3x_1-2y_1-2=0$ ∴ $y_1=\frac{3}{2}x_1-1$

બિંદુ A નું રેખા $3x+4y-8=0$ થી અંતર 3 એકમ થાય

∴ $p=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ પ્રમાણે $3=\frac{|3x_1+4(\frac{3x_1}{2}-1)-8|}{\sqrt{9+16}}$

∴ $|9x_1-12|=15$

∴ $|3x_1-4|=5$

∴ $3x_1-4=5$ અથવા $3x_1-4=-5$

∴ $x_1=3$ અથવા $x_1=-\frac{1}{3}$

પણ $y_1=\frac{3}{2}x_1-1$ છે.

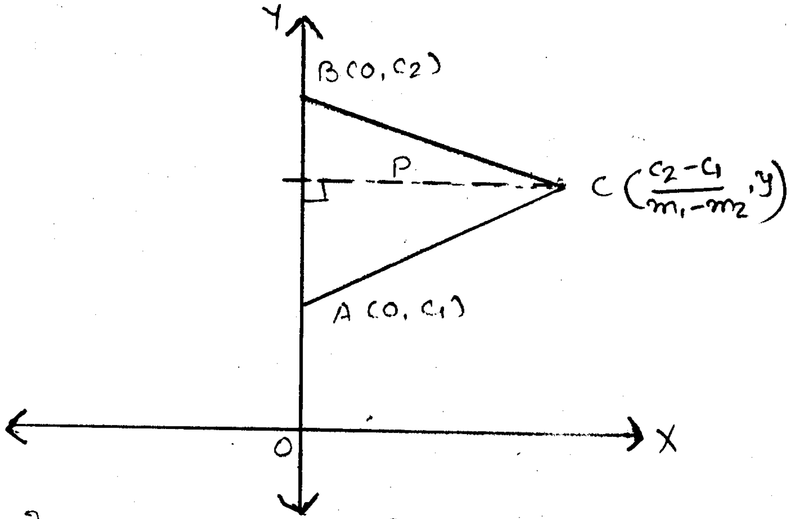
∴ $x_1=3$ તો $y_1=\frac{7}{2}$

$x_1=-\frac{1}{3}$ તો $y_1=-\frac{3}{2}$

∴ માંગેલ બિંદુઓ $(3, \frac{7}{2})$ અથવા $(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2})$ છે.

ઉકેલો

[D]



રેખાઓ $y = m_1x + c_1$ અને $y = m_2x + c_2$ નાં $x = 0$ આગળ નાં છેદબિંદુ $A(0, c_1)$, $B(0, c_2)$ છે.

$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ એ Y-અક્ષ છે.

હવે $m_2x - y + c_2 = 0$ અને $m_1x - y + c_1 = 0$ ના છેદબિંદુ C નો x યામ :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & c_2 \\ -1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_2 & -1 \\ m_1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-c_1 + c_2}{-m_2 - m_1} = \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}$$

લંબઅંતર, p = C ના x યામ નો માનાંક

$= \left|\frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}\right|$ અને

$AB^2 = (c_1 - c_2)^2 \qquad \therefore AB = |c_1 - c_2|$

હવે $\Delta = \frac{1}{2} p \cdot AB$

$= \frac{1}{2} \left|\frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}\right| \cdot |c_1 - c_2|$

$= \frac{1}{2} \frac{(c_1 - c_2)^2}{|m_1 - m_2|}$

આમ માંગેલ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \frac{(c_1 - c_2)^2}{|m_1 - m_2|}$ એકમ છે.

P.T.O.

Q:3 [A] <1> ⟶ રેખા $y = mx + c$, પરવલય $y^2 = 4ax$ નો સ્પર્શક બને તે માટેની શરત તથા સ્પર્શબિંદુના યામ ($m \neq 0$)

પરવલય $y^2 = 4ax$ ના બિંદુ (x_1, y_1) આગળના સ્પર્શક નું સમીકરણ $yy_1 = 2a(x + x_1)$ છે --- (i)

જો રેખા $y = mx + c$ --- (ii) પરવલય નો (x_1, y_1) આગળનો સ્પર્શક હોય તો (i) અને (ii) એક જ રેખા દર્શાવે.

$$\therefore \frac{y_1}{1} = \frac{2a}{m} = \frac{2ax_1}{c}.$$

$$\therefore y_1 = \frac{2a}{m} \text{ અને } x_1 = \frac{c}{m}$$

પણ બિંદુ (x_1, y_1) પરવલય પરનું બિંદુ છે.

$$\therefore y_1^2 = 4ax_1$$

$$\therefore \frac{4a^2}{m^2} = \frac{4ac}{m}$$

$\therefore \underline{c = \frac{a}{m}}$, જે આ $y = mx + c$ સ્પર્શક બનવા માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત છે.

વળી, સ્પર્શબિંદુ ના યામ $= (x_1, y_1) = \left[\frac{c}{m}, \frac{2a}{m}\right] = \left[\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right]$ થશે.

