या $\quad 2x + 2y - 3z + 3 = 0$

30. $\quad 3x + 2y - z - 4 = 0$ ...(i)

$\quad 4x + y - 2z + 3 = 0$ ... (ii)

माना $z = 0$ समतल (i) और (ii) में स्थित उमयनिष्ठ बिन्दु का z- निर्देशांक हैं

∴ समतल के समीकरण निम्न रूप ले लेते हैं:

$$3x+2y = 4$$
$$4x + y = -3$$

जो हल करने पर $x = -2$ और $y = 5$ देते हैं

∴ समतलों का उभयनिष्ठ बिन्दु है: $(-2,5,0)$ (1)

माना l, m, n रेखा के दिक् अनुपात हैं

∴ रेखा समतल के अभिलम्ब पर लम्ब है

∴ $\quad 3l + 2m - n = 0$

और $\quad 4l + m - 2n = 0$ (1)

$$\therefore \quad \frac{l}{-4+1} = \frac{m}{-4+6} = \frac{n}{3-8}$$

या $\quad \frac{l}{3} = \frac{m}{-2} = \frac{n}{5}$ (1)

∴ रेखा के समीकरणों का अभीष्ट रूप है:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{5}$$ (1)

प्रतिदर्श प्रश्न पत्र

विषय : गणित
समय : 3 घन्टे

पत्र : उच्चत्तर माध्यमिक
महत्तम अंक : 100

टिप्पणीः सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

1. यदि $ai \cdot (3 + bi) = 3 - 7i$ तो a तथा b ज्ञात कीजिए। (2)

2. $A^2 + I$ का मान ज्ञात कीजिए जहां $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, I इकाई आव्यूह है (2)

3. सिद्ध कीजिए कि

$$^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$$ (2)

4. 4 लड़कों तथा 3 लड़कियों को एक पंक्ति में 7 कुर्सियों पर कितनी विधियों से बैठाया जा सकता है ताकि कोई दो लड़के एक साथ न बैठ सकें? (2)

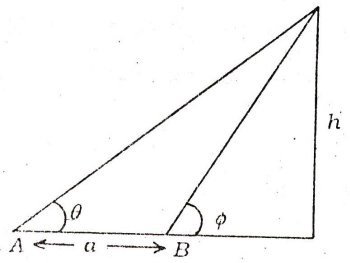
5. सिद्ध कीजिए कि,

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$$ (2)

6. सिद्ध कीजिए कि,

$$\frac{\cos 11^\circ + \sin 11^\circ}{\cos 11^\circ - \sin 11^\circ} = \tan 56^\circ$$ (2)

7. चित्र के अनुसार h का मान θ, ϕ और a के पदों में ज्ञात कीजिए। (2)



8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\tan bx}$ का मान ज्ञात कीजिए। (2)

9. यदि $1, w, w^2$ इकाई के घन मूल है तो सिद्ध कीजिए कि,

$$(1 + w - w^2)^7 + (1 - w + w^2)^7 = 128$$ (3)

10. दर्शाइए कि,

$$\begin{vmatrix} -x^2 & xy & xz \\ xy & -y^2 & yz \\ xz & zy & -z^2 \end{vmatrix} = 4x^2 y^2 z^2$$ (3)

11. गुणोत्तर श्रेणी का प्रयोग करते हुए, $0.\overline{5}$ को परिमेय संख्या के रूप में प्रदर्शित कीजिए। (3)

12. बिन्दुओं (4, 2) तथा (5, 5) के मिलाने वाले रेखाखंड को बिन्दु (3, –1) किस अनुपात में विभाजित करता है? (3)

13. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूलबिन्दु से जाता है और अक्षों से 4 तथा 5 के अन्त: खंड काटता है। (3)

14. प्रथम सिद्धान्त से फलन $\sqrt{ax}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। (3)

15. अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 27$ वर्धमान (increasing) तथा ह्रासमान (decreasing) है। (3)

16. $\int \frac{1}{(x+3)(2x+3)}\,dx$ (3)

17. व्यंजक $\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$ में x^{10} का गुणांक ज्ञात कीजिए। इस बात का भी उल्लेख कीजिए कि यह परिणाम किस प्रतिबंध के अंतर्गत लागू है। (4)

18. समीकरण $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। (4)

19. परवलय $5x^2 + 24y = 0$ के शीर्ष, नाभि, नियता तथा नाभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए। (4)

20. समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \cos x$ को हल कीजिए (4)

21. सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए वृत्त में सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल महत्तम होता है। (4)

22. $-15 - 8i$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
अत: $-15 + 8i$ का भी वर्गमूल ज्ञात कीजिए। (5)

