निदानात्मक कक्षाओं हेतु मॉड्यूल

सत्र 2023-24

कक्षा-9वीं

विषय : गणित

पढ़े चलो, बढ़े चलो

समग्र शिक्षा अभियान (सेकेण्डरी एजुकेशन)
लोक शिक्षण संचालनालय, भोपाल (म.प्र.)

निदानात्मक कक्षाओं हेतु मॉड्यूल

सत्र 2023-24

कक्षा : 9वीं

विषयः गणित

पढ़े चलो, बढ़े चलो

समग्र शिक्षा अभियान (सेकेण्डरी एजुकेशन) लोक शिक्षण संचालनालय,
म.प्र., भोपाल

आमुख

प्रदेश के शासकीय हाई/हायर सेकेण्डरी स्कूलों में अध्ययनरत विद्यार्थियों का **गणित** विषय का परीक्षा परिणाम अपेक्षाकृत कम रहता है। यह देखा गया है कि **गणित** विषय विद्यार्थियों को कठिन एवं अरूचिकर लगता है। जिसका संकेत परीक्षा परिणामों में परिलक्षित होता है।

विद्यार्थियों के लिए **गणित** विषय को रूचिकर बनाने के दृष्टिकोण से इस मॉड्युल का निर्माण किया गया है। यह मॉड्युल विषयवस्तु को सरल एवं सहज तरीके से विद्यार्थियों में विषय की सामान्य समझ बनाने हेतु स्टेट असेसमेंट सेल के विषय विशेषज्ञों द्वारा तैयार किया गया है।

त्रैमासिक परीक्षा में डी एवं ई ग्रेड के विद्यार्थियों का चिन्हांकन आपके द्वारा कर लिया गया होगा। यदि आपके स्कूल में एक से अधिक सेक्शन है तो विद्यार्थियों के ग्रेड के आधार पर सेक्शन में विद्यार्थियों का पुनर्वितरण कर दें। तथा एक ग्रेड के विद्यार्थियों को एक सेक्शन में रखें ताकि उन विद्यार्थियों को उनके स्तर के अनुरूप पढाया जाये।

यह रेमेडियल मॉड्युल मुख्यतः डी एवं ई ग्रेड के विद्यार्थियों के लिए है अतः इसमें कठिन अवधारणाओं वाले प्रश्नों का समावेश कम से कम किया गया है। शिक्षक अपनी सुविधानुसार कठिन अवधारणा वाले प्रश्नों को भी विद्यार्थियों को हल कराएं।

इस मॉड्युल में **गणित** विषय की सरल एवं महत्वपूर्ण सामग्री को समाहित किया गया है। ताकि औसत विद्यार्थियों में विषय की समझ बन सके एवं वे आगामी परीक्षाओं में बेहतर प्रदर्शन कर सकें।

माध्यमिक शिक्षा मण्डल, मध्यप्रदेश, भोपाल
हाईस्कूल परीक्षा सत्र 2023-24

अंक योजना

कक्षा - 9वीं पूर्णांक :- 75 **विषय - गणित समय :- 3:00 घंटे**

क्र	अध्याय	आवंटित अंक
1	अध्याय - 1 संख्या पद्धति - भूमिका, अपरिमेय संख्याएँ, वास्तविक संख्याएँ और उनके दशमलव प्रसार, वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ, वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक नियम, सारांश	6
2	अध्याय - 2 बहुपद - भूमिका,एक चर वाले बहुपद, बहुपद के शून्यक, बहुपदों का गुणनखण्डन, बीजीय सर्वसमिकाएँ, सारांश	10
3	अध्याय- 3 निर्देशांक ज्यामिति - भूमिका, कार्तीय पद्धति, सारांश	8
4	अध्याय- 4 दो चरों वाले रेखीय समीकरण -भूमिका, रैखिक समीकरण, रैखिक समीकरणों का हल, सारांश	8
5	अध्याय- 5 यूक्लिड ज्यामिति का परिचय - भूमिका, यूक्लिड की परिभाषाएँ, अभिगृहीत और अभिधाराणाएँ, सारांश	3
6	अध्याय- 6 रेखाएँ और कोण - भूमिका, आधारभूत पद और परिभाषाएँ, प्रतिच्छेदी रेखाएँ, और अप्रतिच्छेदी रेखाएँ, कोणों के युग्म, एक ही रेखा के समान्तर रेखाएँ, सारांश	5
7	अध्याय-7 त्रिभुज - भूमिका, त्रिभुजों की सर्वांगसमता, त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कसौटियाँ, एक त्रिभुज के कुछ गुण, त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ और कसौटियाँ, सारांश	5
8	अध्याय- 8 चतुर्भुज- भूमिका, समान्तर चतुर्भुज के गुण, मध्य बिंदु प्रमेय, सारांश	7
9	अध्याय- 9 वृत्त -जीवा द्वारा एक बिंदु पर अंतरित कोण, केंद्र से जीवा पर लम्ब, समान जीवाएँ और उनकी केंद्र से दूरियाँ, एक वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण, चक्रीय चतुर्भुज, सारांश	6
10	अध्याय- 10 हीरोन का सूत्र- त्रिभुज का क्षेत्रफल - हीरोन के सूत्र द्वारा, सारांश	5
11	अध्याय- 11 पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन - लम्ब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल, गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल, लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन, गोले का आयतन, सारांश	6
12	अध्याय- 12 सांख्यकी - आंकड़ों का आलेखीय निरूपण, सारांश	6
	योग	75

अनुक्रमणिका

क्र	अध्याय (वरीयता क्रमानुसार)	पृष्ठ संख्या
1	अध्याय–1. संख्या पद्धति	1–9
2	अध्याय–2. बहुपद	10–17
3	अध्याय–3. निर्देशांक ज्यामिति	18–24
4	अध्याय–4. दो चरों वाले रैखिक समीकरण	25–31
5	अध्याय–12. सांख्यकी	32–40
6	अध्याय–10. हीरोन का सूत्र	41–45
7	अध्याय–11. पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	46– 51
8	अध्याय–6. रेखाएँ और कोण	52–57
9	अध्याय–7. त्रिभुज	58–62
10	अध्याय–9. वृत्त	63–67
11	अध्याय–8. चतुर्भुज	68–72
12	अध्याय–5. यूक्लिड ज्यामिति का परिचय	73–80

अध्याय-1
संख्या पद्धति

संख्या रेखा, प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक संख्याएँ, परिमेय संख्याएँ :

पिछली कक्षाओं में आप संख्या रेखा पर संख्याओं के निरूपण के सम्बन्ध में पढ़ चुके हैं। मान लीजिए आप शून्य से इस रेखा पर धनात्मक दिशा में चलकर संख्याओं को उठाते जा रहें हैं। आप 1,2,3.....आदि जैसी प्राकृतिक संख्याओं को उठाते जा रहें हैं जो अनंत तक फैली हुयी हैं। संख्याओं का यह संग्रह प्राकृतिक संख्याओं का संग्रह (Collections of Natural numbers) कहलाता है जिसे प्रतीक N से निरुपित करते हैं।

अब आप पीछे घूमकर विपरीत दिशा में चलकर शून्य को उठाइए तो यह संग्रह पूर्ण संख्याओं (Wholenumbers) का संग्रह बन जाता है। जिसे प्रतीक W से प्रकट करते हैं।

अब आगे आपको अनेकानेक ऋणात्मक पूर्णांक दिखाई देते हैं। इन्हें क्रमानुसार उठाते जाएँ तो यह संग्रह पूर्णांकों(Integers) का संग्रह है और इसे Z से प्रकट करते हैं।

क्या अभी भी संख्या रेखा पर संख्याएं बची रहती है? तो निश्चित रूप से $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ या $\frac{-2005}{2006}$ जैसी संख्याएँ है इन सभी का संग्रह परिमेय संख्याओं (Rational numbers) का संग्रह बन जाएगा। इस संग्रह को Q से प्रकट करते हैं। परिमेय संख्याओं की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है कि :

एक संख्या R एक परिमेय संख्या कहलाती है, यदि $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके। जहाँ p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ जैसे:- $\frac{5}{7}, \frac{11}{9}$ इत्यादि ।

दो परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होतीं हैं।

प्रश्न 1. 3 और 4 के बीच छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : संख्याएँ 3 और 4 के बीच अनंततः अनेक परिमेय संख्याएँ हो सकती है, हमें छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात करना है:

$$\therefore 3 = 3 \times \frac{6+1}{6+1} = 3 \times \frac{7}{7} = \frac{21}{7}$$

एवं $$4 = 4 \times \frac{6+1}{6+1} = 4 \times \frac{7}{7} = \frac{28}{7}$$

अतः 3 और 4 के बीच छः परिमेय संख्याएँ है : $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$

प्रश्न 2. $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच पांच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : हमें पांच परिमेय संख्याएँ ज्ञात करना है।

$$\therefore \quad \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5+1}{5+1} = \frac{3}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{18}{30}$$

एवं $$\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5+1}{5+1} = \frac{4}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{24}{30}$$

अत: $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच पांच परिमेय संख्याएँ है :

$\frac{19}{30}, \frac{20}{30}, \frac{21}{30}, \frac{22}{30}, \frac{23}{30}$

अपरिमेय संख्याएँ :

अभी तक आपने संख्याओ R एक परिमेय संख्या जो $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त की जाती हैं, जहाँ p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है। क्या ऐसी भी संख्याएँ हैं जो इस रूप में नहीं व्यक्त होती हैं। अत:

एक संख्याय S को अपरिमेय संख्या कहा जाता है, यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में न लिखा जा सके। जहाँ p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है।

हम जानते हैं कि अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होतीं हैं। इसी प्रकार, अपरिमेय संख्याएँ भी अपरिमित रूप से अनेक होतीं हैं।

वास्तविक संख्याएँ और उनके दशमलव प्रसार :

प्रश्न 3. निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव रूप में लिखिए और बताइए कि प्रत्येक का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है ?

(1) $\frac{10}{3}$ (2) $\frac{7}{8}$ (3) $\frac{1}{7}$

हल :

	3.333
3	10
	−9
	10
	−9
	10
	−9
	10
	−9
	1

	0.875
8	7
	−0
	70
	−64
	60
	−56
	40
	−40
	0

	0.142857
7	1
	−0
	10
	−7
	30
	−28
	20
	−14
	60
	−56
	40
	−35
	50
	−49
	1

यहाँ $\frac{1}{3}$ एवं $\frac{1}{7}$ अनवसानी आवर्ती (non&terminating recurring) या असांत आवर्ती है एवं $\frac{7}{8}$ सांत (terminating) है।

दशमलव संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त करना जहाँ दशमलव संख्या असांत आवर्ती हो :

प्रश्न 4. निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$

(1) $0.\overline{6}$ (2) $0.4\overline{78}$

हल : (1) माना $x = 0.\overline{6} = 0.66666\ldots\ \ldots$

यहाँ एक अंक 6 की पुनरावृत्ति है, इसलिए हम x को 10 से गुणा करने पर

$10x = 6.6666\ldots\ \ldots = 6 + 0.66666\ldots\ \ldots$

$\Rightarrow 10x = 6 + x$

$\Rightarrow 10x - x = 6$

$\Rightarrow 9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

(2) माना $x = 0.4\overline{78} = 0.4787878\ldots\ \ldots$

यहाँ दो अंको 78 पुनरावृत्ति है, इसलिए हम x को 100 से गुणा करने पर

$100x = 47.8787878\ldots\ \ldots$

$\Rightarrow 100x = 47.4 + 0.4787878\ldots\ \ldots$

$\Rightarrow 100x = 47.4 + x$

$\Rightarrow 100x - x = 47.4$

$\Rightarrow 99x = 47.4$

$x = \frac{47.4}{99} = \frac{474}{990}$

वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ :

यहाँ हम वर्गमूलों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाएँ दे रहें हैं :

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

(iv) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$

(v) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} - \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + \sqrt{ab} + b$

इन सर्वसमिकाओं के आधार पर निम्न व्यंजकों के के सरलीकरण पर ध्यान दीजिए :

(i) $(5+\sqrt{7})(2+\sqrt{5}) = 10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $(5-\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) = 25-(\sqrt{5})^2 = 25-5 = 20$

(iii) $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 = 3+2\sqrt{3}\sqrt{7}+7 = 10+2\sqrt{21}$

(iv) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7}) = 11-7 = 4$

प्रश्न 5. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक व्यंजक को सरल कीजिए :

(1) $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$ (2) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

(3) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

हल : (1) $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$ $\left[\because (a+b)(a-b) = a^2-b^2\right]$

$= (3)^2-(\sqrt{3})^2$

$= 9-3$

$= 6$

(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$ $\left[\because (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\right]$

$= (\sqrt{5})^2+2(\sqrt{5})(\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2$

$= 5+2\sqrt{10}+2 = 7+2\sqrt{10}$

(3) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

$= 3(2+\sqrt{2})+\sqrt{3}(2+\sqrt{2})$

$= 6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

हर का परिमेयीकरण करना : परिमेयकरण : वर्गमूलों से संबंधित सर्वसमिकाओं के प्रयोग से हम हर को एक परिमेय संख्या के रूप में परिवर्तित कर सकते हैं ।

प्रश्न 6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए ।

हल: हम $\frac{1}{\sqrt{2}}$ को हमें एक ऐसे तुल्य व्यंजक के रूप में लिखना है जिसमे हर एक परिमेय सेख्या तथा हम जानते हैं कि $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ एक परिमेय है।

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

प्रश्न 7. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ का परिमेयकरण कीजिए ।

हल: $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$

प्रश्न 8. निम्नलिखित के हरों का परिमेयकरण कीजिए ।

(1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

हल: (1) हम जानमे है कि $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=7$ परिमेय संख्या है ।

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ को $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ से गुणा और भाग करने पर

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} \qquad \left[\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2\right]$$

$$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6}=\sqrt{7}+\sqrt{6}$$

(3) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ को $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ गुणा और भाग करने पर

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \qquad \left[\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2\right]$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

(4) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$ को $\sqrt{7}+2$ से गुणा और भाग करने पर

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{1}{\sqrt{7}-2}\times\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} \qquad \left[\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2\right]$$

$$=\frac{\sqrt{7}+2}{7-4}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{3}$$

वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक नियम :

पिछली कक्षाओं में आपने घातांक नियमों के विषय में अवश्य जाना होगा, आपको फिर से याद दिलाते हुए कि यदि आधार a और m व n घातांक हों तो ये नियम निम्नानुसार होते हैं :

(1) $a^m.a^n=a^{m+n}$ (2) $(a^m)^n=a^{mn}$

(3) $\frac{a^m}{b^n}=a^{m-n}, m>n$ (4) $a^m.b^m=(ab)^m$

तथा इनसे हम, $a^0=1$ तथा $\frac{1}{a^n}=a^{-n}$ भी प्राप्त कर सकते हैं।

अब हम इन नियमो को ऋणात्मक घातांकों पर भी लागू कर सकते हैं ।

उदाहरण (1) $17^2 \times 17^{-5} = 17^{-3}$ (2) $(5^2)^{-7} = 5^{-14}$

(3) $\dfrac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (4) $(7^{-3})(9^{-3}) = (63)^{-3}$

प्रश्न 9. सरल कीजिए।

(1) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}}$ (2) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$ (3) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (4) $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$

हल: (1) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}}$ $\left[\because a^m \cdot a^n = a^{m+n}\right]$

$= 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}} = 2^{\frac{10+3}{15}} = 2^{\frac{13}{15}}$

(2) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$ $\left[\because (a^m)^n = a^{mn}\right]$

$= \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3\times 7} = (3^{-1})^{21}$ $\left[\because \dfrac{1}{a} = a^{-1}\right]$

$= 3^{(-1)(21)} = 3^{-21}$

(3) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ $\left[\because \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n\right]$

$= 11^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 11^{\frac{2-1}{4}} = 11^{\frac{1}{4}}$

(4) $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$ $\left[\because a^m b^m = (ab)^m\right]$

$= (7\times 8)^{\frac{1}{2}} = (56)^{\frac{1}{2}}$

अभ्यास प्रश्न :वस्तुनिष्ट प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए।

1. एक परिमेय संख्या तथा अपरिमेय संख्या का योग अथवा अंतर एक संख्या होगी।
   (अ) परिमेय संख्या (ब) अपरिमेय संख्या
   (स) शून्य (अ) इनमे से कोई नहीं
2. सभी परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं को एक साथ लेने पर प्राप्त संख्याओं का संग्रह होता है।
   (अ) परिमेय (ब) अपरिमेय
   (स) शून्य (द) वास्तविक
3. दो परिमेय संख्याओं के बीच कितनी परिमेय संख्याएँ होती है?
   (अ) शून्य (ब) अनंत
   (स) केवल एक (द) केवल दो
4. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन सी है?
   (अ) 1 (ब) 10
   (स) 0 (द) 100

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

1. प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत संख्या रेखा पर एक ..... बिंदु होता है।
2. एक ..... संख्या का दशमलव प्रसार सांत या अनवसानी तथा आवर्ती होता है।
3. एक अपरिमेय संख्या का दशमलव प्रसार ..... होता है।
4. $\left[(100)^{\frac{1}{2}}\right]^2$ का मान .....है।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए।

1. संख्या S को अपरिमेय को संख्या कहा जाता यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ, p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है। (सत्य/असत्य)
2. प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या होती। (सत्य/असत्य)
3. प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है। (सत्य/असत्य)
4. प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्णांक होती है। (सत्य/असत्य)

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए।

1. एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार किस प्रकार का होता है?
2. ऐसी संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता हो, जहाँ, p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है, को क्या कहते हैं?
3. $\frac{1}{7}$ का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है?
4. $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेय संख्या लिखिए?