<2> ⟶ પરવલય $y^2 = 4ax$ પરનાં ત્રણ બિંદુઓ $P(t_1)$, $Q(t_2)$ અને $R(t_3)$ ના યામ અનુક્રમે $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ અને $(at_3^2, 2at_3)$ લો. આ બિંદુઓ ત્રણ અને અસમરેખ હોવાથી ΔPQR બને.

અહીં,

$$D = \begin{vmatrix} at_1^2 & 2at_1 & 1 \\ at_2^2 & 2at_2 & 1 \\ at_3^2 & 2at_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2a^2 \begin{vmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2a^2 \begin{vmatrix} t_1^2 - t_2^2 & t_1 - t_2 & 0 \\ t_2^2 - t_3^2 & t_2 - t_3 & 0 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} R_{21}(-1) \\ R_{32}(-1) \end{matrix}$$

$$= 2a^2 (t_1 - t_2)(t_2 - t_3) \begin{vmatrix} t_1 + t_2 & 1 & 0 \\ t_2 + t_3 & 1 & 0 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_1\left(\frac{1}{t_1 - t_3}\right), \; R_2\left(\frac{1}{t_2 - t_3}\right)$$

$$= 2a^2 (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)[1(t_1 + t_2 - t_2 - t_3)]$$

$$= -2a^2 (t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$$

હવે $\Delta = \frac{1}{2}|D|$ લેતાં, ΔPQR નું ક્ષેત્રફળ

$$= a^2 \,|(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)| \text{ એકમ}$$

અથવા

(2) → રેખા $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$, પરવલય $y^2 = 4ax$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત મેળવો.

રેખા $y = mx + c$ એ પરવલય $y^2 = 4ax$ નો સ્પર્શક બને તેની આવશ્યક શરત

$c = \frac{a}{m}$; $m \neq 0$ છે.

હવે, રેખા $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$

$\therefore y \sin\alpha = -x \cos\alpha + p$

$\therefore y = -\cot\alpha \cdot x + p \cdot \operatorname{cosec}\alpha$ લેતાં,

$m = -\cot\alpha$ અને $c = p \cdot \operatorname{cosec}\alpha$

$\therefore$ જરૂરી શરત, $c = \frac{a}{m}$ પ્રમાણે

$p \cdot \operatorname{cosec} \alpha = \frac{a}{-\cot \alpha}$

$\therefore p \operatorname{cosec} \alpha + a \tan \alpha = 0$

$\therefore p + a \sin \alpha \tan \alpha = 0$, જે માંગેલી શરત છે.

[B] ‹1› ⟶ $SP = e\,PM = e\left|x - \frac{a}{e}\right|$

કારણ કે $P(x, y)$ નું નિયામિકા $x = \frac{a}{e}$ થી લંબઅંતર $\left|x - \frac{a}{e}\right|$ છે.

$\therefore SP = |ex - a|$

હવે, $x \leq a$ તથા $e < 1$ હોવાથી $ex < a$.

$\therefore SP = a - ex$

તેજ રીતે $S'P = a + ex$

$\therefore SP + S'P = 2a.$

‹2› ⟶ ધારો કે ઉપવલય ના બિંદુ P આગળ ના સ્પર્શક નું સમીકરણ $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta - 1 = 0$ છે તેનું નાભિ $S(ae, 0)$ થી લંબ અંતર p હોય તો

$p = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ પ્રમાણે.

$p = \frac{|e\cos\theta - 1|}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$ $\therefore p^2 = \frac{a^2b^2(1 - e\cos\theta)^2}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$ ---- (i)

હવે, $SP = a(1 - e\cos\theta)$ અને $S'P = a(1 + e\cos\theta)$

$\therefore SP \cdot S'P = a^2(1 - e^2\cos^2\theta)$

$= a^2 - a^2e^2\cos^2\theta$

$= a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2\theta$

$= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$ -------(ii)

હવે (i) અને (ii) પરથી

$p^2 = \frac{b^2 SP^2}{SP \cdot S'P}$ | $\therefore \frac{p^2}{p^2 + b^2} = \frac{SP}{2a}$

$$\therefore \frac{p^2}{b^2} = \frac{SP}{S'P}$$

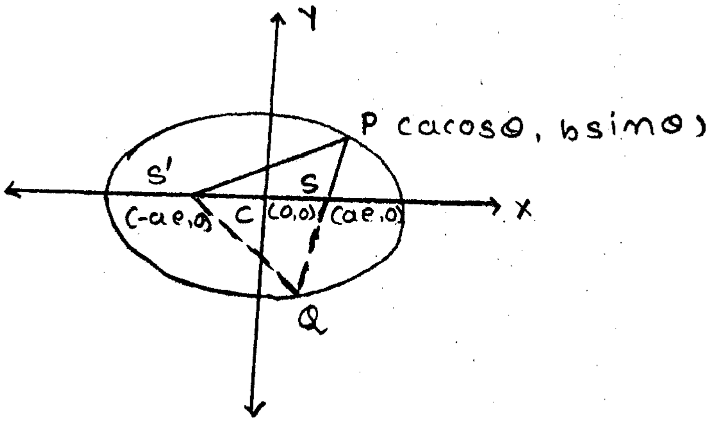
$$\therefore \frac{p^2}{p^2+b^2} = \frac{SP}{SP+S'P}$$

$$\therefore SP = \frac{2ap^2}{p^2+b^2}$$

અથવા

(2) ——→ ધારો કે $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ઉપવલયનું કોઈ બિંદુ છે.