23. आव्यूहों का प्रयोग करते हुए, समीकरणों के निकाय का हल ज्ञात कीजिए: (5)

$$x + y + z = 6$$
$$2x - y + z = 3$$
$$x - 2y + 3z = 6$$

24. सिद्ध किजिए कि $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots\infty = 1 - \log 2$ (5)

25. यदि $e^{\sin^{-1}x} + x^y + y^x = C$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। (5)

26. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ $(a > 0$ के लिए) द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (5)

27. $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$ dx का मान ज्ञात कीजिए। (5)

विकल्प – I

(सांख्यिकी तथा प्रायिकता)

28. गेहूं की नई किस्त की प्रभावकारिता जांचने के लिए 50 प्रयोगात्मक खेतों पर एक परीक्षण किया गया और निम्न परिणाम प्राप्त हुए: (3)

पैदावार प्रति हेक्टेयर (क्विंटल में)	खेतों की संख्या
31 - 35	2
36 - 40	3
41 - 45	8
46 - 50	12
51 - 55	16
56 - 60	5
61 - 65	2
66 - 70	2

यदि प्रति हेक्टेयर माध्य पैदावार 50 क्विंटल है, तो प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

29. यदि A तथा B दो ऐसी घटनाएँ हैं कि,
$P(A) = 0.8, P(B) = 0.6, P(A \cap B) = 0.5$
तो (i) $P(A \cup B)$, (ii) $P(B/A)$, (iii) $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

30. एक पासों का जोड़ा 10 बार उछाला जाता है। यदि दोनों पासों पर एक ही संख्या आना सफलता माना जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए:
(i) 4 सफलताएं
(ii) कोई सफलता नहीं (4)

विकल्प – II
(रैखिक प्रोग्रामन)

28. सिम्पलेक्स विधि से हल कीजिए। (3)
न्यूनतम $z = x_1 + x_2$
प्रतिबन्ध
$2x_1 + x_2 \geq 4$
$x_1 + 7x_2 \geq 7$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ के अन्तर्गत।

29. चार पुरुषों *A, B, C* तथा *D* को चार कार्य I, II, III तथा IV बांटे गये। लागत आव्यूह नीचे दिया गया है। कार्य का उचित आबंटन ज्ञात कीजिए। (3)

कार्य ↓ \ पुरुष →	A	B	C	D
I	8	10	17	9
II	3	8	5	6
III	10	12	11	9
IV	6	13	9	7

30. आलेख विधि का प्रयोग करते हुए हल कीजिए, (4)
न्यूनतम $z = 60 x_1 + 40 x_2$
प्रतिबंध
$3x_1 + x_2 \geq 24$
$x_1 + x_2 \geq 16$
$x_1 + 3x_2 \geq 24$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

विकल्प – III
(सदिश और वैश्लेषिक ठोस ज्यामिति)

28. एक समषट्भुज ABCDEF में, यदि $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ और $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ हो, तो निम्न को $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के रूप में व्यक्त कीजिए :
(i) $\overrightarrow{AC}$ (ii) $\overrightarrow{AD}$ (iii) $\overrightarrow{EA}$ (3)

29. बिन्दुओं (–1,1,1) और (1,–1,1) से गुजरने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात करो जो समतल $x + 2y + 2z - 5 = 0$ पर लम्ब हो। (3)

30. रेखा $3x + 2y - z - 4 = 0$,
$4x + y - 2z + 3 = 0$
के समीकरणों को सममित रूप में प्रकट करो। (4)

मूल्यांकन रूपरेखा

(प्रतिदर्श प्रश्नपत्र के लिए)

विषय : गणित पत्र : उच्चतर माध्यमिक

1. $ai(3 + bi) = 3 - 7i$

$\Rightarrow \quad 3ai + ab(i)^2 = 3 - 7i$ (½)

$\Rightarrow \quad 3ai - ab = 3 - 7i$ (½)

$3a = -7$ | $-ab = 3$

$\Rightarrow \quad a = \frac{-7}{3}$ | $\Rightarrow \quad -\left(\frac{-7}{3}\right) b = 3$ (½ + ½)

$\Rightarrow \quad \frac{7}{3} b = 3$

$\Rightarrow \quad b = \frac{9}{7}$

$a = \frac{-7}{3}, \quad b = \frac{9}{7}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A^2 + I = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (½)

$= \begin{pmatrix} 4+5 & 10+15 \\ 2+3 & 5+9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (½)

$= \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (½)

$= \begin{pmatrix} 9+1 & 25+0 \\ 5+0 & 14+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 25 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$ (½)