प्रश्न 5. सही जोड़ी बनाइए-

	कॉलम A		**कॉलम B**
1.	$(125)^{-\frac{1}{3}}$	(अ)	$(a)^{\frac{m}{n}}$
2.	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$	(ब)	$\frac{1}{5}$
3.	$\sqrt{\frac{12}{3}}$	(स)	a^{m+n}
4.	$a^m . a^n$	(द)	$a-b$
5.	$(a^m)^{\frac{1}{n}}$	(इ)	2

प्रश्न 6. सरल कीजिए: $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$

प्रश्न 7. सरल कीजिए: $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

प्रश्न 8. सरल कीजिए: $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

प्रश्न 9. सरल कीजिए: $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

प्रश्न 10. सरल कीजिए: $\left(\frac{1}{3}\right)^7$

प्रश्न 11. बताइए कि संख्या $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ परिमेय या अपरिमेय हैं।

प्रश्न 12. सरल कीजिए: $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

प्रश्न 13. सरल कीजिए: $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$

प्रश्न 14. $\frac{1}{3\sqrt{7}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

प्रश्न 15. सरल कीजिए: $125^{\frac{-1}{3}}$

प्रश्न 16. सरल कीजिए: $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$

प्रश्न 17. $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

प्रश्न 18. परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{9}{11}$ के बीच तीन अलग-अलग परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 19. $\frac{1}{2+\sqrt{7}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

प्रश्न 20. $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

प्रश्न 21. दिखाइए कि $1.272727 = 1.\overline{27}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते है।

प्रश्न 22. 1 और 2 के बीच पांच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 23. $\frac{7}{9}$ और $\frac{8}{9}$ के बीच छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 24. $0.2\overline{35}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ, p और q पूर्णांक है तथा $q \neq 0$ है।

प्रश्न 25. $\frac{1}{17}$ के दशमलव प्रसार में अंकों के पुनरावृत्ति खण्ड में अंकों की अधिकतम संख्या क्या हो सकती है। अपने उत्तर की जाँच करने के लिए विभाजन क्रिया कीजिए।

उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक 1.

1. (ब) अपरिमेय संख्या,
2. (द) वास्तविक
3. (ब) अनंत
4. (स) 0

प्रश्न क्रमांक 2,

1. अद्वितीय
2. परिमेय संख्या
3. अनवसानी तथा अनावर्ती
4. 100

प्रश्न क्रमांक 3.

1. असत्य
2. सत्य
3. सत्य
4. असत्य

प्रश्न क्रमांक 4.

1. सांत या अनवसानी तथा आवर्ती
2. अपरिमेय संख्या
3. अनवसानी तथा आवर्ती
4. 0.150150015000150000.....

प्रश्न क्रमांक 5.

कॉलम A	**कॉलम B**
1. $(125)^{-\frac{1}{3}}$	(ब) $\frac{1}{5}$
2. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$	(द) $a-b$
3. $\sqrt{\frac{12}{3}}$	(इ) 2
4. $a^m . a^n$	(स) a^{m+n}
5. $(a^m)^{\frac{1}{n}}$	(अ) $(a)^{\frac{m}{n}}$

अध्याय-2
बहुपद

एक चर वाले बहुपद :

गतिविधि-1

आप $2x, x^2+2x, x^3+4x+7$ जैसे अन्य बीजीय व्यंजकों से भी परिचित है। ध्यान रखने योग्य है कि अभी तक लिए गए सभी बीजीय व्यंजकों में चर के घातांक पूर्ण संख्यायें हैं इस रूप के व्यंजकों को एक चर वाले बहुपद कहते हैं।

उदाहरण के लिए x^3-x^2+4x+7 ,चर x में एक बहुपद है।

इसी प्रकार $3y^2-5y$ चर y में एक बहुपद है और t^2-4t चर t में एक बहुपद है।

उदाहरण: नीचे दिए गए प्रत्येक बहुपद की घात ज्ञात कीजिए।

(i) x^5-x^4+3 (ii) $-2y^2-y^3+2y^8$

हल : (i) x^5-x^4+3

बहुपद में चर की अधिकतम घात 5 है,

अत: बहुपद की घात 5 है।

(ii) $-2y^2-y^3+2y^8$

बहुपद में चर की अधिकतम घात 8 है,

अत: बहुपद की घात 8 है।

बहुपद का शून्यक :

गतिविधि 1. निम्नलिखित बहुपद लीजिए

$P(x) = 5x^3-2x^2+3x-2$

$P(x)$ में x के स्थान पर 1 करें तो हमें यह प्राप्त होता है :

$P(1) = 5\times(1)^3-2(1)^2+3\times1-2$

$=5\times1-2\times1+3-2$

$=5-2+1$

$=3+1$

$=4$

अत: हम कहते हैं कि $x=1$ पर $P(x)$ का मान 4 है।

उदाहरण : चरों के दिए गए मान पर नीचे दिए गए प्रत्येक बहुपद का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $x=1$ पर $P(x)=5x^2-3x+7$ का मान

(ii) $y=2$ पर $q(y)=3y^2-4y+11$ का मान

गतिवधि 2.

अब $P(x) = x - 1$ में x के स्थान पर 1 लेने पर $p(1) = 1 - 1 = 0$

प्राप्त होता है, इसलिए हम कहते हैं कि बहुपद $P(x)$ का शून्यक 1 है

अत: व्यापक रूप से कहते कि बहुपद $p(x)$ का शून्यक एक ऐसी संख्या c है कि

$p(c) = 0$ हो

उदाहरण : सत्यापित कीजिए कि 2 और 0 बहुपद के $x^2 - 2x$ शून्यक हैं।

हल : माना $p(x) = x^2 - 2x$

$x = 2$ पर $p(x)$ का मान $p(2)$

$= 2^2 - 2 \times 2$

$= 4 - 4$

$= 0$

और

$x = 0$ पर $p(x)$ का मान

$p(0) = 0^2 - 2 \times 0$

$= 0 - 0$

$= 0$

अत: 2 और 0 दोनों ही $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

शेषफल प्रमेय

गतिविधि 1.

हम दो संख्याएँ 15 और 6 लें। जब 15 को 6 से भाग दिया जाए तो हमें भागफल 2 और शेषफल 3 प्राप्त होता है।

और इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$15 = 6 \times 3 + 2$

15 को उसे भाग दिया जाए तो हमें भागफल 5 और शेषफल 0 प्राप्त होता है।

और इसे इस प्रकार भी लिख जा सकता है : $15 = 3 \times 5 + 0$

हम यहाँ पाते कि 3 संख्या 15 का एक गुणनखण्ड है तथा संख्या 15, 3 का एक गुणज है।

गतिविधि 2.

अब हम बहुपद $3x^2 + x + 1$ को एकपदी x से भाग देते हैं

$$\frac{3x^2 + x + 1}{x} = \frac{3x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$$

$$= 3x + 1 + \frac{1}{x}$$

अत: हम पाते है कि भागफल $3x+1$ तथा शेषफल 1 है।

अत: एकपदी x बहुपद $3x^2+x+1$ का गुणनखंड नहीं है

अब हम बहुपद $2x^3+x^2+x$ को एकपदी x से भाग देते हैं

$$\frac{2x^3+x^2+x}{x}=\frac{2x^3}{x}+\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}$$

$2x^2+x+1$, इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$$2x^3+x^2+x=x(2x^2+x+1)+0$$

अत: यहाँ शेषफल 0 है और इसलिए x (भाजक), $2x^3+x^2+x$ (भाज्य) का एक गुणनखण्ड है।

गतिविधि 3. अब हम $p(x)=x+3x^2-1$ को $q(x)=1+x$ से भाग देते हैं।

$$p(x)=x+3x^2-1=3x^2+x-1$$

$$q(x)=1+x=x+1$$

$$\begin{array}{r|l} & 3x-2 \\ \hline x+1 & 3x^2+x-1 \\ & \underline{3x^2+3x} \\ \hline & -2x-1 \\ & -2x-2 \\ & \quad + \; + \\ \hline & \quad\;\; 1 \end{array}$$

यहाँ $3x^2+x-1=(x+1)(3x-2)+1$

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

व्यापक रूप में,

यदि $p(x)$ और $g(x)$ ऐसे ही दो बहुपद हो कि $\geq g(x)$ की घात और $g(x)\neq$ तो

हम ऐसे बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ प्राप्त कर सकते है कि -

$$p(x)=g(x)\,q(x)+r(x)$$

जहाँ $r(x)=0$ या $r(x)$ की घात $<g(x)$ की घात

अब हम $p(x)=3x^2+x-1$ को $x+1$ में भाग देने पर जो शेषफल प्राप्त होता है, वो वही है जो बहुपद $p(x)$ में $x=-1$ रखने पर प्राप्त होता है जो कि भाजक $x+1$ का एक शून्यक है।

अब उपरोक्त वर्णन के आधार पर हम शेषफल प्रमेय को इस प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं।

क्षेत्रफल प्रमेय : मान लीजिए $p(x)$ एक या एक से अधिक घात का एक बहुपद है और मान लीजिए a कोई वास्तविक संख्या है और यदि $p(x)$ को रैखिक बहुपद $x-a$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $p(a)$ होता है

उदाहरण : $x^4+x^3-2x^2+x+1$ को $x-1$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल : $p(x)=x^4+x^3-2x^2+x+1$

भाजक $g(x)=x-1$ का शून्यक 1 है। अत: शेषफल प्रमेय से

शेषफल $p(1)=1^4+1^3-2(1)^2+1+1$

$=1+1-2+2$

$=2$

बहुपदों का गुणनखण्डन :

बहुपद $q(t)=4t^3+4t^2-t-1$ को

$g(t)=2t+1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल

$$r(t)=4\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)-1$$

$$=-4\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1$$

$$=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-1$$

$$=0$$

होगा जिसे इस प्रकार से लिखा जा सकता है

$q(t)=q(t)\times$ भागफल$+0$

अर्थात भाजक $q(t)$, भाज्य $q(t)$ का एक गुणनखण्ड हुआ, इस आधार पर गुणनखण्ड प्रमेय को इस प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं।

गुणनखण्ड प्रमेय

यदि $p(x)$ घात $n\geq 1$ वाला एक बहुपद हो और a कोई वास्तविक संख्या हो तो

$x-1, p(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है, यदि $p(a)=0$ हो और

$p(a)=0$ होता है यदि $x-a, p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो।

बीजीय सर्वसमिकाएँ

गतिविधि

हम जानते हैं कि बीजीय सर्वसमिका (Algebraic Identity) एक बीजीय समीकरण होती है जो चरों के सभी मानों के लिए सत्य होती है।

हम निम्नलिखित सर्वसमिकाओं का अध्ययन कर चुके हैं :

(i) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

(ii) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

(iii) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

(iv) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(v) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zy$

(vi) $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

(vii) $(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

(viii) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

उदाहरण $\frac{25}{4}x^2-\frac{y^2}{9}$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $=\frac{25}{4}x^2-\frac{y^2}{9}$

$=\left(\frac{5}{2}x\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2$

$=\left(\frac{5}{2}x+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x-\frac{y}{3}\right)$ सर्वसमिका $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ से

स्मरणीय बिंदु

- एक चर वाला बहुपद $P(x)$ निम्न रूप का x में एक बीजीय व्यंजक है।
- $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\ldots\ldots+a_2x^2+a_1x+a0$ ' जहाँ

  $a_0a_1a_2$ .....a_n अचर है और $a_n\neq 0$ है।

  $la_0a_1a_2$ .....a_n क्रमशः $x^0,\ x,\ x^2$..... x^n के गुणांक है और n को बहुपद की घात कहा जाता है। प्रत्येक $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}$ ..... a_0 जहाँ $a_n\neq 0$ को बहुपद $p(x)$ का पद कहा जाता है।
- एक पद, दो पद एवं तीन पद वाले बहुपदों को क्रमशः एकपदी, द्विपदी एवं त्रिपदी कहा जाता है।
- एकघात, दोघात एवं तीन घात वाले बहुपदों को क्रमशः रैखिक, द्विघात एवं त्रिघात बहुपद कहा जाता है।
- वास्तविक संख्या 'a' बहुपद $P(x)$ का एक शून्यक होती है, यदि $P(a)=0$ हो।
- एक में प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक अद्वितीय शून्यक होता है द्य एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं होता और प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।
- शेषफल प्रमेय : यदि $P(x)$ एक या एक से अधिक घात वाला बहुपद हो और $P(x)$ को रैखिक बहुपद $x-a$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $P(a)$ होता है।
- यदि $P(a)=0$ हो, तो $x-a$ बहुपद $P(x)$ का एक गुणनखंड होता है और यदि $x-a,\ P(x)$ का एक गुणनखंड हो तो $P(a)=0$ होता है।

अभ्यास प्रश्न : प्रश्न 1 सही विकल्प चुनिए

1. निम्नलिखित में से कौन सा एक बहुपद है ?

(a) $\frac{x^2}{2}-\frac{2}{x^2}$ (b) $\sqrt{2x}-1$ (c) $x^2+\frac{3x^{3/2}}{\sqrt{x}}$ (d) $\frac{x-1}{x+1}$

2. बहुपद $4x^4+0x^3+0x^5+5x+7$ की घात है ?

(a) 4 (b) 5 (c) 3 (d) 7

3. यदि $p(x)=x^2-2\sqrt{2}x+1$ है तो $p(2\sqrt{2})$ बराबर है ?

(a) 0 (b) 1 (c) $4\sqrt{2}$ (d) $8\sqrt{2}+1$

4. यदि $p(x)=x+3$ है तो $p(x)+p(-x)$ बराबर है ?

(a) 3 (b) $2x$ (c) 0 (d) 6

5. बहुपद $p(x)=2x+5$ का शून्यक है

(a) $\frac{-2}{5}$ (b) $\frac{-5}{2}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{5}{2}$

6. $x+1$, निम्नलिखित बहुपद का गुणनखण्ड है –

(a) x^3+x^2-x+1 (b) x^3+x^2+x+1 (c) $x^4+x^3+x^2+1$ (d) $x^4+3x^3+3x^2+x+1$

7. यदि $x^{51}+51$ को $x+1$ से भाग दिया जाए तो शेषफल है

(a) 0 (b) 1 (c) 490 (d) 50

8. 249^2-248^2 का मान है

(a) 1 (b) 477 (c) 487 (d) 497

9. यदि $a+b+c=0$ है तो $a^3+b^3+c^3$ बराबर है

(a) 0 (b) abc (c) $3abc$ (d) $2abc$

10. बहुपद $5x-4x^2+3$ का मान जब $x=2$ हो तो है

(a) 10 (b) –3 (c) 12 (d) 3

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

1. अशून्य अचर पद की घात सदैव ..... होती है।
2. रेखीय बहुपद में चर की अधिकतम घात ..... होती है।
3. बहुपद x^3-x^2+1 में x^2 का गुणांक ..... है।
4. बहुपद $x^2+11x+10$ का एक गुणनखण्ड $(x+1)$ है, तो दूसरा गुणनखण्ड .....होगा।

प्रश्न 3. सत्य / असत्य लिखिए।

1. बहुपद 5 एक एकपदी व्यंजक है।
2. शून्य बहुपद की घात शून्य होती है।
3. अशून्य अचर पद की घात परिभाषित नहीं हैं।

4. बहुपद $7x^4+2x$ एक द्विघात बहुपद है।

5. $3x+5$ एक रैखिक बहुपद है।

प्रश्न 4. सही जोड़ी बनाइये

	कॉलम 'A'	कॉलम 'B'
(i)	x^3-y^3	(अ) $\frac{-2}{5}$
(ii)	x^3+y^3	(ब) -1
(iii)	बहुपद $x+1$ का शून्यक	(स) $(x+y)(x^2+y^2-xy)$
(iv)	बहुपद $x^4+2x+10$ की घात	(द) $(x-y)(x^2+y^2+xy)$
(v)	बहुपद $5x+2$ का शून्यक	(ई) 4

प्रश्न 5. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए।

1. ऐसा बहुपद जिसके सभी गुणांक शून्य हों, क्या कहलाता है?

2. ऐसा बहुपद जिसमे केवल एक पद हो, क्या कहलाता है?

3. केवल दो पदों वाला बहुपद क्या कहलाता है?

4. एक घात वाले बहुपद को क्या कहते हैं?

प्रश्न 6. सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थिति में संगत बहुपद के शून्यक हैं अथवा नहीं:

$p(x)=x^2-1, x=1,-1$

प्रश्न 7. जाँच कीजिए कि $7+3x, 3x^3+7x$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं?

प्रश्न 8. गुणनखण्ड प्रमेय लागू करके बताइए कि $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं ?

$p(x)=2x^3+x^2-2x-1, g(x)=x+1$

प्रश्न 9. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि $(x-1), p(x)=x^2+x+k$ का एक गुणनखण्ड है।

प्रश्न 10. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए $12x^2+7x+3$

प्रश्न 11. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए $49a^2+70ab+25b^2$

प्रश्न12. सर्वसमिका का उपयोग करके निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए: $(3-2x)(3+2x)$

प्रश्न 13. सीधे गुणा किए बिना गुणनफल ज्ञात कीजिए: 95×105

प्रश्न 14. उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग करके $(-2x+3y+2z)^2$ का प्रसार कीजिए।

प्रश्न 15. $(2x+1)^3$ का प्रसारित रूप लिखिए।

प्रश्न 16. उपयुक्त सर्वसमिका का उपयोग करके $(102)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 17. सत्यापित कीजिये: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

प्रश्न 18. सत्यापित कीजिये: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

प्रश्न 19. गुणनखंडन कीजिये: $8a^3-b^3-12a^2b+6ab^2$

प्रश्न 20. वास्तव में घनों का परिकलन किये बिना $(-12)^3+7^3+5^3$ का मान ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 21. नीचे दिए गए आयत में उसका क्षेत्रफल दिया गया है, लम्बाई व चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिये।

क्षेत्रफल : $25a^2-35a+12$

प्रश्न 22. घनाभ जिसका आयतन नीचे दिया गया विमाओं के लिए संभव व्यंजक क्या है?

