DESCRIPTIVE TYPE QUESTIONS

SUBJECT : MATHEMATICS

FULL MARKS : 20

(Each question carries two marks)

(English Version)

1. Prove that the equation $\cos 2x + a \sin x = 2a - 7$ possesses a solution if $2 \le a \le 6$.

2. Find the values of x, $(-\pi < x < \pi,\ x \neq 0)$ satisfying the equation, $8^{1+|\cos x|+|\cos^2 x|+\cdots\cdots\infty} = 4^3$

3. Prove that the centre of the smallest circle passing through origin and whose centre lies on $y = x+1$ is $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

4. Prove by induction that for all $n \in N$, $n^2 + n$ is an even integer $(n \ge 1)$.

5. If A, B are two square matrices such that AB = A and BA = B, then prove that $B^2 = B$

6. If $N = n!$ $(n \in N,\ n > 2)$, then find $\lim_{N \to \infty} \left[(\log_2 N)^{-1} + (\log_3 N)^{-1} + \cdots\cdots + (\log_n N)^{-1} \right]$

7. Use the formula $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$, to compute $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$.

8. If $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$, prove that, $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = A$ where A is a constant.

9. Evaluate the following integral $\int_{-1}^{2} |x \sin \pi x| \, dx$

10. If $f(a) = 2$, $f'(a) = 1$, $g(a) = -1$ and $g'(a) = 2$, find the value of $\lim_{x \to a} \frac{g(x)f(a) - g(a)f(x)}{x - a}$.

[Turn Over for Bengali Version]

(Bengali Version)

1. প্রমাণ কর যে $\cos 2x + a\sin x = 2a - 7$ সমীকরণটির সমাধান থাকবে যদি $2 \le a \le 6$ হয়।

2. x এর মান নির্ণয় কর $(-\pi < x < \pi$ এবং $x \neq 0)$ যাহাতে ইহা $8^{1+|\cos x|+|\cos^2 x|+\cdots\cdots\infty} = 4^3$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

3. প্রমাণ কর যে মূলবিন্দুগামী, ক্ষুদ্রতম যে বৃত্তের কেন্দ্র $y = x + 1$ সরলরেখার উপরে অবস্থিত তার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

4. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি দ্বারা দেখাও যে $n^2 + n$ সর্বদাই একটি যুগ্ম সংখ্যা ($n \ge 1$ এবং $n \in N$)।

5. A এবং B দুটি এমন বর্গ ম্যাট্রিক্স যে AB = A এবং BA = B তাহলে প্রমাণ কর যে $B^2 = B$

6. যদি $N = n!$ $(n \in N, n > 2)$ হয়, $\lim_{N\to\infty}\left[(\log_2 N)^{-1} + (\log_3 N)^{-1} + \cdots\cdots + (\log_n N)^{-1}\right]$ তবে এর মান নির্ণয় কর।

7. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$ সূত্র প্রয়োগ করিয়া $\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$ এর মান নির্ণয় কর

8. যদি $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = A$, যেখানে A একটি ধ্রুবক।

9. নিম্নলিখিত সমাকলটির মান নির্ণয় কর $\int_{-1}^{2} |x \sin \pi x| \, dx$

10. যদি $f(a) = 2$, $f'(a) = 1$, $g(a) = -1$ এবং $g'(a) = 2$ হয়, তবে $\lim_{x\to a} \frac{g(x)f(a) - g(a)f(x)}{x - a}$-এর মান নির্ণয় কর।