3. सिद्ध कीजिए कि,

$$^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$$

वाम पक्ष $= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$ (½)

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r+1}\right] \qquad (½)$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}\right]$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \qquad (½)$$

$= {}^{n+1}C_r$ परिभाषा से (½)

अत: सिद्ध हुआ

4. पहले लड़कों को 4 कुर्सियों पर 4! विधियों से बैठाया जा सकता है तथा 3 लड़कियों को 3! विधियों से बैठाया जा सकता है।

ऐसी व्यवस्था की कुल संख्या है

$4! \times 3!$ (1)

$= 4.3.2.1 \times 3.2.1$ (½)

= 144 विधियाँ (½)

5. $\sin^6\theta + \cos^6\theta$

$= \left(\sin^2\theta\right)^3 + \left(\cos^2\theta\right)^3$ (½)

$= \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta - \sin^2\theta\ \cos^2\theta\right)$ (½)

$= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)^2 - 3\sin^2\theta\ \cos^2\theta$ (½)

$= 1 - 3\ \sin^2\ \theta\ \cos^2\ \theta.$ (½)

6. $\tan 56°$

$= \tan(45° + 11°)$ (½)

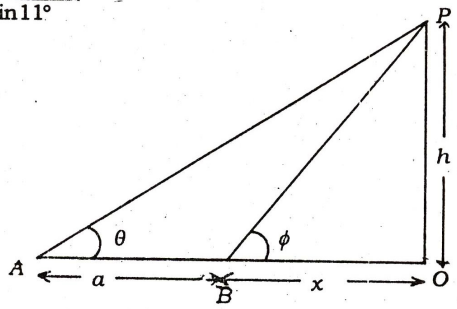
$$= \frac{\tan 45° + \tan 11°}{1 - \tan 45° \tan 11°} \qquad (½)$$

$$= \frac{1 + \tan 11°}{1 - \tan 11°}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\sin 11°}{\cos 11°}}{1 - \dfrac{\sin 11°}{\cos 11°}} \qquad (½)$$

$$= \frac{\cos 11° + \sin 11°}{\cos 11° - \sin 11°}$$ (½)

7. मान लीजिए $BO = x$



ΔPBO में

$\frac{x}{h} = \cot \phi$ (½)

इसी प्रकार, ΔPAO में

$\frac{a+x}{h} = \cot \theta$ (½)

$\Rightarrow \quad \frac{a + h \cot \phi}{h} = \cot \theta$ (½)

$\Rightarrow \quad a + h \cot \phi = h \cot \theta$

$\Rightarrow \quad a = h (\cot \theta - \cot \phi)$

$\Rightarrow \frac{a}{\cot \theta - \cot \phi} = h.$ (½)

8. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx}$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{ax}{bx} \cdot \frac{bx}{\tan bx} \right)$ (½+½)

$= \frac{a}{b} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \right) \lim_{x \to 0} \left(\frac{bx}{\tan bx} \right)$ (½)

$= \frac{a}{b} \cdot 1 \cdot 1$

$= \frac{a}{b}$ (½)

9. सिद्ध करना है: $(1 - w + w^2)^7 + (1 + w - w^2) = 128$

हमें ज्ञात है कि $1 + w + w^2 = 0$, $w^3 = 1$.

$\therefore$ वाम पक्ष $= (-w \ -w)^7 + (-w^2 - w^2)^7$ (½+½)

$= (-2w)^7 + (-2w^2)^7$ (½ + ½)

$= -128\ (w^7 + w^{14})$

$= -128\left[\left(w^3\right)^2 \cdot w + \left(w^3\right)^4 \cdot w^2\right]$

$= -128\ (w + w^2)$ (½)

$= -128\ (-1) = 128.$ (½)

10. $\begin{vmatrix} -x^2 & xy & xz \\ xy & -y^2 & yz \\ xz & zy & -z^2 \end{vmatrix}$

$= xyz \begin{vmatrix} -x & x & x \\ y & -y & y \\ z & z & -z \end{vmatrix}$ (1)

$= x^2\ y^2\ z^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (1)

$= x^2\ y^2\ z^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (½)

(सारणिक का प्रसार प्रथम स्तम्भ के सापेक्ष करने पर)

$= x^2\ y^2\ z^2\ 2\ (1+1)$ (½)

$= 4x^2y^2z^2$

11. हमें ज्ञात है कि,

$0.\overline{5}$ $= 0.5555 \ldots\ldots$ (½)

$= 0.5 + 0.05 + 0.005 + \ldots\ldots$ (½)

$= \dfrac{0.5}{1-(0.1)}$ (½+½)