आयतन : $3x^2-12x$

उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक 1.

1. (C) $x^2+\frac{3x^{3/2}}{\sqrt{x}}$, 2. (a) 4, 3. (b) 1, 4. (d) 6, 5.(b) $\frac{-5}{2}$

6. (b) x^3+x^2+x+1, 7. (d) 50, 8. (d) 497, 9. (c) $3abc$, 10.(b) -3

प्रश्न क्रमांक 2.

1. शून्य, 2. एक, 3. -1, 4. $x+10$

प्रश्न क्रमांक 3.

1. सत्य, 2. असत्य, 3. असत्य, 4. असत्य, 5. सत्य

प्रश्न 4. सही जोड़ी बनाइये

	कॉलम 'A'	कॉलम 'B'
(i)	x^3-y^3	(द) $(x-y)(x^2+y^2+xy)$
(ii)	x^3+y^3	(स) $(x+y)(x^2+y^2-xy)$
(iii)	बहुपद $x+1$ का शून्यक	(ब) -1
(iv)	बहुपद $x^4+2x+10$ की घात	(ई) 4
(v)	बहुपद $5x+2$ का शून्यक	(अ) $\frac{-2}{5}$

प्रश्न क्रमांक 5.

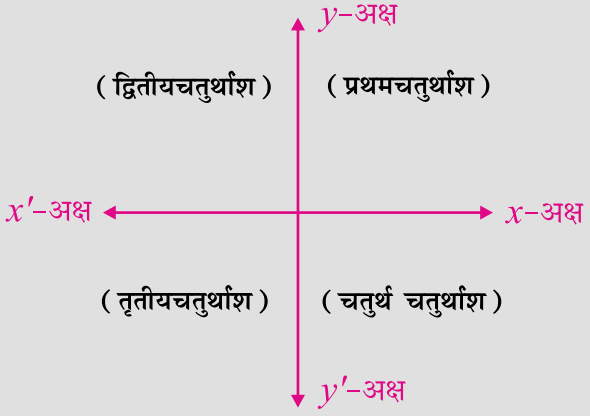
1. शून्य बहुपद, 2. एकपदी, 3. द्विपद, 4. रैखिक बहुपद

अध्याय-3
निर्देशांक ज्यामिति

विषय-वस्तु :

कार्तीय तल में दो रेखाएँ xx' और yy' लेते हैं जो एक दूसरे पर लम्बवत होती हैं, निर्देशांक अक्ष कहलाते हैं। क्षैतिज रेखा xx' जिसे x–अक्ष तथा उर्ध्वाधर रेखा yy' जिसे y'–अक्ष कहते हैं। उक्त दोनों अक्ष एक दूसरे को बिंदु O पर काटती है जिसे मूल बिंदु कहते हैं। मूल बिंदु से x की तरफ नापी गयी दूरी गयी धनात्मक तथा x' की तरफ नापी गयी दूरी ऋणात्मक होती है। इसी प्रकार मूल बिंदु से y की तरफ नापी गयी दूरी गयी धनात्मक तथा y' की तरफ नापी गयी दूरी ऋणात्मक होती है। x–अक्ष पर y–अक्ष से नापी गयी दूरी को भुज तथा y–अक्ष पर x–अक्ष से नापी गयी दूरी को कोटि कहते हैं।

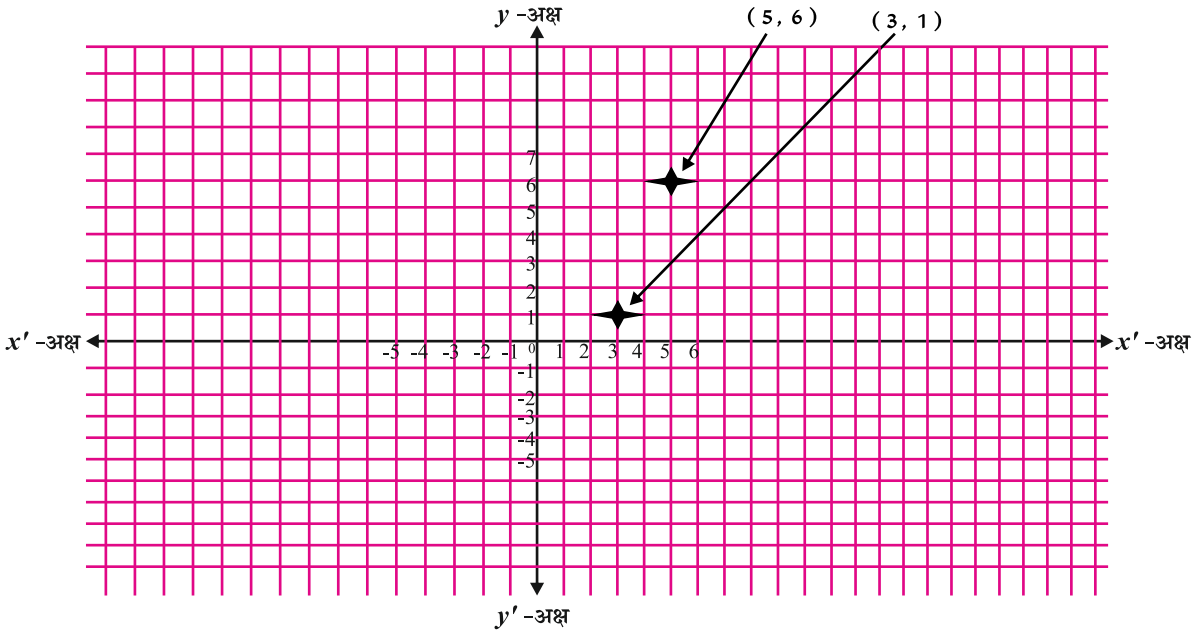
ये दोनों अक्ष तल को चार भागों विभाजित करतें हैं इन चार भागों को चतुर्थांश (Quadrants) कहा जाता है। इस प्रकार किसी चतुर्थांश में स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक को (x,y) के रूप में व्यक्त करतें हैं।



गतिविधि 1: पांसे के खेल द्वारा छात्रों को निर्देशांको के बारे में जानकारी दी जा सकती है। दो रंग के पांसे लेते हैं; पहला लाल रंग का तथा दूसरा नीले रंग का। लाल रंग के पांसे पर आयी संख्या (x) जो भुज को व्यक्त करेगा तथा नीले रंग के पांसे पर आयी संख्या (y) जो कोटि को व्यक्त करेगा। अब हम पांसों को बारी बारी से फेंकते हैं और अवलोकन करते हैं लाल पांसे पर आयी संख्या और नीले पांसे पर आयी संख्याओं को क्रमशः नोट करतें हैं और निम्नानुसार एक टेबल का निर्माण करते हैं :

क्रमांक	लाल पांसे पर आयी संख्या (भुज)	नीले पांसे पर आयी संख्या (कोटी)	(x, y)
1	5	6	(5, 6)
2	3	1	(3, 1)

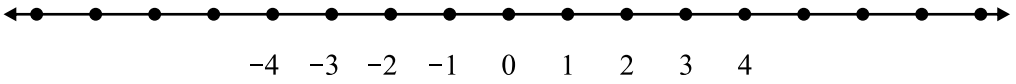
उत्तर : इस प्रकार प्राप्त उपरोक्त निर्देशांक ग्राफ पेपर पर निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं।



गतिविधि 2: प्रश्नावली 3.2 के प्रश्न क्रमांक 2 एक गतिविधि (प्रश्न–मंच) के माध्यम से अभ्यास कराया जाए तो उत्तम रहेगा।

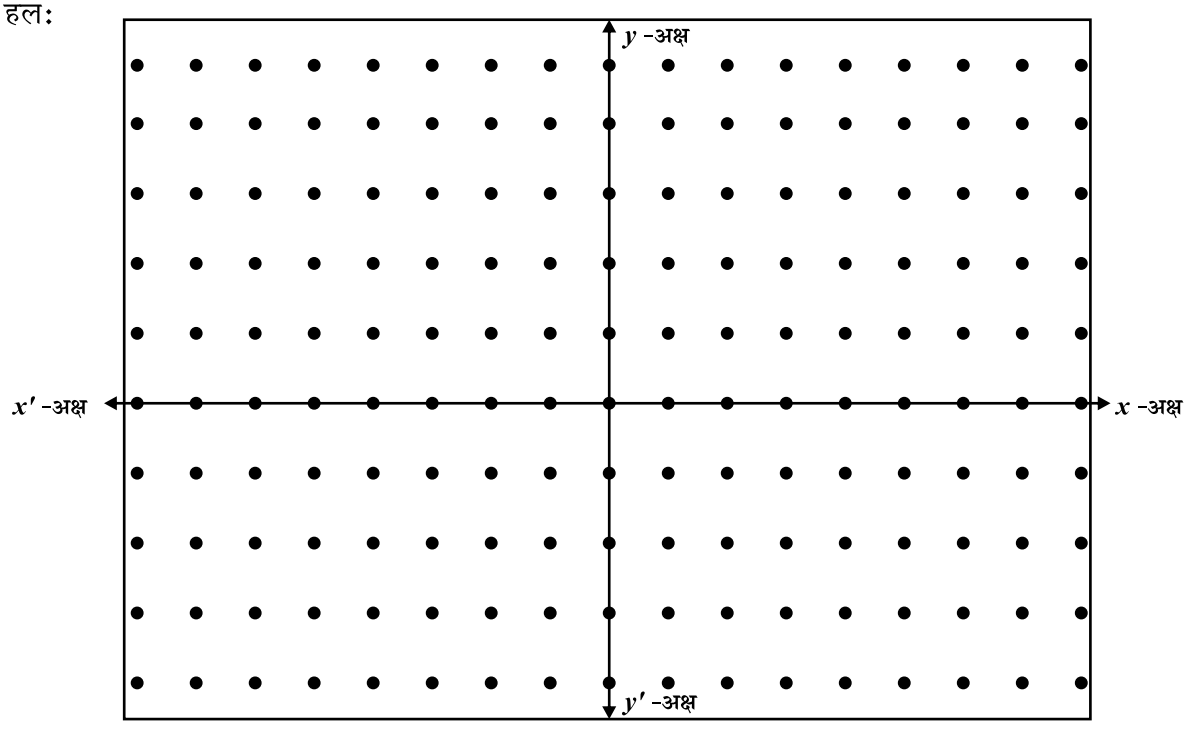
प्रश्न 1. संख्या रेखा पर. . . . . −3 , −2 , −2 , −1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ...को प्रदर्शित कीजिए।

हल:



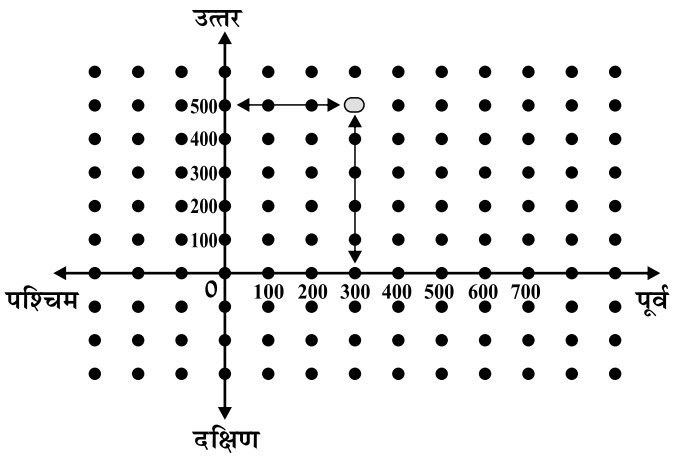
प्रश्न 2. बिन्दुओं को मिलते हुए दो लम्बवत रेखाएं खीचिए एवं रेखाओं को नामांकित कीजिए।

हल:



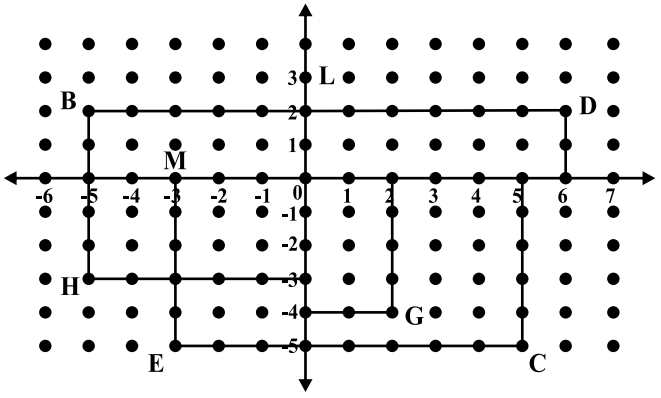
प्रश्न 3. श्यामाका घर चौराहे से पूर्व दिशा में 300 मीटर एवं उत्तर दिशा में 500 मीटर की दूरी पर है द्य श्यामा के घर की स्थिति प्रदर्शित कीजिए।

हल :



(संकेत – 0 चौराहा है)

प्रश्न 4 –निम्न आकृति को देखकर निम्नलिखित को लिखिए –



(i) B में निर्देशांक

(ii) C के निर्देशांक

(iii) निर्देशांक (–3, –5) द्वारा पहचाना गया बिंदु।

(iv) निर्देशांक (2,–4) द्वारा पहचाना गया बिंदु।

(v) D का भुज

(vi) बिंदु H की कोटि

(vii) बिंदु L के निर्देशांक

उत्तर: (i) B (–5,2), (ii) C (5,–5), (iii) E, (iv) G, (v) 6, (vi) (0,3)

स्मरणीय बिंदु :

- एक तल में एक बिंदु का स्थान निर्धारण के लिए दो लाम्बिक रेखाओं की आवश्यकता होती है जिसमे एक क्षैतिज होती है और एक उर्ध्वाधर होती है।
- तल को कार्तीय या निर्देशांक तल कहा जाता है और इन क्षैतिज व उर्ध्वाधर रेखाओं को निर्देशांक अक्ष कहा जाता है।
- क्षैतिज रेखा को x–अक्ष और उर्ध्वाधर रेखा को y–अक्ष कहा जाता है।
- निर्देशांक अक्ष तल को चार भागों में बाँट देते जिन्हें चतुर्थांश कहा जाता है। अक्षों के प्रतिच्छेदन बिंदु को मूलबिंदु कहा जाता है।
- y–अक्ष से किसी बिंदु की दूरी को उसका x–निर्देशांक या भुज (Abcissa) कहा जाता है। साथ हि x–अक्ष से किसी बिंदु की दूरी को y–निर्देशांक या कोटि (Ordinate) कहा जाता है।
- यदि एक बिंदु का भुज x तथा कोटि y होतो (x,y) को बिंदु के निर्देशांक कहा जाता है।

अभ्यास प्रश्न : वस्तुनिष्ट प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

1. निम्नलिखित में से कौन सा बिंदु y–अक्ष पर स्थित होगा।

   (अ) $(0,2)$ (ब) $(1,2)$

   (स) $(2,0)$ (द) $(8,0)$

2. बिंदु $(2,-1)$ किस चतुर्थांश में स्थित होगा।

   (अ) प्रथम चतुर्थांश (ब) द्वितीय चतुर्थांश

   (स) तृतीय चतुर्थांश (द) चतुर्थ चतुर्थांश

3. बिंदु $(0,4)$स्थित होगा।

   (अ) x– अक्ष पर (ब) y–अक्ष पर

   (स) मूल बिंदु पर (द) उपरोक्त में से कोई नहीं

4. बिंदु $(-3,2)$किस चतुर्थांश में स्थित होगा।

   (अ) प्रथम चतुर्थांश (ब) द्वितीय चतुर्थांश

   (स) तृतीय चतुर्थांश (द) चतुर्थ चतुर्थांश

5. बिंदु $(-3,0)$ स्थित होगा।

   (अ) x– अक्ष पर (ब) y–अक्ष पर

   (स) मूल बिंदु पर (द) उपरोक्त में से कोई नहीं

6. निम्नलिखित में से कौन सा बिंदु x–अक्ष पर स्थित होगा।

   (अ) $(4,1)$ (ब) $(2,0)$

   (स) $(2,2)$ (द) $(0,0)$

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) मूल बिंदु के निर्देशांक – – – – – – होते हैं।

(ii) बिंदु $(3,5)$में भुज का मान – – – – – – है।

(iii) बिंदु $(7,-6)$ की कोटि का मान – – – – – – है।

(iv) निर्देशांक अक्ष तल को – – – – – – भागों में बाँट देते जिन्हें चतुर्थांश कहा जाता है।

(v) बिंदु $(-3,-4)$ – – – – – – चतुर्थांशमें स्थित है।

(vi) बिंदु $(3,4)$ – – – – – – चतुर्थांश में स्थित है।

(vii) बिंदु $(-3,4)$ – – – – – – चतुर्थांश में स्थित है।

(viii) बिंदु $(3,0)$– – – – – – अक्ष में स्थित है।

(ix) बिंदु $(0,3)$ – – – – – – अक्ष में स्थित है।

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइये

	कालम–A		कालम–B
(i)	(भुज, 0)	(a)	द्वितीय चतुर्थांश में
(ii)	बिंदु (2,1)स्थित है	(b)	(0, 0)
(iii)	मूल बिंदु के निर्देशांक	(c)	प्रथम चतुर्थांश में
(iv)	बिंदु (3, 5)की कोटि है	(d)	X–अक्ष के निर्देशांक है
(v)	बिंदु (–2, 4)स्थित है	(e)	5

प्रश्न 4. सत्य/असत्य लिखिए

(i) मूल बिंदु में भुज एवं कोटि दोनों शून्य होते हैं।

(ii) y–अक्ष में भुज शून्य नहीं होता है।

(iii) x–अक्ष पर स्थित बिंदु की कोटि हमेशा शून्य होती है।

(iv) बिंदु (2, 3) प्रथम चतुर्थांश में स्थित होता है।

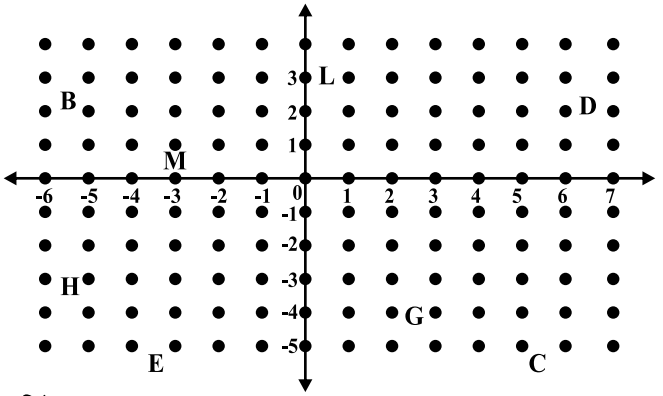
(v) बिंदु (–1, 2), y–अक्षपर स्थित होगा।

प्रश्न 5. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए।

1. कार्तीय तल में किसी बिंदु की स्थिति निर्धारित करने वाली क्षैतिज और उर्ध्वाधर रेखाओं के नाम क्या हैं?
2. बिंदु (3, –2) किस चतुर्थांश में स्थित होगा?
3. बिंदु (4, 5) X–अक्ष से कितने इकाई की दूरी पर है?
4. बिंदु (2, 0) कहाँ स्थित होगा?
5. बिंदु (0, –3) कहाँ स्थित होगा?