તથા $S(ae, 0)$ અને $S'(-ae, 0)$ નાભિઓ છે.



1) અહીં, $SP = a - ex = a - e\cdot a\cos\theta = a(1 - e\cos\theta)$

અને $S'P = a + ex = a + e\cdot a\cos\theta = a(1 + e\cos\theta)$

મળે છે.

(∵ ગુણધર્મ (i))

હવે, $SP\cdot S'P = a^2(1 - e^2\cos^2\theta)$

$= a^2 - a^2e^2\cos^2\theta$ (∵ $b^2 = a^2(1-e^2)$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = -a^2e^2$)

$= a^2(1-\cos^2\theta) + b^2\cos^2\theta = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$

આમ, $SP\cdot S'P = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta$

ii) અહીં, $\overline{PQ}$ નાભિજીવા છે.

∴ Q ઉપવલય નું અન્ય બિંદુ છે.

હવે, $SP + S'P = 2a$ (∵ ગુણધર્મ (i))

અને તે જ રીતે, $SQ + S'Q = 2a$ મળે છે.

હવે, $\Delta S'PQ$ ની પરિમિતિ $= S'P + PQ + S'Q$

$(\because P-S-Q \Rightarrow PQ = SP + SQ)$

$= 2a + 2a$

$= 4a$, જે અચળ છે.

આમ, $\Delta S'PQ$ ની પરિમિતિ અચળ છે.

[f] ⟨1⟩→ અતિવલયના બિંદુ (x_1, y_1) આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ :

અતિવલયનું સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ છે.

x પ્રત્યે વિકલન કરતાં $\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$.

$\therefore$ જો $y \neq 0$ તો $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ = સ્પર્શકનો ઢાળ.

$\therefore$ સ્પર્શકનું સમીકરણ $y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$

$\therefore b^2x_1x - a^2y_1y = b^2x_1^2 - a^2y_1^2$

$\therefore \frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

આમ, (x_1, y_1) આગળના સ્પર્શકનું સમીકરણ

$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{a^2} = 1$ છે.

જો $y_1 = 0$ તો $x_1 = \pm a$ અને સ્પર્શકનું સમીકરણ $x = \pm a$ મળે.

⟨2⟩ ⟶ અહીં રેખા $21x + 5y = 116$ છે.

$\therefore 5y = -21x + 116.$

$\therefore y = \frac{-21}{5}x + \frac{116}{5}$

અતિવલય $7x^2 - 5y^2 = 232$

$$\therefore \frac{x^2}{\frac{232}{7}} - \frac{y^2}{\frac{232}{5}} = 1$$

$\therefore m = -21/5 \quad c = \frac{116}{5} \quad a^2 = \frac{232}{7}, \; b^2 = \frac{232}{5}$

હવે $y = mx + c$ એ અતિવલય નો સ્પર્શક થાય તેની શરત $c^2 = a^2m^2 - b^2$ ચકાસીશું.

અહીં $a^2m^2 - b^2 = \frac{232}{7} \cdot \frac{441}{25} - \frac{232}{5}$

$= \frac{232}{25}\left[\frac{441}{7} - 5\right]$

$= \frac{232}{25}[63 - 5]$

$= \frac{232}{25} \times 58$

$= \frac{116 \times 116}{25} = \left(\frac{116}{5}\right)^2 = c^2$ જે છે જ

આમ, $c^2 = a^2m^2 - b^2$ શરત સંતોષાય છે.

$\therefore y = \frac{-21x}{5} + \frac{116}{5}$ એટલે કે $21x + 5y = 116$ એ.

અતિવલય $7x^2 - 5y^2 = 232$ નો સ્પર્શક છે.

[D] ⟨1⟩ ⟶ અહીં શિર્ષ $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$ છે.

$\therefore a = 4$

તથા અનંત સ્પર્શક $y = \pm \frac{b}{a}x$ પ્રમાણે $y = \pm \frac{5}{4}x$

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{5}{4}$ અને $a = 4$ છે.

$\therefore b = 5$ મળે.

હવે અતિવલય ના સમીકરણ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

પ્રમાણે $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

એટલે કે $25x^2 - 16y^2 = 400$ મળે.