(यह एक अपरिमित गुणोत्तर श्रेणी है जिसका प्रथम पद 0.5 तथा सार्वानुपात 0.1 है)

$= \dfrac{0.5}{0.9}$ (½)

$= \dfrac{5}{9}$ (½)

12. माना कि (4, 2) तथा (5, 5) को मिलाने वाले रेखाखंड को (3, –1), $K : 1$ के अनुपात में बांटता है। (1)

$\therefore \quad \frac{5k+4}{k+1} = 3$ (1)

या $5k + 4 = 3k + 3$

या $2k = -1$

या $k = \frac{-1}{2}$ (½)

$\therefore$ वंछित बाह्य अनुपात 1:2 (½)

13. मान लीजिए कि वृत्त का व्यापक समीकरण

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + C = 0$ है। (i) (½)

चूंकि (i), (0, 0), (4, 0) तथा (0, 5) से होकर जाता है,

$\therefore$ हमें प्राप्त हुआ

$C = 0$ (ii)

$16 + 8g + C = 0$ (iii) (½+½+½)

$25 + 10f + C = 0$ (iv)

(ii), (iii) तथा (iv) से हमें प्राप्त हुआ

$8g = -16$

$\Rightarrow \quad g = -2$ (½)

तथा $f = \frac{-5}{2}$

इन मानों को (i) में रखने पर हमें प्राप्त हुआ

$x^2 + y^2 - 4x - 5y = 0$ (½)

14. माना $f(x) = \sqrt{ax}$ (½)

$f(x + \delta x) = \sqrt{a(x + \delta x)}$

$f(x + \delta x) - f(x) = \sqrt{a(x + \delta x)} - \sqrt{ax}$ (½)

$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \frac{\sqrt{a(x+\delta x)} - \sqrt{ax}}{\delta x}$

$$= \left(\frac{\sqrt{a(x+\delta x)} - \sqrt{ax}}{\delta x}\right)\left(\frac{\sqrt{a(x+\delta x)} + \sqrt{ax}}{\sqrt{a(x+\delta x)} + \sqrt{ax}}\right) \qquad (½)$$

$$= \frac{a(x+\delta x) - ax}{\delta x\left[\sqrt{a(x+\delta x)} + \sqrt{ax}\right]}$$

$$= \frac{a\delta x}{\delta x\left[\sqrt{a(x+\delta x)} + \sqrt{ax}\right]} \qquad (½)$$

$\delta x \to 0$ सीमांत लेने पर

$$\therefore \quad \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+\delta x)} + \sqrt{ax}} \qquad (½)$$

$$f'(x) = \frac{a}{\sqrt{ax} + \sqrt{ax}}$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{ax}} \qquad (½)$$

15. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 27$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - 9 \qquad = x^2 - 9 \qquad (½)$$

$$= (x+3)(x-3) \qquad (½)$$

वर्धमान फलन के लिए,

$f'(x) > 0$

$x^2 - 9 > 0$

(i) $(x-3)(x+3) > 0$

$x > 3, x > -3 \quad \Rightarrow \boxed{x > 3}$ (½)

(ii) $x + 3 < 0$ तथा $(x-3) < 0$

$x < -3$ तथा $x < 3 \Rightarrow \boxed{x < -3}$ (½)

ह्रासमान फलन के लिए,

$x^2 - 9 < 0$

(i) $(x + 3)(x - 3) < 0$

$x + 3 < 0$ and $x - 3 > 0$

$x < -3$ and $x > 3$

कोई हल नहीं (½)

(ii) $x + 3 > 0$ and $x - 3 < 0$

$x > -3$ and $x < 3$

$-3 < x < 3$ (½)

16. $\int \frac{1}{(x+3)(2x+3)} dx$ यह फलन परिमेय है अत: निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$\frac{1}{(x+3)(2x+3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x+3} \quad \text{(i)} \qquad (½)$$

जहां A तथा B को प्राप्त करना है

$1 = A(2x + 3) + B(x + 3)$

माना $x = -3$, तो $A = -\frac{1}{3}$ (½)

माना $x = -\frac{3}{2}$, तो $B = \frac{2}{3}$ (½)

इन मानों को (i) में रखने पर हमने पाया कि

$$-\int \frac{1}{3(x+3)} dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{2x+3} dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log|x+3| + \frac{2}{3}\left[\log|2x+3|\right]\frac{1}{2} + C \qquad (½+½)$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{2x+3}{x+3}\right| + C \qquad (½)$$