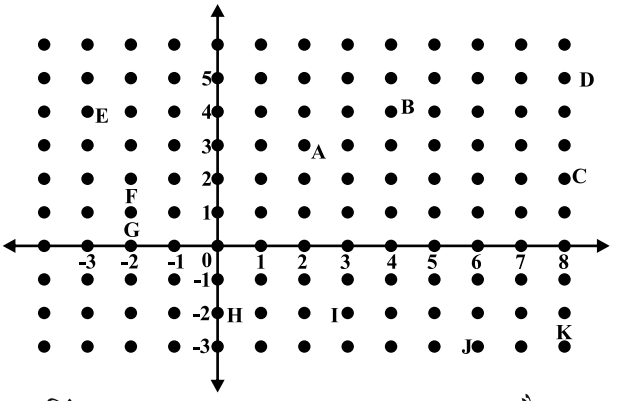
प्रश्न 6. रवीना चौराहे से पश्चिम दिशा में 300 मीटर पैदल चलती है फिर दक्षिण की दिशा की ओर मुड़कर 400 मीटर चलती है। रवीना की स्थिति को प्रदर्शित कीजिए।

प्रश्न 7. निम्न आकृति में अंकित बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए–



प्रश्न 8. बिंदु (1, 2), (5, 6), (–5, 3), (4,–5), (–3, 4), (0, 3), (4, 0), (–5, 0), व (0, 2) किस चतुर्थांश में या किस अक्ष पर स्थित हैं?

प्रश्न 9. बिंदुओं A, B, C, D, E, F, G, H, I, J और K के निर्देशांक लिखिए।



प्रश्न 10. बिंदु (–2,4), (3 –1), (–1,0), (1, 2)और (–3,–5) किस चतुर्थांश में या किस अक्ष पर स्थित हैं? कार्तीय तल पर उनका स्थान निर्धारण करके अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।

प्रश्न 11. अक्षों पर दूरी का उपयुक्त एकक लेकर नीचे सारणी में दिए गए बिन्दुओं को तल पर आलेखित कीजिए।

x	-2	-1	0	1	3
y	8	7	-1.5	3	-1

प्रश्न 12.बिंदुओं (4, 5), (–4, 5), (4,–5), (–4,–5), (5,1), (5,–3), (6, 2) का कार्तीय तल पर स्थान निर्धारण कीजिए।

उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक 1.

1. (अ) (0, 2), 2. (द)चतुर्थ चतुर्थांश, 3. (ब) y–अक्ष पर, 4. (ब) द्वितीय चतुर्थांश, 5. (अ) x– अक्ष पर, 6. (ब) (2, 0)

प्रश्न क्रमांक 2.

1. (0, 0), 2. 3, 3. –6, 4. चार, 5. तृतीय चतुर्थांश, 6. प्रथम चतुर्थांश, 7. द्वितीय चतुर्थांश 8. x– अक्ष पर, 9. y–अक्ष पर

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइए–

	कॉलम A		**कॉलम B**
(i)	(भुज, 0)	(d)	X–अक्ष के निर्देशांक है
(ii)	बिंदु (2,1)स्थित है	(c)	प्रथम चतुर्थांश में
(iii)	मूल बिंदु के निर्देशांक	(b)	(0, 0)
(iv)	बिंदु (3, 5)की कोटि है	(e)	5
(v)	बिंदु (–2, 4)स्थित है	(a)	द्वितीय चतुर्थांश में

प्रश्न क्रमांक 4.

1. सत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. सत्य, 5. असत्य

प्रश्न क्रमांक 5.

(1) x–अक्ष और y–अक्ष, 2. चौथे चतुर्थांश में, 3. 5, 4. x–अक्ष, 5. y–अक्ष

अध्याय-4
दो चरों वाले रैखिक समीकरण

पिछली कक्षाओं में हम एक चर वाले रैखिक समीकरणों का अध्ययन कर चुके हैं। एक चर वालेरैखिक समीकरण का उदाहरण: $2x+5=0$

इसका हल अर्थात समीकरण का मूल $\frac{-5}{2}$ हैं। एक समीकरण को हल करते समय निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना होता है।

(i) समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी या घटाई जाती है।

(ii) समीकरण के दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग दिया जाता है।

अब हम निम्नलिखित स्थिति पर विचार करें :

नागपुर में भारत और श्रीलंका के बीच खेले गये एक एक दिवसीय अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैच में दो भारतीय बल्लेबाजों ने एक साथ मिलकर 176 रन बनाये। इस जानकारी को एक समीकरण के रूप में कैसे व्यक्त करेंगें ?

यहाँ हम देख सकते हैं कि दोनों बल्लेबाजों में से किसी भी बल्लेबाज द्वारा बनाए रन ज्ञात नहीं है, अर्थात यहाँ दो अज्ञात राशियाँ हैं। हम इन अज्ञात राशियों को x और y से प्रकट करें तो इस तरह दो बल्लेबाजों में से पहले बल्लेबाज द्वारा बनाये गए रनों की संख्या x और दूसरे बल्लेबाज द्वारा बनाये गए रनों की संख्या y है तो

कथा अनुसार, पहले बल्लेबाज द्वारा बनाये गए रनों की संख्या + दूसरे बल्लेबाज द्वारा बनाये गए रनों की संख्या $= 176$

अत: $x+y=176$, जो कि अभीष्ट समीकरण है।

दो चरों वाले रैखिक समीकरण के कुछ उदाहरण निम्न हैं :

$x+3y+4=0, 3x-2y+5=0$ और $5x-2y-11=0$

उदाहरण प्रश्न :

प्रश्न 1. समीकरण $2x+5=0$ में कितने चर हैं?

उत्तर समीकरण $2x+5=0$ में एक चर हैं

प्रश्न 2. एक संख्या का दुगुना 80 है। इसे एक चरीय समीकरण के रूप में कैसे लिखेंगें ?

उत्तर माना वह चर y है तो $2y=80$

प्रश्न 3. दो संख्याओं का योग 117 है। इसका गणितीय रूप क्या होगा? यदि हम दो चर x तथा y का उपयोग करें।

उत्तर अब हम दो चर .... (माना) x व y लेंगें ।

और प्रश्न अनुसार, एक संख्या + दूसरी संख्या $= 117$

तब $x+y=117$ और इसे दो चरों वाला समीकरण कहेंगें।

प्रश्न 4. "एक नोट-बुक की कीमत, कलम की कीमत से 2 रुपए अधिक है" इस कथन को निरूपित करने के लिए

दो चरों वाला एक रैखिक समीकरण लिखिए। यह मान लें कि नोट-बुक की कीमत x रु. है और कलम की कीमत y रु. है।

उत्तर इस कथन में प्रश्न अनुसार,

नोट-बुक की कीमत $= x$ रु. तथा कलम की कीमत $= y$ रु. है तथा

नोट-बुक की कीमत = कलम की कीमत + 2

अत $x = y + 2$

या $x - y = 2$

प्रश्न 5. कानपुर में भारत और बांग्लादेश के बीच खेले गये एक एक दिवसीय अंतर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैच में दो भारतीय बल्लेबाजों ने एकसाथ मिलकर 267 रन बनाये। इस जानकारी को एक समीकरण के रूप में कैसे व्यक्त करेंगें?

उत्तर माना दो बल्लेबाजों में से पहले बल्लेबाज द्वारा बनाये गए रनों की संख्या x और दूसरे बल्लेबाज द्वारा बनाये गए रनों की संख्याल y है तो प्रश्नानुसार,

पहले बल्लेबाज द्वारा बनाये गए रनों की संख्या + दूसरे बल्लेबाज द्वारा बनाये गए रनों की संख्या = 267

अत: $x + y = 267$

प्रश्न 6. दो चरों वाले रैखिक समीकरण का सामान्य रूप क्या होगा ?

उत्तर दो चरों वाले रैखिक समीकरण का सामान्य रूप $ax + by + c = 0$ होता है।

प्रश्न 7. दो चरों वाले रैखिक समीकरण के कुछ उदाहरण दीजिए।

उत्तर $7x + 5y + 9 = 0$, $5x - 3y + 6 = 0$ और $2x - y - 7 = 0$

प्रश्न 8. समीकरण $2x + 3y = 12$ में x और y के कौन-कौन से मान रखे जा सकते जिससे यह समीकरण संतुष्ट हो ?

उत्तर $x = 3$, और $y = 2$ रखने पर

$2 \times 3 + 3 \times 2 = 12$ होगा

$x = 0$, $y = 4$ रखने पर $2 \times 0 + 3 \times 4 = 12$ होगा।

$x = 1$, $y = 4$ रखने पर $2 \times 1 + 3 \times 4 \neq 12$ होगा।

$x = 1$व $y = 4$ नहीं रखे जा सकते ?

विद्यार्थी अपनी-अपनी कापियों में हल करके पता लगायेगें।

$2x + 3y = 12$ में x व y के अनेक मान रखे जा सकते हैं।

समीकरण $4x + 3y = 12$ में $x = 0$ लेने पर $y = 4$ प्राप्त होगा।

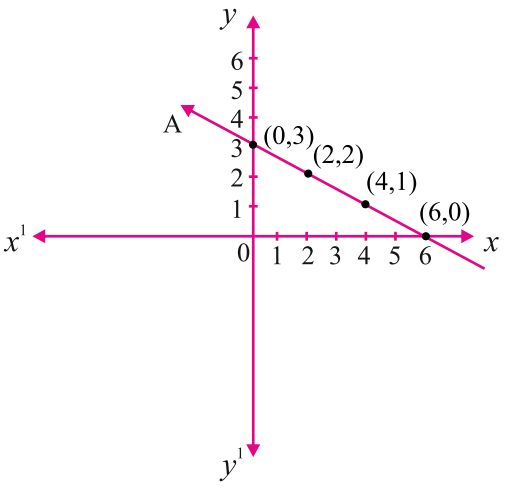
समीकरण $4x + 3y = 12$ में $y = 0$ रखने पर $x = 3$ प्राप्त होगा।

प्रश्न 9. रैखिक समीकरण $x + 2y = 6$ में निम्न सारणी के अनुसार मान रखकर सारणी पूर्ण कीजिए।

x	0	2	4	6
y	-------	-------	-------	-------

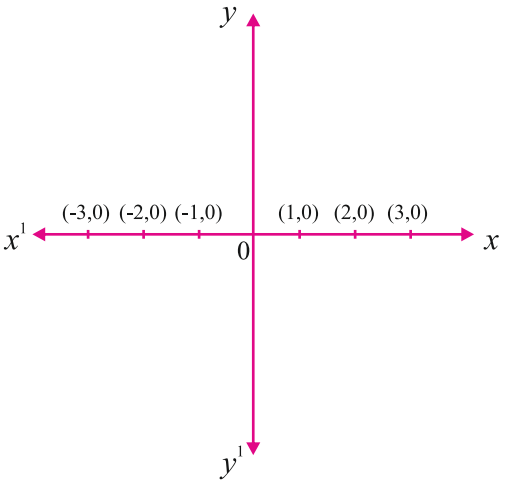
उत्तर -

x	0	2	4	6
y	3	2	1	0



प्रश्न 10. बिंदु $(1,0), (2,0), (-3,0), (4,0)$, और $(n,0)$ किस अक्ष पर स्थित होंगे?

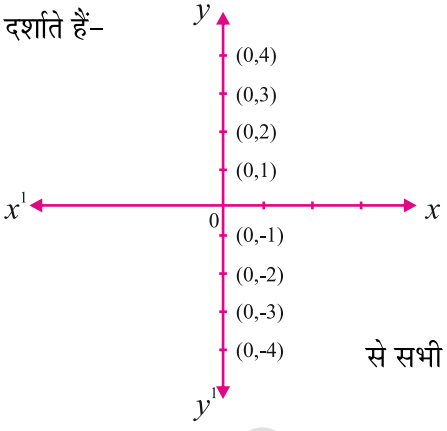
उत्तर– चित्र बनाकर निम्नानुसार लिखा जा सकता है:



x–अक्ष पर स्थित बिन्दुओं के निर्देशांकों का y–निर्देशांक शून्य होता है अत: इससे इस निष्कर्ष पर पहुंचतें हैं कि x–अक्ष पर स्थित बिन्दुओं के निर्देशांकों (x,y)का y–निर्देशांक शून्य होगा। अत: x– अक्ष का समीकरण $y = 0$ होगा।

प्रश्न 11. बिंदु $(0,1), (0,2), (0,-3), (0,4)$, और $(0,m)$ किस अक्ष पर स्थित होंगे?

उत्तर– चित्र बनाकर निम्नानुसार दर्शाते हैं–

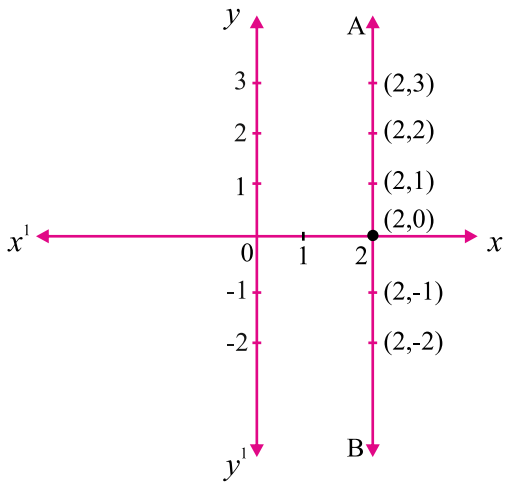


से सभी बिंदु y– अक्ष पर स्थित होंगे।

y-अक्ष पर स्थित बिन्दुओं के निर्देशांकों का x-निर्देशांक शून्य होता है और इस निष्कर्ष पर पहुंचतें हैं कि y-अक्ष पर स्थित बिन्दुओं के निर्देशांकों (x, y)का x-निर्देशांक शून्य होगा। अत: y- अक्ष का समीकरण $x = 0$ होगा।

प्रश्न 12. बिंदु $(2,1), (2,2), (2,-3), (2,4)$, और $(2, k)$ किस अक्ष पर या कहाँ पर स्थित होंगे?

उत्तर- चित्र बनाकर निम्नानुसार दर्शाते हैं-



निष्कर्ष है कि x- अक्ष की धनात्मक दिशा में 2 इकाई की दूरी पर स्थित y-अक्ष के समान्तर रेखा पर स्थित प्रत्येक बिंदु में x का निर्देशांक सदैव 2 है। अत: y- अक्ष के समान्तर इस रेखा समीकरण $x = 2$ या $x-2 = 0$ होगा।

अभ्यास प्रश्न :

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

1. $y = 3x + 5$ का :

   (अ) एक अद्वितीय हल है। (ब) केवल दो हल हैं।

   (स) अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। (द) कोई हल नहीं हैं।

2. समीकरण $x - 2y = 4$ के लिए निम्न में से कौन सा एक हल है :

   (अ) $(4, 0)$ (ब) $(0, 4)$

   (स) $(4, 2)$ (द) $(8, 4)$

3. समीकरण $y = a$ का आलेख एक सरल रेखा है :

   (अ) y–अक्ष के समान्तर (ब) x–अक्ष के समान्तर

   (स) x–अक्ष के लम्बवत (द) उपर्युक्त में से कोई नहीं

4. समान्तर $ax + by + c = 0$ के रूप के समीकरण को कहते हैं।

   (अ) दो चरों वाला रैखिक समीकरण (ब) दो चरों वाला द्विघात समीकरण

   (स) वर्ग समीकरण (द) उपर्युक्त में से कोई नहीं

5. $x = 0$ समीकरण है:

   (अ) x- अक्ष का (ब) y- अक्ष का

   (स) z- अक्ष का (द) xz- तल का

प्रश्न 2. सही जोड़ी बनाइए :

	स्तम्भ (I)		**स्तम्भ (II)**
(1)	y- अक्ष का समीकरण	(अ)	$ax + by + c = 0$
(2)	तृतीय चतुर्थांश में स्थित बिंदु है:	(ब)	$(0,0)$
(3)	y- अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा	(स)	$x = 0$
(4)	x- अक्ष का समीकरण	(द)	$y = 0$
(5)	मूल बिंदु के निर्देशांक	(इ)	$(-1,-2)$
(6)	दो चरों वाले रैखिक समीकरण का मानक रूप	(फ)	$x = a$ का आलेख

प्रश्न 3. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दो :-

1. $2x + 3y = 12$ में कितने चर हैं?
2. $x + 7 = 0$ में x की घात क्या है?
3. $2x^2 + 3x + 4 = 0$ में x की अधिकतम घात क्या है?
4. $x - 4 = 0$ में x का मान क्या होगा?