⟨2⟩ ⟶ વર્તુળ $x^2+y^2+2gx+a^2=0$ માટે $g=g$, $f=0$, $c=a^2$

∴ તેનું કેન્દ્ર $(-g, 0)$ અને ત્રિજ્યા $\sqrt{g^2-a^2}$ થશે

વળી વર્તુળ $x^2+y^2+2fy+a^2=0$ માટે $g=0, f=f, c=a^2$

∴ તેનું કેન્દ્ર $(0, -f)$ અને ત્રિજ્યા $\sqrt{f^2-a^2}$ થશે.

હવે, બંને વર્તુળો બહાર થી સ્પર્શે છે. તેથી બંને વર્તુળોનાં કેન્દ્રો વચ્ચે નું અંતર તેમની ત્રિજ્યાઓનાં સરવાળા જેટલું થશે.

$$\therefore \sqrt{(-g-0)^2+(0+f)^2} = \sqrt{g^2-a^2}+\sqrt{f^2-a^2}$$

$$\therefore g^2+f^2 = g^2-a^2+f^2-a^2+2\sqrt{(g^2-a^2)(f^2-a^2)}$$

$$\therefore a^2 = \sqrt{(g^2-a^2)(f^2-a^2)}$$

$$\therefore a^4 = g^2f^2-g^2a^2-f^2a^2+a^4$$

$$\therefore f^2a^2+g^2a^2 = g^2f^2$$

$$\therefore \frac{1}{g^2}+\frac{1}{f^2} = \frac{1}{a^2} \quad (g^2f^2a^2 \text{ વડે ભાગતાં})$$

$$\therefore g^{-2}+f^{-2} = a^{-2}$$

Q:4 [A] ⟶ $7x^2-2xy+7y^2+12\sqrt{2}x-36\sqrt{2}y+72=0$ --- (i)

અહીં x^2 નો સહગુણક = y^2 નો સહગુણક.

∴ અક્ષો નું $\theta = \pi/4$ ખૂણે પરિભ્રમણ કરતાં (x, y) બદલાઈને (x', y') થાય છે.

$$\therefore x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

ઉપરોક્ત કિંમત પરિણામ (i) માં મૂકતાં

$$\therefore 7\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+7\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$+12\sqrt{2}\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)-36\sqrt{2}\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)+72=0$$

$$7\left(\frac{x'^2-2x'y'+y'^2}{2}\right)-2\left(\frac{x'^2-y'^2}{2}\right)+7\left(\frac{x'^2+2x'y'+y'^2}{2}\right)$$

$$+\frac{12\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,(x'-y')}{2}-\frac{36\sqrt{2}\,\sqrt{2}\,(x'+y')}{2}+\frac{144}{2}=0$$

$$\therefore 7x'^2-14x'y'+7y'^2-2x'^2+2y'^2+7x'^2+14x'y'$$

$$+7y'^2+24x'-24y'-72x'-72y'+144=0$$

$$\therefore 12x'^2+16y'^2-48x'-96y'+144=0.$$

$$\therefore 6x'^2+8y'^2-24x'-48y'+72=0.$$

$$\therefore 6x'^2-24x'+24+8y'^2-48y'+72=24$$

$$\therefore 6(x'-2)^2+8(y'-3)^2=24$$

$$\therefore \frac{(x'-2)^2}{4}+\frac{(y'-3)^2}{3}=1 \quad \text{------ (ii)}$$

હવે ઉગમ બિંદુ નું (2, 3) બિંદુ એ સ્થાનાંતર કરતાં (x', y') બદલાઈને (x'', y'') થાય છે.

$$\therefore x''=x'-2 \qquad y''=y'-3$$

ઉપરોક્ત કિંમત પરિણામ (ii) માં મૂકતાં

$\therefore \dfrac{x''^2}{4}+\dfrac{y''^2}{3}=1$ જે ઉપવલય દર્શાવે છે.

અહીં $a^2=4 \quad b^2=3$

$\therefore$ અક્ષોની લંબાઈ : પ્રધાન અક્ષની લંબાઈ $= 2a = 4$

ગૌણ અક્ષની લંબાઈ $= 2b = 2\sqrt{3}$

ઉત્કેન્દ્રતા માટે $b^2=a^2(1-e^2)$ માં $a^2=4,\ b^2=3$

$$\therefore 3=4(1-e^2)$$

$$\therefore \frac{3}{4}=1-e^2$$

$$\therefore e^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore e=\frac{1}{2}$$

(x'', y'') પદ્ધતિ માટે

નાભિ $(ae, 0) = (1, 0)$

$(-ae, 0) = (-1, 0)$

કેન્દ્ર $(x'', y'') = (0, 0)$

નિયામિકા $x'' = +\frac{a}{e}$

$\therefore x'' = 4$

$x'' = -\frac{a}{e} \quad \therefore x'' = -4$

(x', y') પદ્ધતિ માટે

$x' = x'' + 2 \quad y' = y'' + 3$

નાભિ $(1+2, 0+3) = (3, 3)$

$(-1+2, 0+3) = (1, 3)$

કેન્દ્ર $(0+2, 0+3) = (2, 3)$

નિયામિકા $x' = 4+2 \quad \therefore x' = 6$

$x' = -4+2 \quad \therefore x' = -2$

(x, y) પદ્ધતિ માટે $x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$

નાભિ $\left(\frac{3-3}{\sqrt{2}}, \frac{3+3}{\sqrt{2}}\right) = \left(0, \frac{6}{\sqrt{2}}\right) = (0, 3\sqrt{2})$