17. $\frac{(1+3x^2)}{(1-x^2)^3} = (1 + 3x^2)(1 - x^2)^{-3}$

$$= (1+3x^2)\left[1 + 3x^2 + \frac{3.4}{2!}x^4 + \frac{3.4.5}{3!}x^6 + \right.$$

$$\left. \frac{3.4.5.6}{4!}x^8 + \frac{3.4.5.6.7}{5!}x^{10} + \ldots\ldots\right] \qquad (1)$$

x^{10} का गुणांक है

$$\frac{3.4.5.6.7}{5.4.3.2.1} + 3 \cdot \frac{3.4.5.6}{4.3.2.1} \quad (1)$$

$$= 21 + 45 = 67 \quad (1)$$

प्रतिबंध $|x| < 1$ (1)

18. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

या $\sin x + \sin 3x + \sin 2x = 0$ (½)

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin\left(\frac{x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) + \sin 2x = 0$$

$\Rightarrow 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$ (½)

$\Rightarrow \sin 2x [2 \cos x + 1] = 0$ (1)

$\sin 2x = 0$ अथवा $2 \cos x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x = n\pi$ | $\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{2}$ | $\Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$ (1+1)

| $\Rightarrow x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

19. $5x^2 + 24y = 0$

$\Rightarrow 5x^2 = -24y$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-24}{5} y$$

$$\Rightarrow x^2 = 4\left(\frac{-6}{5}\right) y \quad (½)$$

शीर्ष (0, 0) है (½)

नाभि $(0, a)$ यहां $a = \frac{-6}{5}$

$\therefore$ नाभि $\left(0, \frac{-6}{5}\right)$ है (1)

नियता

$y = -a$

$\Rightarrow y + a = 0$

$\Rightarrow \quad y + \left(\frac{-6}{5}\right) = 0$, यहाँ $a = \frac{-6}{5}$

$\Rightarrow \quad 5y - 6 = 0$ (1)

नाभिलम्ब की लम्बाई

$= 4a$

$= 4\left(-\frac{6}{5}\right)$

$= \left|-\frac{24}{5}\right| = \frac{24}{5}$ (1)

20. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \cos x$

$\frac{dy}{dx}$ का गुणांक ईकाई है (½)

अत:, समाकलन गुणनखण्ड होगा

$e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log |x|} = x$ (1)

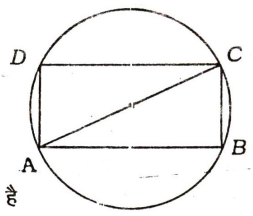
दोनों पक्ष को समाकलन गुणनखण्ड अर्थात x से गुणा करने पर, और समाकलन करने पर

$xy = \int x \cos x \, dx$ (1)

$= x(\sin x) - \int \sin x \, dx$ (½)

$\therefore \quad xy = x \sin x + \cos x + C$ (1)

21. मान लीजिए कि वृत्त का अर्धव्यास a है



$ABCD$ एक आयात होने से $\angle B = 90°$

$\therefore$ AC एक विकर्ण है

मान लीजिए कि AB तथा BC क्रमश: x तथा y है

$\therefore \; x^2 + y^2 = 4a^2$ (1)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, हम पाते हैं

$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ (1)

मान लीजिए $A(x) = xy$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$A'(x) = y + x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{या } y + x\left(\frac{-x}{y}\right) = 0$$

$$\text{या } \quad -x^2 + y^2 = 0$$

$$\text{या } \quad x = y \qquad (1)$$

$\Rightarrow ABCD$ एक वर्ग है

पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$A''(x) = -2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$= -2x + 2y\left(\frac{-x}{y}\right)$$

$$= -2x - 2x = -4x < 0$$

अत: क्षेत्रफल महत्तम है जब आयत एक वर्ग है। (1)

22. मान लीजिए $\sqrt{-15 - 8i} = x + iy$ (½)

$\Rightarrow \quad -15 - 8i = x^2 - y^2 + 2ixy$ (½)

$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = -15 \qquad$ (i) (½+½)

और $\quad 2xy = -8 \qquad$ (ii)

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$$

$$= (-15)^2 + 64$$

$$= 225 + 64 = 289$$

$\therefore \quad x^2 + y^2 = 17 \qquad$ (iii) (½)

(i) एवं (iii) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त हुआ

$$2x^2 = 2$$

$\Rightarrow \quad x^2 = 1$

$\Rightarrow \quad x = \pm 1$ (½)

$\Rightarrow \quad y = \pm 4$ (½)

(ii) से, हमने यह निष्कर्ष निकाला कि x और y विपरीत चिन्हों के हैं।

अतः, अभीष्ठ वर्गमूल $\pm(1-4i)$ है (½)

अब संगत द्वितीय समीकरण, व्यंजक $-15+8i$ के लिए, $2xy = 8$ है।

जिसका अर्थ है कि x तथा y का चिन्ह एक ही होगा

$\therefore$ अभीष्ट वर्गमूल है

$\pm(1+4i)$ (1)

23. $x + y + z = 6$

$2x - y + z = 3$

$x - 2y + 3z = 6$

दिए हुए समीकरणों को $AX = B$ के रूप में लिख सकते हैं, जहां

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3+2) + 1(1-6) + 1(-4+1)$$
$$= -1 - 5 - 3 = -9 \neq 0$$

यह एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है.