5. यदि $3x = 24$ तो x का मान ज्ञात करो।

6. यदि $x + 24 = 0$ तो x का मान ज्ञात करो।

7. यदि $\frac{x}{3} = 6$ हो तो x का मान ज्ञात करो।

8. यदि $\frac{x}{3} = \frac{2}{7}$ हो तो x का मान ज्ञात करो।

9. $y = 3x + 5$ के कितने हल संभव है?

10. यदि $x = 2, y = 1$ तो $2x + 3y = k$ में k का मान ज्ञात करो।

11. $2x + 9 = 0$ को दो चर के समीकरण के रूप में व्यक्त करो।

12. x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण लिखो।

प्रश्न 4. सत्य/असत्य लिखिए-

1. रेखा $y = kx$ मूलबिंदु से होकर जाने वाली रेखा को निरूपित करता है।

2. $x = 2, x$-अक्ष के समान्तर रेखा है।

3. $2x + 3y + 4 = 0$ एक दो चरों वाले रैखिक समीकरण का उदहारण है।

4. $x = 0, x$-अक्ष का समीकरण है।

5. $(-2, 0), y = 2x + 4$ का संगत हल है।

प्रश्न 5. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

1. यदि बिंदु $(3, 4)$ समीकरण $3y = ax + 7$ के आलेख पर स्थित है तो a का मान है।

2. दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख एक ..... होता है।

3. समीकरण $x = a$ का आलेख y-अक्ष के ..... एक सरल रेखा होता है।

4. $x = 0$ .....का समीकरण है।

प्रश्न 6. समीकरण $3x + 5 = 7$ को हल कीजिये।

प्रश्न 7. समीकरण $8x + 6 = 2x + 24$ को हल कीजिये।

प्रश्न 8. एक संख्या एवं उसके दुगुने का योग 27 है इसे समीकरण के रूप में लिखो एवं हल करो।

प्रश्न 9. किसी संख्या का 3 गुना उसके दुगुने से 5 अधिक है। संख्या ज्ञात करो।

प्रश्न 11. किसी संख्या में 4 जोड़ने पर वह स्वयं की दुगुनी हो जाती है। संख्या ज्ञात करो।

प्रश्न 12. अमरीका और कनाडा जैसे देशों में तापमान फारेनहाइट में मापा जाता है जबकि भारत जैसे देशों तापमान सेल्सियस में मापा जाता है। यहाँ फारेनहाइट को सेल्सियस में रूपांतरित करने वाला एक रैखिक समीकरण दिया गया है - $F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$

(i) यदि तापमान 30^0C है, तो फारेनहाइट में तापमान क्या होगा?

(ii) यदि तापमान 0^0है, तो फारेनहाइट में तापमान क्या होगा?

प्रश्न 13. एक विद्यालय की कक्षा IX की छात्राएँ यामिनी और फातिमा ने मिलकर भूकंप पीड़ित व्यक्तियों की सहायता के लिए प्रधानमंत्री राहत कोष में 100 रु. अंशदान दिया। एक रैखिक समीकरण लिखिए जो इस कथन को संतुष्ट करता हो एवं उसका आलेख खींचिए।

प्रश्न 14. एक नगर में टैक्सी का किराया निम्नलिखित है, पहले किलोमीटर का किराया 10 रु. है और उसके बाद की दूरी के लिए प्रति किलोमीटर किराया 8 रु. है। यदि तय की गयी दूरी x किलोमीटर हो, और कुल किराया y है तो इसका एक रैखिक समीकरण लिखिए और उसका आलेख खींचिए।

प्रश्न 15. एक अचर बल लगाने पर एक पिंड द्वारा किया गया कार्य पिंड द्वारा तय की गई दूरी के अनुक्रमानुपाती होता है। इस कथन को दो चरों वाले एक समीकरण के रूप में व्यक्त कीजिए और अचर बल 5 मात्रक लेकर इसका आलेख खींचिए यदि पिंड द्वारा चली तय की दूरी हैं :

(i) 2 मात्रक (ii) 0 मात्रक

उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक 1.

1. (स) अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। , 2. (अ)(4,0), 3. (ब) x–अक्ष के समान्तर पर,
4. (अ) दो चरों वाला रैखिक समीकरण, 5. (ब) y– अक्ष

प्रश्न क्रमांक 2.

स्तम्भ (I)	**स्तम्भ (II)**
(1) y– अक्ष का समीकरण	(स) $x = 0$
(2) तृतीय चतुर्थांश में स्थित बिंदु है:	(इ) $(-1,-2)$
(3) y– अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा	(फ) $x = a$ का आलेख
(4) x– अक्ष का समीकरण	(द) $y = 0$
(5) मूल बिंदु के निर्देशांक	(ब) $(0,0)$
(6) दो चरों वाले रैखिक समीकरण का मानक रूप	(अ) $ax + by + c = 0$

प्रश्न क्रमांक 3.

(1) 2, (2)1, (3) 2, (4)4, (5)8, (6)–24, (7)18, (8) $\frac{6}{7}$
(9) अपरिमित रूप से अनेक हल हैं, (10) 7, (11) $\frac{-9}{2}$, (12) $y = a$

प्रश्न क्रमांक 4.

1. सत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. सत्य

प्रश्न क्रमांक 5.

(1) $\frac{5}{3}$, (2) सरल रेखा, (3) समान्तर, (4) y–अक्ष

अध्याय-12
सांख्यकी

आंकड़े, आंकड़ों का संग्रह एवं आंकड़ों का प्रस्तुतीकरण :

एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किए गए तथ्यों या अंकों को, जो संख्यात्मक या अन्य रूप में हो सकते हैं, आंकड़े (data)कहा जाता है। यह लैटिन शब्द datum का बहुवचन है।

आज हमारी दुनिया अधिक से अधिक सूचना अभिविन्यास होती जा रही है। हम जीवन पर्यंत किसी न किसी रूप में आंकड़ों का प्रयोग करते रहते हैं। अत: हमारे लिए यह आवश्यक हो जाता है कि इन आंकड़ों से हम अपनी इच्छानुसार अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करना जान सकें। अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करने से सम्बंधित अध्ययन गणित की जिस शाखा में किया जाता है जिसे सांख्यकी (statistics) कहा जाता है।

जब कोई अन्वेषक एक निश्चित उद्देश्य के लिए सूचनाओं का संग्रहण करता है। इस प्रकार एकत्रित किए गए आंकड़ों को प्राथमिक आंकड़े (primary data) कहा जाता है। दूसरी स्थिति में, जहाँ किसी स्रोत से, जिसमे सूचनाएँ पहले से एकत्रित हैं, आंकड़े प्राप्त किए गए हों उन आंकड़ों को गौण या द्वितीयक आंकड़े (secondary data) कहा जाता है।

उदाहरण प्रश्न :

प्रश्न 1. आंकड़ों का कोई एक उदाहरण दीजिए जिन्हें आप दैनिक जीवन से एकत्रित कर सकते हैं।

उत्तर- कक्षा मित्रों के परिवार में सदस्यों की संख्या :

मित्र का नाम	परिवार में सदस्यों की संख्या
अमित	5
अभिनव	4
रूद्र	5
कुशाग्र	6
निमित्त	5
सुचित	7
सुरेश	4
राजीव	4
मुकेश	3
मनीष	4
पंकज	2
संतोष	5
विकास	6
	कुल योग 60

प्रश्न 2. एक विद्यालय में कक्षा 9वीं में 30 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त किये गए अंक निम्न हैं

10, 20, 36, 92, 95, 40, 50, 56, 60, 70, 92, 88, 80, 70, 72, 70, 36, 40, 36, 40, 92, 40, 50, 50, 56, 60, 70, 60, 60, 88 इन आंकड़ों के लिए बारंबारता सारणी बनाइए।

हल : सारणी

अंक	विद्यार्थियोंकी संख्या
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
	कुल योग 30

प्रश्न 3. आठवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों के रक्त समूह निम्न हैं :

A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O, A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O इन आंकड़ोंको बारम्बारता बंटन सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए। बताइए कि इन विद्यार्थियों में कौन सा रक्त समूह अधिक सामान्य है और कौन सा विरलतम है?

हल : बारम्बारता सारणी

रक्त समूह	विद्यार्थियों की संख्या
A	9
B	6
AB	3
O	12
Total	30

सबसे अधिक सामान्य रक्त समूह : O

विरलतम रक्त समूह : AB

प्रश्न 4. तीस बच्चों से पूछा गया कि पिछले सप्ताह उन्होंने कितने घंटे टी.वी. प्रोग्राम देखे। प्राप्त परिणाम निम्न रहे:

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8	10	3
4	12	2	8	15	1	17	6	3	2	8	5
9	6	8	7	14	12						

(i) वर्ग-चौड़ाई 5 लेकर और एक वर्ग अंतराल को 5-10 लेकर इन आंकड़ों की एक वर्गीकृत बारम्बारता सारणी बनाइए।

(ii) कितने बच्चों ने सप्ताह में 15 या अधिक घंटों तक टी.वी. देखी।

हल : (i) वर्ग-चौड़ाई 5 लेने के लिए हम वर्ग अंतराल 0-5, 5-10.....लेते हैं।

वर्गीकृत बारम्बारता सारणी :

घंटे (hours)	बच्चों की संख्या
0-5	10
5-10	13
10-15	5
15-20	2
Total	30

(ii) 2 बच्चों ने सप्ताह में 15 या अधिक घंटों तक टी.वी. देखी।

प्रश्न 5. 5 व्यक्तियों से पूछा गया कि अपने समुदाय के सामाजिक कार्य करने में वे एक सप्ताह में कितना समय देते हैं? उनका कहना था क्रमशः 10, 7, 13, 20 और 15 घंटे। एक सप्ताह में उनके सामाजिक कार्य में लगाए गए समय का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$$

यहाँ कुल प्रेक्षण 5 है

$x_1 = 10, x_2 = 7, x_3 = 13, x_4 = 20, x_5 = 15$

$$\text{माध्य} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10 + 7 + 13 + 20 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

5 व्यक्तियों द्वारा सामाजिक कार्य करने में एक सप्ताह में लगाये गए समय का माध्य 13 घंटे हैं।

प्रश्न 6. आंकड़ों 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 का बहुलक का ज्ञात कीजिए?

हल : बहुलक सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण का मान होता है। दिए आंकड़ों में 14 सबसे अधिक 4 बार आया है। अतः बहुलक = 14

प्रश्न 7. गणित की परीक्षा में 15 विद्यार्थियों ने 100 में से निम्नलिखित अंक प्राप्त किए।

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60 इन आंकड़ों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल– माध्य $= \dfrac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{15} xi}{15}$$

$$= \frac{41+39+48+52+46+62+54+46+96+52+98+40+42+52}{5}$$

$$= \frac{822}{15} = 54.8$$

माध्यक: दिए हुए आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

39, 40, 40, 41, 42, 46, 48, 52, 52, 52, 54, 60, 62, 96, 98

प्रेक्षणों की संख्या n=15 जो कि विषम संख्या है

माध्यक $= \left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ वें पद का मान

$$= \frac{15+1}{2} = 8\text{वें पद का मान}$$

माध्यक = 52

बहुलक: दिए हुए प्रेक्षणों में 52 सबसे अधिक 3 बार आया है अत: बहुलक = 52

क्योंकि बहुलक सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण का मान होता है।

प्रश्न 8. निम्नलिखित आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है यदि आंकड़ों का माध्यक 63, हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

$29, 32, 48, 50, x, x+2, 72, 78, 84, 95$

हल: यहाँ पर दिए गए आंकड़े आरोही क्रम में ही व्यवस्थित हैं तथा प्रेक्षणों की कुल संख्या = 10

10 एक सम संख्या है

सूत्र : जब n सम संख्या है

माध्यक $= \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{n}{2}\right)\text{ वें पद का मान} + \left(\dfrac{n}{2}+1\right)\text{ वें पद का मान}\right]$

दिया गया है: माध्यक= 63

$$63 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{10}{2}\right)\text{वें पद का मान} + \left(\frac{10}{2}+1\right)\text{वें पद का मान}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[6\text{ वें पद का मान} + 7\text{वें पद का मान}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[x+x+2]$$

$$\Rightarrow 63 = \frac{2x+2}{2} = \frac{2(x+1)}{2} \Rightarrow x+1 = 63 \Rightarrow x = 6$$

अभ्यास प्रश्न : वस्तुनिष्ट प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

1. वह विज्ञान जो प्रदत्त आंकड़ों के संकलन, विश्लेषण तथा निर्वचन से संबंधित नियमों का अध्ययन करता है, कहलाता है:
   (a) प्रायिकता (b) बीजगणित
   (c) सांख्यकी (d) त्रिकोणमिति
2. एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किये गए तथ्यों या अंकों को जो संख्यात्मक या अन्य रूप में हो सकते हैं को क्या कह सकते हैं?
   (a) आंकड़े (b) संकेत
   (c) पूर्ण अंक (d) कोई नहीं
3. जब किसी स्रोत से जिसमे सूचनाएँ पहले से ही एकत्रित हैं, से आंकड़े प्राप्त किए गए हों उन आंकड़ों को कहते हैं:
   (a) प्राथमिक आंकड़े (b) द्वितीयक आंकड़े
   (c) तृतीयक आंकड़े (d) इनमे में से कोई नहीं
4. सभी प्रेक्षणों का योग/प्रेक्षणों की कुल संख्या =
   (a) माध्यक (b) बहुलक
   (c) माध्य (d) परास
5. माध्य, माध्यक और बहुलक का अध्ययन किया जाता है:
   (a) प्राथमिक आंकड़ोंमें (b) केंद्रीय प्रवृत्ति की मापमें
   (c) त्रिकोणमिति में (d) बीजगणित मे
6. प्रेक्षणों का वह मान जो इसे ठीक 2 भागों में बाँटता क्या कहलाता है?
   (a) माध्यक (b) माध्य
   (c) बहुलक (d) बहुभुज
7. प्रथम पांच विषम प्राकृत संख्याओं का माध्य क्या होगा?
   (a) 3 (b) 7
   (c) 5 (d) 4
8. सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण होता है।
   (a) माध्य (b) बहुलक
   (c) माध्यक (d) आयत चित्र
9. यदि n सम संख्या है तब माध्यक =
   (a) $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान (b) $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान
   (c) $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षण का माध्य (d) (n) वें प्रेक्षण का मान

10. यदि n विषम संख्या है तब माध्यक =

(a) $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान (b) $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान

(c) $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षण का मान (d) इनमे से कोई नही

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को .....कहते हैं।
2. संख्या 7, 8 और 9 का माध्य .....होता है।
3. किसी वर्ग की उच्च सीमा और निम्न सीमा के अंतर को .....कहते हैं।
4. एक निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किये गये तथ्यों या अंकों को .....कहा जाता है।
5. वर्गअंतराल 80–90 में 80 वर्ग की .....वर्ग सीमा है।
6. आंकडों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर मध्य पद .....कहलाता है।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए–

1. सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को बहुलक कहा जाता है।
2. आंकडों के अधिकतम व न्यूनतम मानों के अंतर को आंकडों का परिसर कहते हैं।
3. वर्गअंतराल 50–60 में 50 वर्ग की उच्च वर्ग सीमा है।
4. वर्गअंतराल 10–20 में 20 वर्ग की उच्च वर्ग सीमा है।
5. दंड चित्र सदैव उर्ध्वाधार बनाये जाते हैं।
6. माध्यक आंकडों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर मध्य पद होता है।
7. माध्य, आंकडों का औसत मान होता है।

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए :

1. सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को क्या कहते हैं?
2. $2, 4, 2, 7, 4, 5, 5, x$ का बहुलक 4 है तो x का मान क्या होगा?
3. वर्ग 50–60 का परास ज्ञात करो?
4. संख्या 3, 4 व 5 का समांतर माध्य ज्ञात करो?
5. आंकडों 5, 3, 1, 9, 7 का माध्यक क्या होगा?
6. आंकडों का औसत मान क्या कहलाता है?
7. केन्द्रीय प्रवत्ति की माप कौन–कौन सी हैं?

प्रश्न 5. सही जोडी बनाईये –

A	B
(i) माध्य, माध्यक और बहुलक हैं	(अ) बहुलक
(ii) सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण	(ब) 6
(iii) आंकडों का औसत मान	(स) माध्यक
(iv) वितरण को आरोही या अवरोही क्रम में करने पर मध्य पद	(द) केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप
(v) 5, 6, और 7 का माध्य	(ड) 5
(vi) 7, 1, 3, 9, 5 का माध्यक	(च) माध्य
(vii) वर्गअंतराल 50–60 की उच्च वर्ग सीमा	(छ) 50
(viii) वर्गअंतराल 50–60 की निम्न वर्ग सीमा	(ज) 60

प्रश्न 6. एक कक्षा के 9 विद्यार्थियों की (सेंटीमीटर में) लम्बाईयां निम्न हैं

155, 160, 145, 149, 150, 147, 152, 144, 148 इन आंकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7. आंकड़ों 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 8. कक्षा 9वीं के 15 विद्यार्थियों के रक्त समूह ये हैं A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O

इन आंकड़ों को बारम्बारता बंटन सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए। बताइए कि इन विद्यार्थियों में कौन सा रक्त समूह विरलतम है?