$\left(\frac{1-3}{\sqrt{2}}, \frac{1+3}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}\right) = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

કેન્દ્ર $\left(\frac{2-3}{\sqrt{2}}, \frac{2+3}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

નિયામિકા $x' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

$\therefore 6 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ તથા $-2 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

$\therefore x+y = 6\sqrt{2}$ તથા $x+y = -2\sqrt{2}$

<u>અથવા</u>

(i) $x^2 - 8x + 8y + 11 = 0$

$\therefore x^2 - 8x + 16 + 8y - 5 = 0$

$\therefore (x-4)^2 = -8\left(y - \frac{5}{8}\right)$ ---- (i)

અહીં ઊગમબિંદુ નું $\left(4, \frac{5}{8}\right)$ બિંદુ એ સ્થાનાંતર કરતા (x, y) બદલાઈ (x', y') થાય છે.

$\therefore x - 4 = x'' \quad y - \frac{5}{8} = y''$

ઉપરોક્ત કિંમત પરિણામ (i) મૂકતાં

∴ $x''^2 = -8y''$ જે પરવલય દર્શાવે છે.

(ii) $xy = 6$ — — — — — (i)

અહીં: અક્ષોને $\theta = \frac{\pi}{4}$ ખૂણે પરિભ્રમણ કરતાં

(x, y) બદલાઈને (x', y') થાય છે.

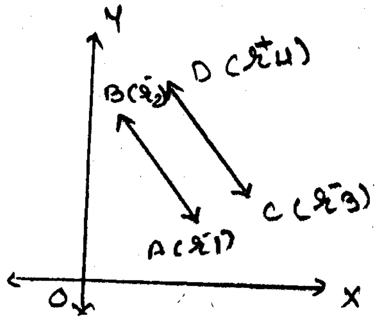
$$\therefore x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

ઉપરોક્ત કિંમત પરિણામ (i) માં મૂકતાં

$$\therefore \left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) = 6.$$

∴ $x'^2 - y'^2 = 12$ જે લંબાતિવલય દર્શાવે છે.

[B] (i)



ધારો કે A, B, C અને D સમતલના બિંદુઓ છે. તેમના સ્થાન સદિશો $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ અને $\bar{r}_4$ છે.

ધારો કે $\bar{r}_i = (x_i, y_i)$

જ્યાં $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_4, y_4) - (x_3, y_3)$$

$$\iff (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_4 - x_3, y_4 - y_3)$$

$$\iff x_2 - x_1 = x_4 - x_3, \quad y_2 - y_1 = y_4 - y_3$$

હવે $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}$

$\therefore AB = CD$

જો ઉગમબિંદુ નું સ્થાનાંતર A બિંદુ આગળ કરીએ તો B નો સ્થાન સદિશ $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$ થશે એટલે કે $\overrightarrow{AB}$ ની દિશા એ સદિશ $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$ ની દિશા થશે.

આજ રીતે ઉગમબિંદુ નું સ્થાનાંતર C બિંદુ એ કરતાં D નો સ્થાન સદિશ $\bar{r}_4 - \bar{r}_3$ થશે. એટલે કે $\overrightarrow{CD}$ ની દિશા એ સદિશ $\bar{r}_4 - \bar{r}_3$ ની દિશા થશે.

∴ $\overrightarrow{AB}$ ની દિશા = $\overrightarrow{CD}$ ની દિશા

∵ બે સદિશ સમાન હોય તો તેમની ભાત અને દિશા સમાન છે.

(ii) અહીં $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\beta = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

પરંતુ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1$

$\therefore \cos^2\gamma = \frac{1}{4}$

$\therefore \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore \gamma = \frac{\pi}{3}$ OR $\gamma = \frac{2\pi}{3}$

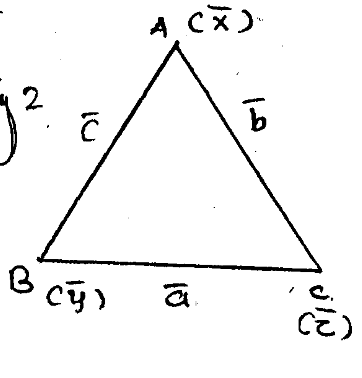
[c] (i). $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$

$= \frac{1}{2} |\bar{b}|\,|\bar{c}| \sqrt{1 - \cos^2 A}$

$= \frac{1}{2} |\bar{b}|\,|\bar{c}| \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{b}\cdot\bar{c}}{|\bar{b}|\,|\bar{c}|}\right)^2}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}|\bar{b}|\,|\bar{c}| \sqrt{|\bar{b}|^2\,|\bar{c}|^2 - (\bar{b}\cdot\bar{c})^2}}{|\bar{b}|\,|\bar{c}|}$