$\therefore$ A^{-1} का अस्तित्व है। (1)

$a_{11} = -1, \quad a_{12} = -5, \quad a_{13} = -3$

$a_{21} = -5, \quad a_{22} = 2, \quad a_{23} = 3$

$a_{31} = 2, \quad a_{32} = 1, \quad a_{33} = -3$

सहखण्डज $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ (1½)

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$ (1)

$$= -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -6-15+12 \\ -30+6+6 \\ -18+9-18 \end{bmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ -27 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (½+½+½)$$

$\therefore \quad x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$

24. $\dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \dfrac{1}{6\cdot 7} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{2n(2n+1)} + \ldots\ldots \infty$

$$T_n = \frac{1}{2n(2n+1)} \qquad (1)$$

$$T_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \qquad (½)$$

n के स्थान पर 1, 2, 3 ..... रखने पर, हमने पाया

$$T_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$T_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$T_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \qquad (1)$$

$$T_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$$

जोड़ने पर, हमें प्राप्त हुआ

$$T_1 + T_2 + \ldots\ldots + T_n + \ldots\ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\ldots\right) \qquad (½)$$

$$= 1 - \log(1+1) \qquad (½)$$

$$= 1 - \log 2 \qquad (½)$$

25. $e^{\sin^{-1}x} + x^y + y^x = C$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

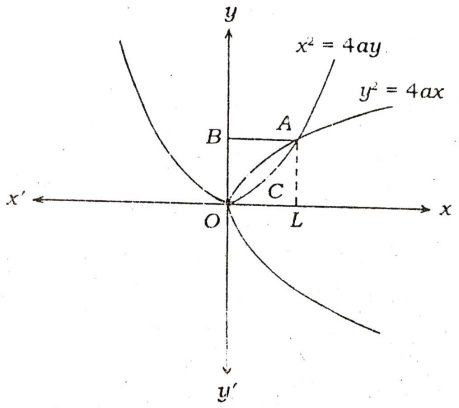
$$\frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} + x^y\left(\frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}\right) + y^x\left(\log y + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad (1+1+1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} + x^{y-1} \cdot y + x^y \log x \frac{dy}{dx} + y^{x-1} \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x^y \log x + y^{x-1}x\right)\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} + yx^{y-1} + y^x \log y\right) \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} + yx^{y-1} + y^x \log y}{x^y \log x + y^{x-1}x}\right) \qquad (1)$$

26.



$x^2 = 4ay$ (½ mark for the graph)

$y^2 = 4ax$

प्रतिच्छेद बिंदु

$O(0, 0)$, $A(4a, 4a)$ है (½)

दोनों का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल

= क्षेत्रफल $(OBAL)$ – क्षेत्रफल $(OCAL)$ (½)

$$= \int_0^{4a} y\,dx - \int_0^{4a} y\,dx \qquad (½+½)$$

$$= \int_0^{4a} \sqrt{4ax}\, dx - \int_0^{4a} \frac{x^2}{4a} dx \qquad (½+½)$$

$$= 2\sqrt{a} \left| \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^{4a} - \frac{1}{4a} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^{4a} \qquad (½)$$

$$= 2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{3} \cdot (4a)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12a} \cdot 64a^3 \qquad (½)$$

$$= \frac{32}{3}a^2 - \frac{16}{3}a^2 \quad \left(\because (4)^{\frac{3}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8\right)$$

$$= \frac{16}{3}a^2 \text{ वर्ग ईकाई} \qquad (½)$$

27. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2-3}} dx$

$2x - 3 = \lambda(4 - 2x) + \mu$

$2 = -2\lambda \Rightarrow \lambda = -1$

$-3 = 4\lambda + \mu = -4 + \mu \Rightarrow \mu = 1$] (1)

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2-3}} dx = \int \left[\frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}} - \frac{4-2x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} \right] dx \qquad (1)$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} - \int \frac{4-2x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx$$

$4x - x^2 - 3 = t$ रखने पर

$\Rightarrow (4 - 2x)\, dx = dt$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x-2}{1}\right) - \int \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} + C \qquad (1+1)$$

$$= \sin^{-1}(x-2) - \int t^{-1/2} dt + C$$

$= \sin^{-1}(x-2) - 2\sqrt{t+C}$ $(\frac{1}{2})$

$= \sin^{-1}(x-2) - 2\sqrt{4x-x^2-3+C}$ $(\frac{1}{2})$

विकल्प – I
(सांख्यिकी तथा प्रायिकता)

28.