प्रश्न 9. दिए हुए आंकड़ों1 ,5 ,11 ,2 ,9 ,6 ,4 ,7का माध्यक ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 10. एक क्रिकेट ने 8 पारियों निम्नलिखित रन बनाए 58, 76, 40, 35, 46, 50, 0, 100 उसका माध्य स्कोर ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11. एक टीम ने फुटबॉल के 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए : 2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3 इन गोलों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 12. किसी फैक्ट्री के 30 श्रमिकों की साप्ताहिक मजदूरी रुपयों में निम्नलिखित है :

830, 835, 890, 810, 835, 836, 869, 845, 898, 890, 820, 860, 832, 833, 855, 845, 804, 808, 812, 840, 885, 835, 835, 836, 878, 840, 868, 890, 806, 840

मिलान चिन्हों का प्रयोग करते हुए अंतरालों 800–810, 810–820.... इत्यादि वाली एक वर्गीकृत बारम्बारता सारणी बनाइए।

प्रश्न 13. निम्न सारणी से एक फैक्ट्री में काम कर रहे 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन ज्ञात कीजिए :

वेतन	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
कर्मचारियों की संख्या	16	12	10	8	6	4	3	1

प्रश्न 14. गणित की एक परीक्षा में 15 विद्यार्थियों द्वारा (25में से) प्राप्त अंक निम्न हैं

19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

इन आंकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 15. निम्नलिखित बारम्बारता सारणी में नीचे दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

वर्ग अंतराल	100–125	125–150	150–175	175–200	200–225	225–250	250–275	275–300	300–325	योग
बारम्बारता (श्रमिकों की संख्या)	45	25	55	125	140	55	35	50	20	550

(i) वर्ग अंतरालों की माप क्या है?

(ii) किस वर्ग की सबसे अधिक बारम्बारता है?

(iii) किस वर्ग की सबसे कम बारम्बारता है?

(iv) किन दो वर्गों की बारम्बारता एक ही है?

प्रश्न 16. एक परीक्षा में एक कक्षा के 51 विद्यार्थियो द्वारा 100 में से प्राप्त किये गये अंक निम्न सारणी में दिये गये हैं–

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100	कुल योग
विद्यार्थियों की संख्या	5	10	4	6	7	3	2	2	3	9	51

इस बारंबारता बंटन सारणी के संगत बारंबारता बहुभुज बनाईये।

प्रश्न 17. एक पार्क में खेल रहे विभिन्न आयु वर्ग के बच्चों की संख्या का एक यादृच्छिक सर्वेक्षण (रेंडम सर्वे) करने पर निम्नलिखित आंकडे प्राप्त हुये –

आयु (वर्षो में)	1–2	2–3	3–5	5–7	7–10	10–15	15–17
बच्चों की संख्या	5	3	6	12	9	10	4

उपरोक्त दिये गये आंकडों को निरूपित करने वाला एक आयत चित्र बनाईये।

प्रश्न 18. एक पौधे की 40 पत्तियों की लंबाईयाँ 1 मिमी तक शुद्ध मापी गई हैं और प्राप्त आंकडों को निम्नलिखित सारणी में निरूपित किया गया है–

लंबाई (मिमी में)	पत्तियों की संख्या
118–126	3
127–135	5
136–144	9
145–153	12
154–162	5
163–171	4
172–180	2

दिये हुये आंकडों को निरूपित करने वाला एक आयत चित्र खींचिये।

उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक 1.

1. (c) सांख्यकी, 2. (a) आंकड़े, 3. (b) द्वितीयक आंकड़े, 4. (c) माध्य

5. (b) केंद्रीय प्रवृत्ति की माप में, 6. (a) माध्यक, 7. (c) 5, 8. (b) बहुलक

9. (c) $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षण का माध्य, 10. (b) $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान

प्रश्न क्रमांक 2.

1. बहुलक, 2. 8, 3. परिसर, 4. आंकड़े, 5. निम्न, 6. माध्यक

प्रश्न क्रमांक 3.

1. सत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. सत्य, 5. सत्य, 6. सत्य, 7. सत्य

प्रश्न क्रमांक 4.

1. बहुलक, 2. 4, 3. 10, 4. 4, 5. 5, 6. सभी प्रेक्षणों का योग/प्रेक्षणों की कुल संख्या,

7. माध्य, माध्यक और बहुलक

प्रश्न 5. सही जोडी बनाईये –

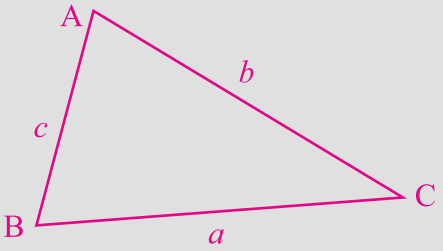
A	B
(i) माध्य, माध्यक और बहुलक हैं	(द) केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप
(ii) सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण	(अ) बहुलक
(iii) आंकडों का औसत मान	(च) माध्य
(iv) वितरण को आरोही या अवरोही क्रम में करने पर मध्य पद	(स) माध्यक
(v) 5, 6, और 7 का माध्य	(ब) 6
(vi) 7, 1, 3, 9, 5 का माध्यक	(ड) 5
(vii) वर्गअंतराल 50–60 की उच्च वर्ग सीमा	(ज) 60
(viii) वर्गअंतराल 50–60 की निम्न वर्ग सीमा	(छ) 50

अध्याय-10
हीरोन का सूत्र

यदि किसी त्रिभुज का आधार व ऊंचाई (शीर्षलम्ब) ज्ञात हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ;

सूत्र : $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊंचाई या $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ शीर्षलम्ब की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है।

किन्तु जब त्रिभुज की तीनों भुजाएँ ज्ञात हों तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हीरोन के सूत्र का उपयोग करेंगें।



हीरोन का सूत्र:

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ S त्रिभुज की अर्ध-परिमाप है तथा a, b व c त्रिभुज की भुजाएँ हैं

या $2S = a+b+c$

प्रश्न 1. ΔABC की भुजाएं क्रमश: 40 मी. 24 मी.एवं 32 मी. हैं, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

निर्देश : शिक्षक बच्चों को प्रश्न को बार-बार पढने के लिए कहें और पूछें कि प्रश्न में क्या दिया है, क्या ज्ञात करना है और किस सूत्र की आवश्यकता होगी?

हल : ΔABC में

$a = 40\ cm, b = 24\ cm, c = 32\ cm$

ज्ञात करना है - त्रिभुज का क्षेत्रफल?

आवश्यकसूत्र ; त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(शिक्षक बच्चों को बताएँ कि सूत्र में S, त्रिभुज की अर्ध-परिमाप है तथा अर्ध-परिमाप ज्ञात करने में बच्चों की सहायता करें)

$$S = \frac{a+b+c}{2} \text{ या } 2S = a+b+c$$

$$S = \frac{40+24+32}{2}$$

$$S = \frac{96}{2}$$

$$S = 48\ cm$$

Δ का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{48(48-40)(48-24)(48-32)}$

$= \sqrt{48\times8\times24\times16}$

$= \sqrt{16\times3\times8\times8\times3\times16}$

$= 16\times3\times8 = 48\times8$

$= 384 cm^2$

प्रश्न 2. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात $12:17:25$ है और उसकी परिमाप 540 सेमी. है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : (शिक्षक बच्चों को परिमाप व अनुपात की अवधारणा स्पष्ट करके त्रिभुज की भुजाएँ ज्ञात करने में सहायता करें)

ज्ञात है–भुजाओं का अनुपात $= 12:17:25$

अत: माना त्रिभुज की भुजाएँ a, b और c इस प्रकार हैं कि

$a = 12x$

$b = 17x$

$c = 25x$

परिमाप $= 540\, cm$

S=अर्ध–परिमाप $= \dfrac{540}{2} = 270 cm$ $\qquad S = \dfrac{a+b+c}{2}$

$270 = \dfrac{54x}{2} \Rightarrow 270 = 27x \Rightarrow x = 10$

$a = 12x = 12\times10 = 120\, cm$

$b = 17x = 17\times10 = 170\, cm$

$c = 25x = 25\times10 = 250\, cm$

Δ का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{270\times(270-120)(270-170)(270-250)}$

$= \sqrt{270\times150\times100\times20}$

$= \sqrt{3\times3\times3\times5\times2\times10^5\times3} = 3\times3\sqrt{5\times2\times10^5}$

$= 3\times3\sqrt{10\times10^5} = 9\times\sqrt{10^6}$

$= 9\times10^3 = 9000\ cm^2$

सामान्यत: बच्चे वर्गमूल निकालने में कठिनाइयाँ महसूस करते हैं अत: आसान तरीके से वर्गमूल निकलवाने में सहायता करें। जैसे – $= \sqrt{27\times15\times2\times5} = \sqrt{3\times3\times3\times3\times5\times2\times5}$

$= \sqrt{3\times3\times3\times3\times5\times5\times2}$

$= 3\times3\times5\times\sqrt{2} = 45\sqrt{2}$

अभ्यास प्रश्न :

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

1. किसी त्रिभुज की भुजाएँ a,b और c हों तो इसकी अर्ध-परिमाप s होती हैं :

   (अ) $a+b+c$ (ब) $\frac{a+b+c}{2}$

   (स) $2(a+b+c)$ (द) $\frac{a+b+c}{3}$

2. किसी त्रिभुज का आधार 12 सेमी तथा शीर्षलम्ब 8 सेमी हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा :

   (अ) 12 वर्ग सेमी (ब) 40 वर्ग सेमी

   (स) 48 वर्ग सेमी (द) 70 वर्ग सेमी

3. हीरोन का सूत्र होता है-

   (अ) $s(s-a)(s-b)(s-c)$ (ब) $s(s+a)(s+b)(s+c)$

   (स) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (द) $\sqrt{s(s+a)(s+b)(s+c)}$

प्रश्न 2. सत्य/असत्य लिखिए।

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊंचाई होता है।
2. विषमबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल $= s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)$ होता है जहाँ a,b,c त्रिभुज की भुजाएँ तथा s अर्ध-परिमाप है।
3. हीरोन का सूत्र केवल समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में प्रयुक्त होता है।

प्रश्न 3. एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए :

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल संबंधी हीरोन का सूत्र लिखिए।
2. हीरोन का जन्म कहाँ हुआ था?
3. किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालने का सूत्र लिखिए।
4. किसी त्रिभुज के अर्ध परिमाप लिखिए।

प्रश्न 4. सही जोड़ी मिलाइए :

स्तंभ ''अ''	स्तंभ ''ब''
1. हीरोन के सूत्र में $S=$	(अ) आधार $\times$ शीर्षलम्ब
2. त्रिभुज का क्षेत्रफल $=$	(ब) $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$
3. विषमबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल	(स) $\frac{a+b+c}{2}$
4. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल	(द) $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊंचाई
5. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल	(ई) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

प्रश्न 5. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. किसी त्रिभुज का आधार 4 सेमी और ऊँचाई (शीर्षलम्ब)6 सेमी हो तो त्रिभुज काक्षेत्रफल.....होगा।

2. किसी त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाईयों योग को उसकी ..... कहते हैं।

प्रश्न 6. किसी त्रिभुज का आधार 16 सेमी और ऊँचाई (शीर्षलम्ब) 8 सेमी हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7. एक समान्तर चतुर्भुज का आधार और संगत शीर्षलम्ब क्रमशः 10 सेमी और 3.5 सेमी है, तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 8. किसी त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः 40 मीटर, 24मीटर, 32मीटर हो तो उसका अर्ध परिमाप क्या होगा?

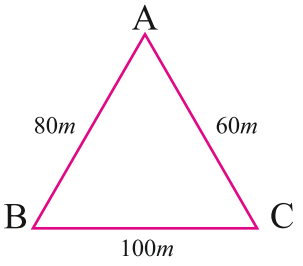
प्रश्न 9. एक यातायात के संकेत बोर्ड में "आगे स्कूल है" लिखा है और यह भुजा a वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार का है हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इस बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि संकेत बोर्ड का परिमाप $180cm$ है।

प्रश्न 10. एक समद्विबाहु त्रिभुज की परिमाप 30 सेमी है और उसकी बराबर भुजाएँ 12 सेमी लम्बाई की है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11. एक त्रिभुजाकार पार्क ABC की भुजाएँ $120m$, $80m$ और $50m$ है पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 12. एक त्रिभुजाकार भूखंड की भुजाओं अनुपात 3:5:7 है और उसका परिमाप $300m$ है इस भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

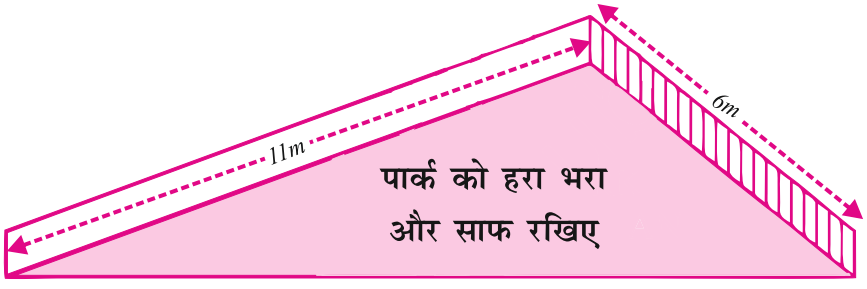
प्रश्न 13.



उपरोक्त आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 14. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 8 cm और 11 cm हैं और जिसकी परिमाप $32cm$ है।

प्रश्न 15. किसी पार्क में एक फिसल पट्टी (Slide) बनी हुयी है। इसकी पार्श्वीय दीवारों में से एक दीवार किसी रंग से पेंट किया गया है और उस पर "पार्क को हरा भरा और साफ रखिए"। यदि दीवार की विमाएँ 15 मी., 11 मी. और 6 मी. है तो रंग से पेंट हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक 1.

1. (ब) $\frac{a+b+c}{2}$ 2. (स) 48 वर्ग सेमी

3. (स) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

प्रश्न क्रमांक 2.

1. सत्य 2. असत्य

3. असत्य

प्रश्न क्रमांक 3.

(1) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (2) मिस्र में

(3) $\frac{1}{2}\times$ आधार $\times$ ऊंचाईया (4) $\frac{a+b+c}{2}$

प्रश्न क्रमांक 4.

	स्तंभ ''अ''	स्तंभ ''ब''
1.	हीरोन के सूत्र में $S=$	(स) $\frac{a+b+c}{2}$
2.	त्रिभुज का क्षेत्रफल =	(द) $\frac{1}{2}\times$ आधार $\times$ ऊंचाई
3.	विषमबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल	(ई) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
4.	समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल	(ब) $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$
5.	समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल	(अ) आधार $\times$ शीर्षलम्ब

प्रश्न क्रमांक 5.

(1) 12 वर्ग सेमी (2) परिमाप

अध्याय-11
पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

लंब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

तथा शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(r+l)$

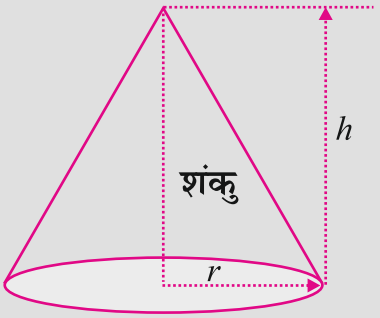
जहाँ r शंकु के आधार की त्रिज्या तथा h ऊँचाई है।

और तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

तथा अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

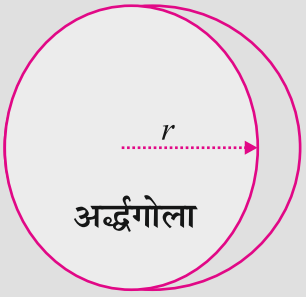


आयतन संबंधी सूत्र :-

शंकु का आयन $= \frac{1}{3}\pi r^2$ जहाँ r शंकु के आधार की त्रिज्या है तथा h ऊँचाई है।

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

जहाँ r अर्धगोले की त्रिज्या है।



उदाहरण

प्रश्न 1. एक लम्बवृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी ऊँचाई $10cm$ है और आधार की त्रिज्या $7\ cm$ है। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ लीजिए)

हल : लंब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10$

$= 220 cm^2$

प्रश्न 2. एक लम्ब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई $16\ cm$ है और आधार की त्रिज्या $12\ cm$ है। शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल : यहाँ $h = 16cm$ और $r = 12\ cm$ है।

इसलिए $l^2 = h^2 + r^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$l = \sqrt{16^2 + 12^2}$

$= 20\ cm$

अत: शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= 3.14 \times 12 \times 20$

$= 753.6\ cm^2$

साथ हि शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2$

$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) cm^2$

$= (753.6 + 452.16) cm^2$

$= 1205.76\, cm^2$

प्रश्न 3. $7cm$ त्रिज्या वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : $7cm$ त्रिज्या वाले एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 616\, cm^2$

प्रश्न 4. $21cm$ त्रिज्या वाले एक अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा कुलपृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : $21cm$ त्रिज्या वाले एक अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

$= 2772\, cm^2$

अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

$= 4158\, cm^2$

प्रश्न 5. एक लम्ब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई और तिर्यक ऊँचाई क्रमशः $21cm$ और $28cm$ है। शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $h = 21\, cm^2$ और $l = 28\ cm$ है।

इसलिए $l^2 = h^2 + r^2$ से हमें प्राप्त होता है :

$r = \sqrt{28^2 - 21^2}$

$r = 7\sqrt{7} cm$

अतः शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21$

$= 7546 cm^3$

प्रश्न 6. मोनिका के पास केनवास का एक टुकड़ा है जिसका क्षेत्रफल $551m^2$ है। वह इससे $7m$ आधार की त्रिज्या वाला शंक्वाकार तंबू बनवाती है। यह मानते हुए कि सिलाई और कटाई में लगभग $1m^2$ केनवास नष्ट हुआ होगा, इससे बनाए जाने वाले शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : केनवास का क्षेत्रफल $551m^2$ है और $1m^2$ केनवास सिलाई इत्यादि में नष्ट हो जाता है।