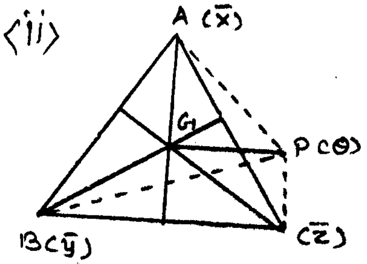
$= \frac{1}{2}\left[|\bar{b}|^2\,|\bar{c}|^2 - (\bar{b}\cdot\bar{c})^2\right]^{\frac{1}{2}}$



તે જ રીતે $\Delta = \frac{1}{2}\left[|\bar{c}|^2 |\bar{a}|^2 - (\bar{c}\cdot\bar{a})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left[|\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

<ii>



ΔABC નું મધ્યકેન્દ્ર G છે. તથા P એ ΔABC ના સમતલનું કોઈ બિંદુ છે.

ધારો કે P, A, B, C ના સ્થાન સદિશો અનુક્રમે $0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ છે.

∴ મધ્યકેન્દ્રનો G સ્થાન સદિશ $\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}{3}$ થશે.

હવે $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (\bar{x} - 0) + (\bar{y} - 0) + (\bar{z} - 0)$

$= \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$

$= 3\left(\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}{3}\right)$

$= 3\,\overrightarrow{PG}$

[D] <1> ⟶

$3i - j$ ની દિશામાં એકમ સદિશ $\frac{1}{\sqrt{10}}(3\hat{i} - \hat{j})$

∴ $3i - j$ ની દિશામાં $2\sqrt{10}$ એકમનું બળ $\bar{F_1} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}(3i - \hat{j})$

$= 6\hat{i} - 2\hat{j}$

$2\hat{i} + 3\hat{j}$ ની દિશામાં એકમ સદિશ $= \frac{1}{\sqrt{13}}(2\hat{i} + 3\hat{j})$

∴ $2\hat{i} + 3j$ ની દિશામાં $3\sqrt{13}$ એકમનું બળ $\bar{F_2} = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}}(2\hat{i} + 3\hat{j})$

$= 6\hat{i} + 9\hat{j}$

∴ પરિણામી બળ $\bar{F} = \bar{F_1} + \bar{F_2} = 12\hat{i} + 7\hat{j} = (12, 7)$

સ્થાનાંતર $\overrightarrow{AB} = (6, 4) - (1, 2) = (5, 2)$

∴ કાર્ય $= \bar{F}\cdot\overrightarrow{AB} = (12, 7)\cdot(5, 2) = 60 + 14 = 74$ એકમ

(અથવા) $\bar{x} = \hat{i} + \hat{j} = (1, 1)$ $\quad \bar{y} = t\hat{i} - \hat{j} = (t, -1)$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|}$ $\quad$ ∴ $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{t-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+1}}$ $\quad$ ∴ $\sqrt{t^2+1} = t - 1$

∴ $t^2 + 1 = |t - 1|^2$ $\quad$ ∴ $t^2 + 1 = t^2 + 1 - 2t$

∴ $t = 0$.

પ્રશ્ન: 5 (અ)

(1) ધારો કે A, B, C સમરેખ છે

$\therefore$ C($\bar{c}$) રેખા $\overleftrightarrow{AB}$ ના સમીકરણ $\bar{r}-\bar{a}=k(\bar{b}-\bar{a})$ નું સમાધાન કરે છે કોઈક $k \in R$ માટે

$\bar{c}-\bar{a}=k(\bar{b}-\bar{a})$

$\therefore (k-1)\bar{a}+(-k)\bar{b}+\bar{c}=\theta$

અહીં $k=0$ મૂકતાં $\bar{a}=\bar{c}$ અને $k=1$ મૂકતાં $\bar{b}=\bar{c}$ મળે છે પણ A, B, C ભિન્ન છે. $k \neq 0, k \neq 1$

આમ $l=k-1, m=-k, n=1$ ત્રણેય શૂન્યેતર એવા મળે કે જેથી $l\bar{a}+m\bar{b}+n\bar{c}=\theta$ અને $l+m+n=0$

શરતની પર્યાપ્તતા માટે ધારો કે શૂન્યેતર l, m, n એવા મળે કે જેથી $l\bar{a}+m\bar{b}+n\bar{c}=\theta$ અને $l+m+n=0$

અહીં $l=-m-n$ મૂકતાં

$(-m-n)\bar{a}+m\bar{b}+n\bar{c}=\theta$

$\therefore m(\bar{b}-\bar{a})+n(\bar{c}-\bar{a})=\theta$

$\therefore \bar{c}-\bar{a}=-\frac{m}{n}(\bar{b}-\bar{a}) \quad \because n \neq 0$