उपज प्रति हेक्टेयर (क्विंटल में)	खेतों की संख्या x_i	वर्ग चिन्ह x_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
31–35	2	33	–17	289	578
36–40	3	38	–12	144	432
41–45	8	43	–7	49	392
46–50	12	48	–2	4	48
51–55	16	53	+3	9	144
56–60	5	58	+8	64	320
61–65	2	63	+13	169	338
66–70	2	68	+18	324	648
कुल	50				2900

सही $(x_i-\bar{x})$, $(x_i-\bar{x})^2$ तथा $\sum f_i(x_i-\bar{x})^2$ ज्ञात करने के लिए – प्रत्येक के लिए $\frac{1}{2}$ अंक

अतः $\sigma_g^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$ $(\frac{1}{2})$

$= \dfrac{2900}{50} = 58$ $(\frac{1}{2})$

और $\sigma_g = +\sqrt{58} = 7.61$ (लगभग) $(\frac{1}{2})$

29. (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0.8 + 0.6 - 0.5$
$= 0.9$ (1)

(ii) $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.5}{0.8} = \dfrac{5}{8}$ (1)

(iii) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.5}{0.6} = \dfrac{5}{6}$ (1)

30. यहां $n = 10$

दोनों पासों पर एक ही संख्या निम्न 6 विकलों से प्राप्त की जा सकती है: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)

$\therefore \quad p = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ $(\frac{1}{2})$

$q = \frac{5}{6}$ $(\frac{1}{2})$

$(p + q)^n = {}^nC_0\, p^n + {}^nC_1\, p^{n-1}\, q + ... + {}^nC_n\, q^n$ (1)

P (4 सफलता) $= {}^{10}C_4\, P^4\, q^6$

$= \frac{10.\,9.\,8.\,7}{4.3.2.1}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6$

$= 210 \times \frac{5^6}{6^{10}} = \frac{7 \times 5^7}{6^9}$ (1)

P (कोई सफलता नही) $= {}^{10}C_0\, p^0\, q^{10}$

$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ (1)

विकल्प – II
(रैखिक प्रोग्रामन)

28. दिए हुए प्रश्न को महत्तम प्रश्न के रूप में बदलने पर हमने पाया

$z_1 = -z \quad = -x_1 - x_2$

$-2x_1 - x_2 \le -4$

$-x_1 - 7x_2 \le -7$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

ऋणेतर चरांकों का प्रयोग करके भिन्न समीकरण बनाया,

$-2x_1 - x_2 + s_1 = -4$

$-x_1 - 7x_2 + s_2 = -7$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, s_1 \ge 0, s_2 \ge 0$

प्रारम्भिक सिम्पलेक्स सारणी

	x_1	x_2	s_1	s_2	z_1		
	–2	–1	1	0	0	–4	s_1
→	–1	(–7)	0	1	0	–7	s_2
	1	1	0	0	1	0	z_1

(1)

R_2 को –7 से विभाजित करके $R_1 + R_2$, तथा $R_3 - R_2$, संक्रिया करने पर हमें निम्न सारणी प्राप्त हुई

	x_1	x_2	s_1	s_2	z_1		
	$(-\frac{13}{7})$	0	1	$-\frac{1}{7}$	0	–3	s_1
→	$\frac{1}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$	0	1	x_2
	$\frac{6}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	1	–1	z_1

(1)

R_1 को $-\frac{13}{7}$ से विभाजित करने पर तथा संकारक

$R_2 - \frac{1}{7}R_1$, $R_3 - \frac{6}{7}R_1$ लगाने पर, हमें निम्नलिखित सारणी प्राप्त हुई

x_1	x_2	s_1	s_2	z_1		
1	0	$-\frac{7}{13}$	$\frac{1}{13}$	0	$\frac{21}{13}$	x_1
0	1	$\frac{1}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0	$\frac{10}{13}$	x_2
0	0	$\frac{6}{13}$	$\frac{1}{13}$	1	$-\frac{31}{13}$	z_1

$(\frac{1}{2})$

अतः इष्ट हल है,

अधिकतम $z_1 = -\frac{31}{13}$, $\therefore$ न्यूनतम् $z = \frac{31}{13}$

यह $x_1 = \frac{21}{13}$, $x_2 = \frac{10}{13}$, $s_1 = 0$ तथा $s_2 = 0$ पर पाया जाता है। $(\frac{1}{2})$