अतः तंबू के लिए उपलब्ध केनवास $= (551 - 1) = 550m^2$

अब तंबू के आधार की त्रिज्या $= 7m$

ध्यान देने योग्य है कि तंबू की केवल वक्र पृष्ट ही होती है।

इसलिए तंबू का पृष्ठीय क्षेत्रफल $=550m^2$

अर्थात $\pi rl = 550$

$$\frac{22}{7}\times 7\times l = 550$$

$$l = \frac{550}{22}m$$

$l = 25m$

अब $l^2 = h^2 + r^2$ से

$$h = \sqrt{25^2 - 7^2}$$

$h = 24m$

अत: तंबू का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 7\times 7\times 24$$

$= 1232m^3$

प्रश्न 7. $11.2cm$ त्रिज्या वाले एक गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 11.2\times 11.2\times 11.2$$

$= 5887.32cm^3$

प्रश्न 8. एक शॉट-पट्ट (shot-putt) $4.9cm$ त्रिज्या वाला एक धातु का गोला है। यदि इस धातु का घनत्व (density) 7.8 ग्राम प्रति cm^3 है, तो शॉट-पट्ट का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल : शॉट-पट्ट (shot-putt) धातु का एक ठोस गोला है तथा द्रव्यमान, आयतन और घनत्व के गुणनफल के बराबर होता है।

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 4.9\times 4.9\times 4.9$$

$= 493cm^3$ (लगभग)

साथ हि, $1cm^3$ धातु का द्रव्यमान = 7.8 ग्राम

अत: शॉट-पट्ट का द्रव्यमान = 493×7.8 ग्राम

= 3845.44 ग्राम

= 3.85 किलोग्राम (लगभग)

अभ्यास प्रश्न :

प्रश्न 1 सही विकल्प चुनिए

1. अर्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र है : (जहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ है)

   (अ) $2\pi r^2$ (ब) $3\pi r^2$

   (स) $4\pi r^2$ (द) πr^2

2. निम्नलिखितमें से ठोस आकृति नहीं है :

   (अ) गोला (ब) वर्ग

   (स) अर्धगोला (द) शंकु

3. शंकु के आयतन का सूत्र है : (जहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ हैं)

   (अ) $\pi r^2 h$ (ब) $\frac{4}{3}\pi r^2 h$

   (स) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (द) $4a^2 h$

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ..... होता है जहाँ r गोले की त्रिज्या है।
2. अर्धगोले का आयतन ..... होता है। (जहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ हैं)
3. शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = ... होता है। (जहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ हैं)

प्रश्न 3. एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए :

1. शंकु के पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए (जहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ हैं)
2. एक शंकु की ऊँचाई एवं तिर्यक ऊँचाई क्रमशः 12 सेमी और 13 सेमी है, तो इसके आधार की त्रिज्या क्या होगी?
3. 3 सेमी त्रिज्या वाले गोले का आयतन क्या होगा?

प्रश्न 4. सही जोड़ी मिलाइए :

स्तंभ ''अ''		**स्तंभ ''ब''**	
(i)	शंकु का आयतन	(a)	$\pi r(r+l)$
(ii)	अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल	(b)	$\frac{4}{3}\pi r^3$
(iii)	शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल	(c)	$\frac{2}{3}\pi r^3$
(iv)	शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल	(d)	$3\pi r^2$
(v)	अर्धगोले का आयतन	(e)	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
(vi)	गोले का आयतन	(f)	πrl

प्रश्न 5. सत्य/असत्य लिखिए।

1. आयत, वृत्त, वर्ग इत्यादि समतल आकृतियों के उदाहरण हैं।

2. गोला और शंकु ठोस आकृतियों के उदाहरण नहीं हैं।

3. अर्ध गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफलऔर सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल में अनुपात 2 : 3 होता है।

प्रश्न 6. 21 सेमी. व्यास वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7. एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी तिर्यक ऊंचाई 21 सेमी. और आधार का व्यास 24 सेमी. है

प्रश्न 8. 10 सेमी. त्रिज्या वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$)

प्रश्न 9. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी है।

प्रश्न 10.14 सेमी. व्यास वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11. 3.5 सेमी. व्यास वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 12. एक शंकु की ऊंचाई 15cm है यदि इसका आयतन 1570 cm^3 है, तो इसके आधार की त्रिज्या तथा शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 13. एक अर्ध गोलाकार कटोरे की त्रिज्या 3.5 सेमी है, इसके अन्दर भरे जा सकने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 14. एक शंकु की ऊंचाई और तिर्यक ऊंचाई क्रमश: 21cm और 28 cm है, इसका आयतन ज्ञात कीजिए?

प्रश्न 15. चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक चौथाई है, तो चन्द्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन की कौन सी भिन्न है।

प्रश्न 16. धातु की एक गेंद का व्यास 4.2cm है। यदि धातु का घनत्व 8.9ग्राम/cm^3 है, तो गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए?

उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक 1.

(1) (ब) $3\pi r^2$ (2) (ब) वर्ग

(3) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

प्रश्न क्रमांक 2.

(1) $4\pi r^2$ (2) $\frac{2}{3}\pi r^2 h$

(3) $\pi r(r+l)$

प्रश्न क्रमांक 3.

(1) πrl (2) 5 सेमी

(3) 36π सेमी^{3}

प्रश्न क्रमांक 4.

	स्तंभ ''अ''		स्तंभ ''ब''
(i)	शंकु का आयतन	(e)	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
(ii)	अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल	(d)	$3\pi r^2$
(iii)	शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल	(a)	$\pi r(r+l)$
(iv)	शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल	(f)	πrl
(v)	अर्धगोले का आयतन	(c)	$\frac{2}{3}\pi r^3$
(vi)	गोले का आयतन	(b)	$\frac{4}{3}\pi r^3$

प्रश्न क्रमांक 5.

(1) सत्य (2) असत्य

(3) सत्य

अध्याय-6
रेखाएँ एवं कोण

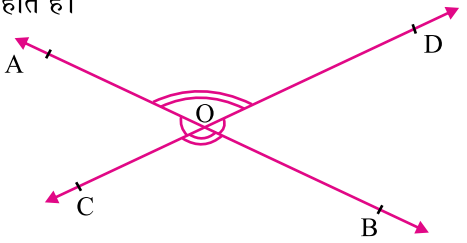
शिक्षकों के लिए निर्देश:- छात्र पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं कि एक रेखा को खींचने के लिए न्यूनतम दो बिन्दुओं की आवश्यकता होती है। छात्र कुछ अभिग्रिहीतों एवं उनकी सहायता से कुछ कथनों को सिद्ध भी कर चुके हैं। इस अध्याय में छात्र कोणों के उन गुणों का भी अध्ययन जब एक रेखा दो या दो से अधिक समान्तर रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिदुओं पर काटती है अत: संबंधित अवधारणाओं को स्पष्ट करते हुए मॉड्यूल के प्रश्नों को हल करवाएँ।

सबसे पहले आइए पिछली कक्षाओं की रेखाओं और कोणों से संबंधित परिभाषाओं एवं पदों का पुनरावलोकन करते हैं :

- एक रेखा का वह भाग जिसके दो अंत बिदु हों एक रेखाखण्ड कहलाता है।
- रेखा का वह भाग जिसका एक अंत बिदु हों एक किरण कहलाता है।
- रेखाखण्ड AB को $\overline{AB}$ से व्यक्त किया जाता है तथा किरण AB को $\overrightarrow{AB}$ से।
- रेखा $\overleftrightarrow{AB}$, किरण $\overrightarrow{AB}$ और रेखाखण्ड $\overline{AB}$ की लम्बाई को एक ही संकेत AB से व्यक्त करतें हैं।
- यदि तीन या अधिक बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हों तो वे 'संरेख' बिंदु कहलाते हैं अन्यथा 'असंरेख' बिंदु कहलाते हैं।
- जब दो किरणें एक ही अंत बिंदु से प्रारंभ होती हैं तो एक 'कोण' बनता है।
- कोण बनाने वाली दोनों किरणें कोण की भुजाएँ कहलाती हैं तथा उनका उभयनिष्ट अंत बिंदु कोण का 'शीर्ष' कहलाता है।
- एक न्यूनकोण का माप 0^0 से 90^0 के बीच होता है तथा 'समकोण' का माप ठीक 90^0 होता है।
- एक 'ऋजुकोण' 180^0 के बराबर होता है।
- वह कोण जो 180^0से अधिक परन्तु 360^0से कम माप का होता है एक 'प्रतिवर्ती कोण' कहलाता है।
- यदि कोणों का योग एक समकोण के बराबर हो तो ऐसे कोण 'पूरक कोण' कहलाते हैं।
- वे दो कोण जिनका योग 180^0हो 'संपूरक कोण कहलाते हैं।
- दो कोण 'आसन्न कोण' कहलाते हैं यदि उनमे एक उभयनिष्ट शीर्ष हो और एक उभयनिष्ट भुजा हो और वे भुजाएँ जो उभयनिष्ट नहीं हैं, उभयनिष्ट भुजा के विपरीत ओरे स्थित हों।
- **अभिगृहीत-1** यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हों तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग 180^0होता है द्य जब दो आसन्न कोणों का योग 180^0हो तो वे रैखिक युग्म बनाते हैं।
- **अभिगृहीत-2** यदिदोआसन्नकोणों का योग 180^0है तो उनकी उभयनिष्ट भुजाएँ एक रेखा बनातीं हैं।
- दोनों अभिग्रिहीतों को मिलाकर 'रैखिक युग्म अभिगृहीत' कहते हैं।

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें तो 'शीर्षाभिमुख कोण' बराबर होते हैं।

उपपत्ति:- माना AB और CD दो रेखाएँ हैं जो परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करतीं हैं तो शीर्षाभिमुख कोणों के निम्न दो युग्म प्राप्त होते हैं।



(1) $\angle AOC$ और $\angle BOD$ (2) $<AOD$ और $<BOC$

हमें सिद्ध करना है कि $\angle AOC = \angle BOD$ और $\angle AOD = \angle BOC$ किरण OA रेखा CD पर खड़ी है,

अत: $\angle AOC + \angle AOD = 180^0$..... (1)

इसी प्रकार किरण OD रेखा AB पर खड़ी है तो $\angle AOD + \angle BOC = 180^0$.....(2)

अत: (1) व (2) से $\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$ अत: परिणाम स्वरूप

$\angle AOC = \angle BOD$, इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\angle AOD = \angle BOC$

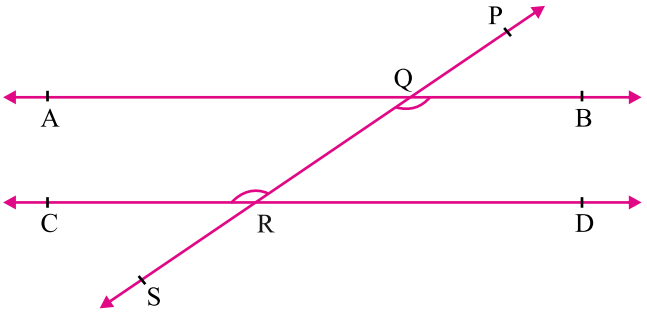
अभिगृहीत-3 यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे तो संगत कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

अभिगृहीत-4 यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि संगत कोणों का युग्म बराबर हों तो दोनों रेखाएँ परस्पर समान्तर होतीं हैं।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे तो एकांतर अन्त: कोणों का प्रत्येक युग्म बराबर होता है।

उपपत्ति-दी गई आकृति में तिर्यक रेखा PS रेखाओं AB और CD को क्रमश: Q और R पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती है कि $\angle BQR = \angle QRC$ यहाँ $AB \| CD$ है।

$\angle BQR = \angle PQA$ ..... (1) (शीर्षाभिमुख कोण हैं)



परन्तु $\angle PQA = \angle QRC$ ..... (2) (संगतकोण हैं)

अत: (1) व (2) से $\angle BQR = \angle QRC$

कुछ अन्य स्मरणीय बिंदु :

1. यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि एकांतर अन्त: कोणों के युग्म बराबर हों तो दोनों रेखाएँ परस्पर समान्तर होतीं हैं।
2. यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करे तोतिर्यक रेखा के एक हि ओरे के अन्त: कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होते हैं।
3. यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि तिर्यक रेखा के एक हि ओर के अन्त: कोणों का एक युग्म संपूरक हो तो दोनों रेखाएँ परस्पर समान्तर होतीं हैं।

अभ्यास प्रश्न :

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

1. वे रेखाएँ जो एक हि रेखा के समान्तर हों वे परस्पर होती हैं :
   (अ) समान्तर (ब) लम्बवत
   (स) सम्पाती (द) कुछ कह नहीं सकते
2. दो कोण जिनका योग 180^0 हो, कहलाता है –
   (अ) अधिक कोण (ब) आसन्न कोण
   (स) न्यून कोण (द) संपूरक कोण
3. तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्त:कोणों का योग होता है
   (अ) 360^0 (ब) 90^0
   (स) 180^0 (द) 270^0
4. पूर्ण कोण का माप होता है –
   (अ) 70^0 (ब) 270^0
   (स) 360^0 (द) 180^0

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें तो ..... कोण बराबर होते हैं।
2. एकऋजु कोण की माप ..... होती है।
3. यदि एक किरण एक रेखा पर खड़ी हों तो इस प्रकार बने दोनों आसन्न कोणों का योग ..... होता है ?
4. यदि एक तिर्यक रेखा दो समान्तर रेखाओं को इस प्रकार प्रतिच्छेद करे कि संगत कोणों का युग्म बराबर हो तो दोनों रेखाएँ परस्पर ..... होती हैं।

प्रश्न 3. एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए :

1. एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग कितना होता है?
2. समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण की माप कितनी होती है?
3. यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तो, शीर्षाभिमुख कोणों में क्या संबंध होता है?
4. जिन दो कोणों का योग 180^0 हो तो ऐसे कोण क्या कहलाते हैं?

प्रश्न 4. सही जोड़ी बनाइये:

	स्तम्भ (i)		स्तम्भ (ii)
(1)	एक ही रेखा के समांतर खींची गई दो रेखाएँ होती हैं	(अ)	शीर्ष
(2)	जिन दो कोणों का योग 180^0 हो	(ब)	समान
(3)	जिन दो कोणों का योग 90^0 हो	(स)	संपूरक कोण
(4)	उभयनिष्ठ अन्त: बिन्दु	(द)	किरण
(5)	शीर्षाभिमुख कोणों की मापें परस्पर	(ई)	पूरक कोण
(6)	एक रेखा का वह भाग जिनका एक अन्त: बिन्दु हो	(फ)	समांतर

प्रश्न 5. सत्य/असत्य लिखिए।

(1) एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है।

(2) प्रतिवर्ती कोण कि माप 180^0 से अधिक एवं 360^0 के मध्य होता है।

(3) जब दो असमान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करें तो एकांतर कोण बराबर होते हैं।

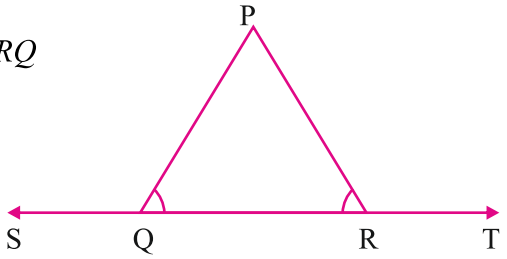
(4) ऋजु कोण की माप 360^0 होती है।

प्रश्न 6. दी गई आकृति में

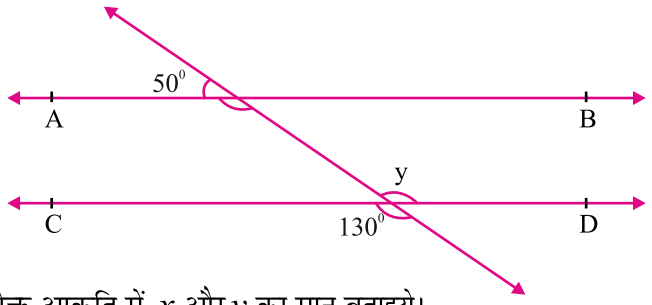
यदि $\angle PQR = \angle PRQ$

तो सिद्ध कीजिए कि

$\angle PQS = \angle PRT$

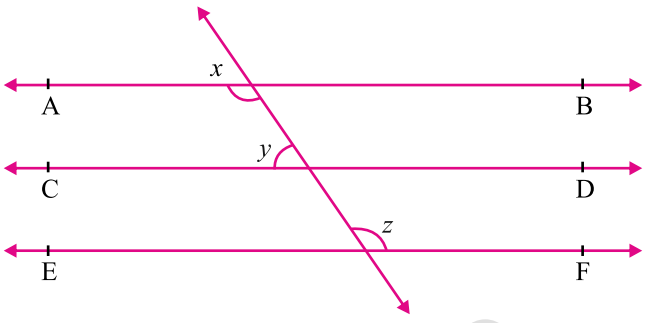


प्रश्न 7.