$=k(\bar{b}-\bar{a})$ જ્યાં $k=-\frac{m}{n}$

હવે $m \neq 0$ એટલે $k \neq 0$, વળી $k=1$ તો $m+n=0$

$\therefore l+m+n=0 \Rightarrow l=0$ જે પક્ષથી વિપરીત છે

આમ $k \neq 0, k \neq 1$

$\therefore$ C($\bar{c}$) રેખા $\bar{r}-\bar{a}=k(\bar{b}-\bar{a})$ પર એટલે કે $\overleftrightarrow{AB}$ પર છે

$\therefore$ C એ A અને B થી ભિન્ન એવું બિંદુ છે અને A, B, C સમરેખ છે

(2) ધારો કે $\bar{r}=\bar{a}+k\bar{l}, k \in R$ અને

$\bar{r}=b+k\bar{l}, k \in R$ સમાંતર રેખાઓ છે

અને $a \notin \bar{r}=\bar{b}+k\bar{l}, k \in R$

અહીં A($\bar{a}$) અને B($\bar{b}$) હોય, તો $\bar{b}-\bar{a}$ અને $\bar{l}$ અસમરેખ થશે. $\therefore \bar{n}=(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{l} \neq \theta$

હવે A($\bar{a}$) માંથી પસાર થતા અને $\bar{n}$ અભિલંબવાળા સમતલનું સમીકરણ $(\bar{r}-\bar{a})\cdot\bar{n}=0$ છે.

અહીં $\bar{n}=(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{l}$ લઈએ તો આપેલી બંને

રેખામાં પરનાં તમામ બિંદુઓ આ સમતલ પર છે.
તેમ સાબિત કરીએ
$\therefore \bar{r}-\bar{a}=k\bar{l}$ મૂકતાં $(\bar{r}-\bar{a})\cdot\bar{n}=k\bar{l}\cdot[(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{l}]=0$
અને $\bar{r}=\bar{b}+k\bar{l}$ મૂકતાં

$$(\bar{r}-\bar{a})\cdot\bar{n}=(\bar{b}-\bar{a}+k\bar{l})\cdot[(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{l}]$$
$$=(\bar{b}-\bar{a})\cdot[(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{l}]+k\bar{l}\cdot[(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{l}]$$
$$=0+0=0$$

આમ માગેલું સમતલ $(\bar{r}-\bar{a})[(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{l}]=0$ છે.
કાર્તેઝીય સ્વરૂપમાં સમતલનું સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}=0 \text{ મળશે.}$$

જ્યાં $\bar{l}=(l_1,l_2,l_3)$
$\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$ $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$

<u>પ્રશ્ન: 5 (b)</u>

(1) આપેલું સમીકરણ $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$

$\therefore x^2+2ux+u^2+y^2+2vy+v^2+z^2+2wz+w^2$
$=u^2+v^2+w^2-d$

$\therefore (x+u)^2+(y+v)^2+(z+w)^2=u^2+v^2+w^2-d$

સમીકરણને $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=a^2$ સાથે
સરખાવતાં $\alpha=-u$, $\beta=-v$, $\gamma=-w$ અને
$a^2=u^2+v^2+w^2-d>0$ મળે, હવે ગોલકની ત્રિજ્યા
$a^2>0$ હોવાથી $u^2+v^2+w^2-d>0$ હોવું જોઈએ.
આમ આપેલું સમીકરણ ગોલક દર્શાવે તેમાટેની
આવશ્યક શરત $u^2+v^2+w^2-d>0$ છે.
જો $u^2+v^2+w^2-d>0$ તો કેન્દ્ર $(-u,-v,-w)$
અને ત્રિજ્યા $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ થાય.

(૨) આપેલી રેખાઓને સદિશ સ્વરૂપમાં લખતાં

$\bar{r} = (3, -15, 9) + k(2, -7, 5)$ $k \in R$

$\bar{r} = (-1, 1, 9) + k(2, 1, -3)$ $k \in R$

$\therefore \bar{a} = (3, -15, 9)$, $\bar{b} = (-1, 1, 9)$, $\bar{l} = (2, -7, 5)$

$\bar{m} = (2, 1, -3)$

$$\therefore \bar{l} \times \bar{m} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (16, 16, 16)$$

$$\therefore |\bar{l} \times \bar{m}| = \sqrt{16^2 + 16^2 + 16^2} = 16\sqrt{3}.$$

હવે $$\bar{u} = \frac{\bar{l} \times \bar{m}}{|\bar{l} \times \bar{m}|} = \frac{(16, 16, 16)}{16\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$\bar{b} - \bar{a} = (-1, 1, 9) - (3, -15, 9) = (-4, 16, 0)$$

$\therefore$ બે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર $|(\bar{b} - \bar{a}) \cdot \bar{u}|$

$$= \left|(-4, 16, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} |-4 + 16 + 0| = 4\sqrt{3}$$

અથવા

(૨) અહીં રેખાઓનાં સદિશ સમીકરણો.