29. **पंक्ति समानयन**

मनुष्य → / कार्य ↓	A	B	C	D
I	0	2	9	1
II	0	5	2	3
III	1	3	2	0
IV	0	7	3	1

$(\frac{1}{2})$

स्तम्भ समानयन

मनुष्य → / कार्य ↓	A	B	C	D
I	0	0	7	1
II	0	3	0	3
III	1	1	0	0
IV	0	5	1	1

$(\frac{1}{2})$

निर्दिष्ट शून्य

मनुष्य → / कार्य ↓	A	B	C	D
I	~~0~~	[0]	7	1
II	~~0~~	3	[0]	3
III	1	1	~~0~~	[0]
IV	[0]	5	1	1

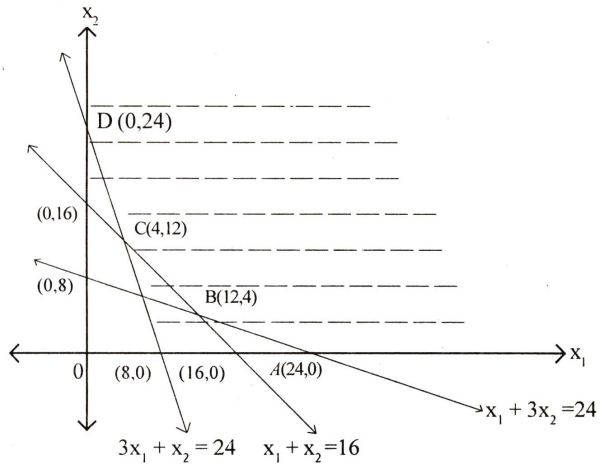
(1)

यहां कुल निर्दिष्ट शून्य = 4 (अर्थात् पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या)

इस प्रकार आबंटन इष्टतम है

सारणी से हमें, I → *B*; II → *C*; III → *D* and IV → *A* (1)

30.



असमीकरणों के आलेख $(1\frac{1}{2})$

उपयुक्त क्षेत्र - शीर्ष $(\frac{1}{2})$

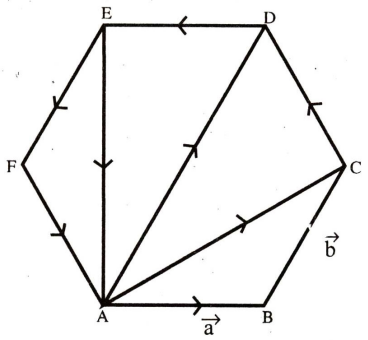
$Z = 60\,x_1 + 40x_2$ के मान

शीर्ष A (24,0) = 1440
B (12,4) = 880
C (4,12) = 720
D (0,24) = 960 (1)

∴ $x_1 = 4$, $x_2 = 12$ के लिए Z का न्यूनतम मान (1)
= 720

विकल्प – III

(सदिश और विश्लेषिक ठोस ज्यामिति)



28.

(i) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ $(\frac{1}{2})$

$= \vec{a} + \vec{b}$

(ii) $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ $(\frac{1}{2})$

$= 2\vec{b}$

(iii) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ $(\frac{1}{2})$

$= 2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a}$ $(\frac{1}{2})$

$\therefore \quad \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$ $(\frac{1}{2})$

$= -\vec{b} - \overrightarrow{CD}$

$= -\vec{b} - (\vec{b} - \vec{a})$ $(\frac{1}{2})$

$= \vec{a} - 2\vec{b}$

29. बिन्दु $(-1, 1, 1)$ से गुज़रने वाले समतल का समीकरण है

$a(x + 1) + b(y - 1) + (z - 1) = 0$ .... (i) $(\frac{1}{2})$

$\therefore$ बिन्दु $(1, -1, 1)$ इस समतल में है

$\therefore \quad 2a - 2b + 0.c = 0$ .... (ii) $(\frac{1}{2})$

पुनः समतल (i) समतल $x + 2y + 2z - 5 = 0$ पर लम्ब है

$\therefore \quad a + 2b + 2c = 0$ .... (iii) $(\frac{1}{2})$

(ii) और (iii) को वज्रगुण्न विधि द्वारा हल करने पर,

$$\frac{a}{-4-0} = \frac{b}{0-4} = \frac{c}{4+2}$$

या $\quad \frac{a}{2} = \frac{b}{2} = \frac{c}{-3}$ $(\frac{1}{2})$

$\therefore$ समतल का अभीष्ट समीकरण है

$2(x+1) + 2(y-1) - 3(z-1) = 0$ (1)