$\bar{r} = (1, -2, 3) + k(1, 1, 1)$, $k \in R$ અને

$\bar{r} = (2, -3, 5) + k(1, 1, 1)$ $k \in R$ છે

તેથી $\bar{a} = (1, -2, 3)$, $\bar{l} = (1, 1, 1)$ $\bar{b} = (2, -3, 5)$

$\bar{m} = (1, 1, 1)$

$\therefore \overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = (2, -3, 5) - (1, -2, 3) = (1, -1, 2)$

$\hat{l} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \times \hat{l} = (1, -1, 2) \times \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-3, 1, 2)$$

$\therefore$ બંને સમાંતર રેખાઓ વચ્ચેનું લંબ અંતર

$$= |\overrightarrow{AB} \times \hat{l}| = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

પ્રશ્ન: 5 (c)

(1) $V(1,1,3)$ $A(4,3,2)$ $B(5,2,7)$ $C(6,4,8)$

$\therefore \overrightarrow{VA} = (3,2,-1)$ $\overrightarrow{VB} = (4,1,4)$, $\overrightarrow{VC} = (5,3,5)$

$$\therefore [\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}\ \overrightarrow{VC}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-7) - 2(0) - 1(7)$$

$$= -28$$

$\therefore$ માગેલું ઘનફળ $= \frac{1}{6}|-28| = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$ એકમ.

(2) $(2,-1,2) = \bar{a}$

સમતલનું સમીકરણ $(x,y,z)\cdot(2,-3,4) = 44$

$\therefore \bar{n} = (2,-3,4)$, $d = 44$.

A માંથી સમતલ પરના લંબપાદ M નો સ્થાન સદિશ $\bar{m} = \bar{a} + k_1\bar{n}$ જ્યાં $k_1 = \frac{d - \bar{a}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}$

હવે $k_1 = \frac{44 - (2,-1,2)\cdot(2,-3,4)}{4+9+16}$

$$= \frac{44 - (4+3+8)}{29} = \frac{44-15}{29} = 1$$

$\therefore \bar{m} = \bar{a} + k\bar{n}$

$$= (2,-1,2) + 1(2,-3,4) = (4,-4,6)$$

અહીં A માંથી પસાર થતી લંબ રેખા l ની દિશા

$\overrightarrow{AM} = (4,-4,6) - (2,-1,2) = (2,-3,4)$

$\therefore AM = |\overrightarrow{AM}| = |(2,-3,4)| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$

$\therefore$ માગેલી લંબ રેખા $\bar{r} = (2,-1,2) + k(2,-3,4)$ $k \in R$

(S) ધારો કે માંગેલા ગોલકનું સમીકરણ

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ —(1) છે.

આ ગોલક $A(1,0,-1)$, $B(-1,1,0)$, $C(0,-1,1)$ માંથી પસાર થાય છે

$\therefore 1+0+1+2u-2w+d=0$

$\therefore 2u-2w+d+2=0$ —(2)

$\therefore -2u+2v+d+2=0$ —(3)

$-2v+2w+d+2=0$ —(4)

$(2)+(3)+(4) \Rightarrow 3d+6=0 \Rightarrow d=-2$

$\therefore (2),(3),(4) \Rightarrow u=v=w$ —(5)

સમતલ ABCનું સમીકરણ

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ -1-1 & 1-0 & 0+1 \\ 0-1 & -1-0 & 1+1 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$\therefore (x-1)(3)-y(-3)+(z+1)(3)=0$

$\therefore x-1+y+z+1=0$

$\therefore x+y+z=0$

ગોલકનું કેન્દ્ર $(-u,-v,-w)$ આ સમતલ પર આવેલું છે.

$\therefore -u-v-w=0 \quad \therefore u+v+w=0$ —(6)

$(5)(6) \Rightarrow u=v=w=0$

$\therefore$ ગોલકનું સમીકરણ $x^2+y^2+z^2=2$

અથવા

પ્રશ્ન-5 (5) અહીં માંગેલ સમતલ $\bar{a} = (1, 2, 3)$ અને $\bar{b} = (3, -1, 2)$ માંથી પસાર થાય છે. અને સમતલ $x + 3y + 2z = 7$ ને લંબ છે.

$\therefore (x, y, z) \cdot (1, 3, 2) = 7$ થાય.

અહીં સમતલનો અભિલંબ $= \bar{m} = (1, 3, 2)$

હવે $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = (3, -1, 2) - (1, 2, 3) = (2, -3, -1)$

$$\bar{n} = \overline{AB} \times \bar{m} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3\bar{i} - 5\bar{j} + 9\bar{k}$$

$$= (-3, -5, -9)$$

માંગેલ સમતલનું સમીકરણ $\bar{r} \cdot \bar{n} = \bar{a} \cdot \bar{n}$.

$\therefore (x, y, z) \cdot (-3, -5, -9) = (1, 2, 3) \cdot (-3, -5, -9)$

$\therefore -3x - 5y + 9z = -3 - 10 + 27$

$\therefore 3x + 5y - 9z + 14 = 0$

જે માંગેલ સમીકરણ છે.