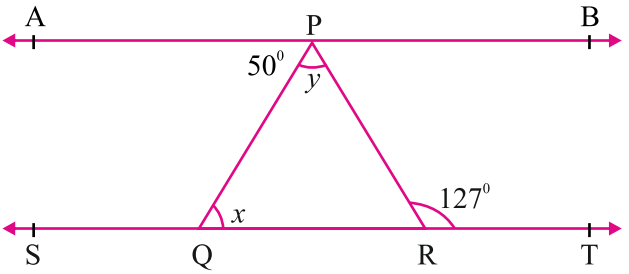


उपरोक्त आकृति में x और y का मान बताइये।

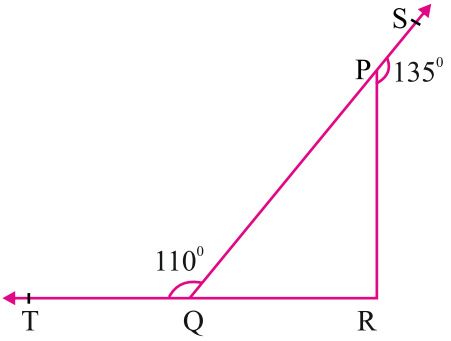
प्रश्न 8. दी गई आकृति में यदि $AB \parallel CD, CD \parallel EF$ और $y : z = 3 : 7$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।



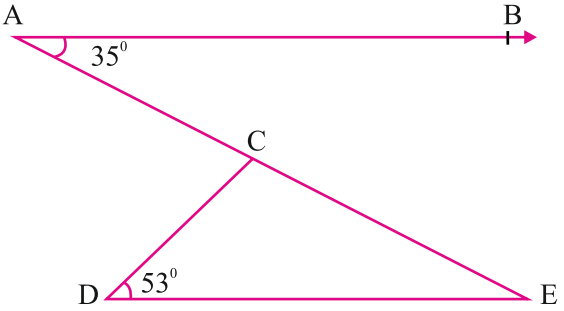
प्रश्न 9. दी गई आकृति में, यदि $AB \parallel CD, \angle APQ = 50^0$ और $\angle PRT = 127^0$ है तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।



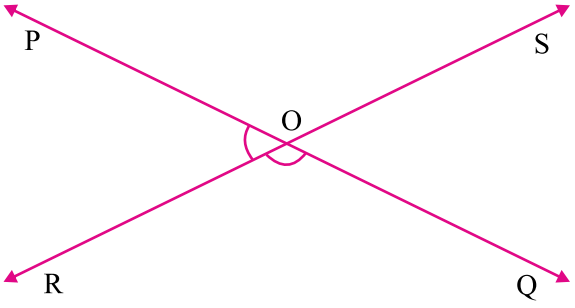
प्रश्न 10. दी गई आकृति में त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और RQ को क्रमशः बिन्दुओं S तथा T तक बढ़ाया गया है यदि $\angle SPR = 135^0$ है और $\angle PQT = 110^0$ है, तो $\angle PRQ$ ज्ञात कीजिये।



प्रश्न 11. दी गई आकृति में $AB \| DE, \angle BAC = 35^0$ और $\angle CDE = 53^0$ है तो $\angle DCE$ ज्ञात कीजिये



प्रश्न 12. दी गई आकृति में रेखाएँ PQ और RS परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छे करती हैं यदि $\angle POR : \angle ROQ = 5:7$ है, तो सभी कोण ज्ञात कीजिये।



उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक 1.

1. (अ)समान्तर
2. (द) संपूरक कोण
3. (स) 180^0
4. (स) 360^0

प्रश्न क्रमांक 2.

1. शीर्षाभिमुख
2. 180^0
3. 180^0
4. समान्तर

प्रश्न क्रमांक 3.

(1) 180^0
(2) 60^0
(3) 36π सेमी^{3}
(4) समान
(5) संपूरक कोण

प्रश्न क्रमांक 3.

	स्तम्भ (I)	**स्तम्भ (II)**
1.	एक ही रेखा के समांतर खींची गई दो रेखाएँ होती हैं	(फ) समांतर
2.	जिन दो कोणों का योग 180^0 हो	(स) संपूरक कोण
3.	जिन दो कोणों का योग 90^0 हो	(ई) पूरक कोण
4.	उभयनिष्ठ अन्त: बिन्दु	(अ) शीर्ष
5.	शीर्षाभिमुख कोणों की मापें परस्पर	(ब) समान
6.	एक रेखा का वह भाग जिनका एक अन्त: बिन्दु हो	(द) किरण

प्रश्न क्रमांक 5.

1. सत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. असत्य

अध्याय-7
त्रिभुज

जैसा कि हम जानते है कि तीन प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा बनाई गई एक बंद आकृति एक त्रिभुज (Triangle) कहलाती है। एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ तीन कोण और तीन शीर्ष होते हैं। इस अध्याय में आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता,सर्वांगसमता के नियमों, त्रिभुजों के कुछ अन्य गुणों के बारे विस्तृत रूप से अध्ययन कराने का प्रयास करें एवं विभिन्न प्रकार के माड्यूल में दिए गए अभ्यास प्रश्न अवश्य हल करवाए जाएं।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता

आप सबने अवश्य ही देखा होगा की हमारी आपकी एक ही साइज की दो फोटो की प्रतियाँ सर्वसम होती हैं इसी प्रकार एक ही माप की दो चूड़ियाँ और एक ही बैंक द्वार जारी किये गए दो एटीएम कार्ड सर्वसम होते है और ये भी गौर किया होगा की एक ही वर्ष में ढले दो एक रूपए के सिक्कों में से एक दूसरे को दूसरे पैर रखें तो वे एक दूसरे को पूर्णतया ढ़क लेते हैं। ऐसी आकृतियाँ सर्वांगसम आकृतियाँ' कहलाती है अर्थात वे आकृतियाँ जिनमें समान आकार और समान माप हैं।

हम यदि एक त्रिज्या के दो वृत्त खीचें और एक दुसरे पैर रखकर देखते हैं तो वे एक दूसरे को पुर्णत: ढक लेते हैं। अर्थात 'एक ही त्रिज्या के दो वृत्त सर्वगसम होते हैं। इसी प्रकार एक ही माप की दो भुजाओं वाले वर्ग भी सर्वांगसम होते हैं।

आइये अब दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की चर्चा करें। सर्वप्रथम हम ये जानते हैं की दो त्रिभुज सर्वगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ और कोण दुसरे त्रिभुज की भुजाएँ और कोण के समान हों। पिछली कक्षाओं में आपने त्रिभुजों की सर्वान्गसमता के लिए चार कसौटियां या नियम पढ़ चुकें हैं। आइये इनका पुनरावलोकन करें।

अभिग्रहीत – 7.1 (SAS सर्वांगसमता नियम) दो त्रिभुज सर्वान्गसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनका अंतर्गत कोण दुसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हो।

उदाहरण -

प्रश्न 1. ΔABC में $\angle A$ का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लम्ब है। दर्शाइए कि $AB = AC$ है और ΔABC समद्विबाहु है।

हल: ΔABD और ΔACD में,

$\angle BAD = \angle CAD$ [दिया है]

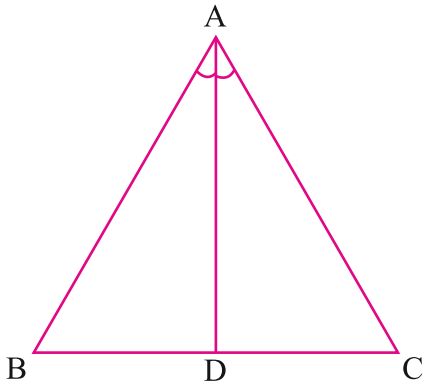
$AD = AD$ [उभयनिष्ट है]

$\angle ADB = \angle ADC = 90^0$ [दिया है]

अत: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

इसलिए $AB = AC$

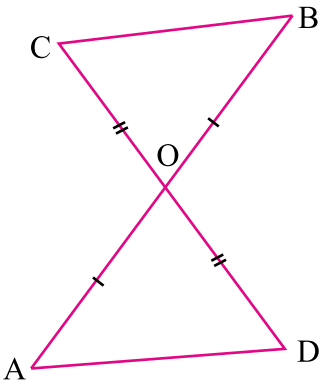
इसी कारण ΔABC समद्विबाहु है।



उदाहरण –

प्रश्न 2. दी गई आकृति में OA = OB और OD = OC

दर्शाइए की (i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ और (ii) AD || BC



हल : ΔAOD और ΔBOD में

OA = OB [दिया है]

OC = OD

क्योंकि $\angle AOD$ और $\angle BOC$ शीर्षाभिमुख कोणों का युग्म है, अत:

$\angle AOD = \angle BOC$

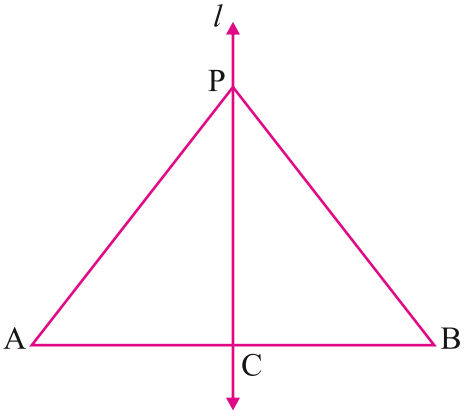
इसलिए $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ [SAS सर्वांगसमता नियम द्वारा]

सर्वांगसम त्रिभुजों AOD और BOC में अन्य संगत भाग भी बराबर होंगें अत:

$\angle OAD = \angle OBC$ है जो कि रेखाखण्डों AD और BC के लिए एकांतर कोणों का एक युग्म बनाते हैं

अत: AD || BC

प्रश्न 2. AB एक रेखाखण्ड है और रेखा l इसका लम्ब समद्विभाजक है। यदि l पर स्थित P कोई बिंदु है, तो दर्शाइए कि कि P, A और B से समदूरस्थ है।



हल : $l \perp AB$ है और AB के मध्य बिंदु C से होकर जाती है

हमें दर्शाना कि PA = PB है

इसके लिए ΔPCA और ΔPCB लेतें हैं

यहाँ AC = BC {C, AB का मध्य बिंदु है}

$\angle PCA = \angle PCB = 90^0$ है [दिया है]

PC = PC [उभयनिष्ट]

अत: $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS) इसलिए PA = PB

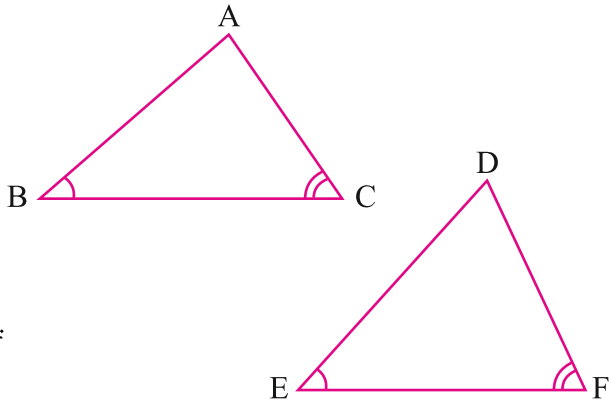
प्रमेय : दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दोनों कोणों और उनकी अंतर्गत भुजा के बराबर हों।

अर्थात दो त्रिभुजों ABC

और DEF में यदि

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle E$

और BC = EF



तो $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हों

तो उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं

प्रमेय : 2) एक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होतें हैं।

उपपत्ति–हमें एक समद्विबाहु ΔABC दिया है जिसमें AB = AC हमें सिद्ध करना है $\angle B = \angle C$

इसके लिए $\angle A$ का समद्विभाजक खींचते हैं

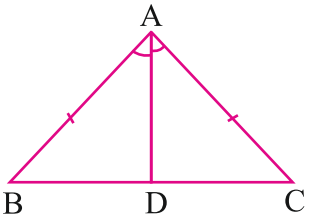
जो BC से D पर मिलता है

अब ΔADC और ΔADB में

$AB = AC$ [दिया है]

$\angle BAD = \angle CAD$ [रचना से]

$AD = AD$ [उभयनिष्ट]



अत: $\Delta ADC \cong \Delta ADB$ [SAS सर्वांगसमता नियम द्वारा]

इसलिए $\angle B = \angle C$

प्रमेय: 3) यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ एक अन्य त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

प्रमेय: 4) यदि दो समकोण त्रिभुजों, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमश: दूसरे के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

अभ्यास प्रश्न :

प्रश्न 1 सही विकल्प चुनिए

1. एक समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण होता है :-

   (अ) 50^0 (ब) 60^0

   (स) 70^0 (द) 75^0

2. निम्नलिखित में से कौन त्रिभुजों के सर्वांगसमता की कसौटी नहीं है –

   (अ) SAS (ब) ASA

   (स) SSA (द) SSS

3. समान आकार एवं समान माप वाली आकृतियाँ कहलाती हैं –

   (अ) सर्वांगसम (ब) समान

   (स) समरूप (द) बराबर

4. समकोण त्रिभुज में सबसे बड़ी भुजा होती है –

   (अ) कर्ण (ब) लम्ब

   (स) आधार (द) इनमें से कोई नहीं

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण .....होते हैं।
2. समबाहु त्रिभुज के तीनों कोण ..... होते हैं।
3. समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त ..... होते हैं।
4. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हो तो त्रिभुज ..... होते हैं।
5. यदि किसी त्रिभुज की जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों, ... त्रिभुज कहलाता है।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए –

1. समान भुजाओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम नहीं होते हैं।

2. समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।

3. दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि उनका एक ही आकार हो और एक ही माप हो।

4. यदि दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

5. समद्विबाहु त्रिभुज के तीनों कोण बराबर होते हैं।

प्रश्न 4. सही जोड़ी बनाइये:

	स्तम्भ (I)	**स्तम्भ (II)**
1.	त्रिभुज जिसका एक कोण 90^0 हो	(अ) सर्वांगसम त्रिभुज
2.	त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ समान हो	(ब) न्यूनकोण त्रिभुज
3.	त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ समान हों	(स) समकोण त्रिभुज
4.	त्रिभुज जिसका प्रत्येक कोण 90^0 से कम हो	(द) समबाहु त्रिभुज
5.	समान भुजाओं वाले दो त्रिभुज होते है	(ई) समद्विबाहु त्रिभुज

प्रश्न 5. एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए :

1. समबाहु त्रिभुज किसे कहते है।

2. किसी त्रिभुज में अधिकतम कितने समकोण हो सकते है।

3. किसी त्रिभुज मे कम से कम कितने न्यून कोण हो सकते है।

4. त्रिभुज के तीनों कोणों का योग कितना होता है।

5. एक त्रिभुज मे कितनी भुजाएँ, शीर्ष एवं कोण होते है लिखिए।

प्रश्न 6. त्रिभुज किसे कहते है।

प्रश्न 7. सर्वांगसम आकृतियों को परिभाषित करो।

प्रश्न 8. RHS सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

प्रश्न 9. SAS सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

प्रश्न 10. ASA सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

प्रश्न 11. AAS सर्वांगसमता नियम को लिखिए।

प्रश्न 12. ΔABC में $\angle A$ का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लम्ब है दर्शाइए कि $AB = AC$ अर्थात ΔABC समद्विबाहु है।

प्रश्न 13. दर्शाइए कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है।

प्रश्न 14. ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle A = 90^0$ और $AB = AC$ है तो $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिये।

प्रश्न 15. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC जिसमें $AB = AC$ है कि भुजा BC पर दो बिन्दु D और E इस प्रकार हैं कि $BE = CD$ तब दर्शाइए कि $AD = AE$

प्रश्न 16. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमे बराबर भुजाओं AC और AB पर क्रमशः शीर्ष लम्ब क्रमशः BE और CF खींचे गए है। दर्शाइए कि शीर्ष लम्ब बराबर हैं।

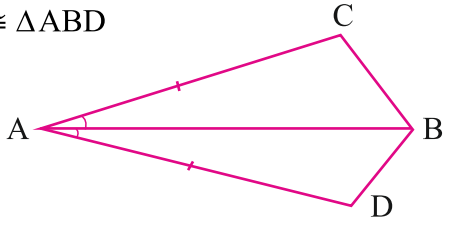
प्रश्न 17. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। AP $\perp$ BC खींच कर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$

प्रश्न 18. BE और CF एक त्रिभुजABC के दो बराबर शीर्ष लम्ब है RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिये कि त्रिभुज ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्न 19. AB एक रेखाखण्ड है और रेखा *l* इसका लम्ब समद्विभाजक है। यदि *l* पर स्थित P कोई बिंदु है, तो दर्शाइए कि P बिन्दुओं Aऔर B से समदूरस्थ है।

प्रश्न 20. चतुर्भुजABCD में AC = AD और AB, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है तो

दर्शाइए कि $\Delta ABC \cong \Delta ABD$



उत्तरमाला

प्रश्न 1. (1) (ब) 60^0
(2) (स) SSA
(3) (अ) सर्वांगसम
(4) (अ) कर्ण

प्रश्न 2. (1) बराबर (समान)
(2) बराबर(समान)
(3) सर्वांगसम
(4) सर्वांगसम
(5) समद्विबाहु त्रिभुज

प्रश्न 3. (1) असत्य
(2) सत्य
(3) सत्य
(4) असत्य
(5) असत्य

प्रश्न 4.

	स्तम्भ – (I)	स्तम्भ – (II)
1.	त्रिभुज जिसका एक कोण 90^0 हो	(स) समकोण त्रिभुज
2.	त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ समान हो	(ई) समद्विबाहु त्रिभुज
3.	त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ समान हों	(द) समबाहु त्रिभुज
4.	त्रिभुज जिसका प्रत्येक कोण 90^0 से कम हो	(ब) न्यूनकोण त्रिभुज
5.	समान माप की भुजाओं वाले दो त्रिभुज होते है	(अ) सर्वांगसम त्रिभुज

प्रश्न 5. (1) त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ समान हों
(2) एक
(3) दो
(4) 180^0
(5) तीन भुजाएँ, तीन शीर्षएवं तीन कोण

अध्याय-9
वृत्त

छात्र ऐसी बहुत सी चीजों से अवश्य रूप से परिचित होते हैं जो आकार में गोल हों जैसे छात्र ऐसी बहुत सी चीजों से अवश्य रूप से परिचित होते है जो आकर में गोल हों जैसे गाड़ी का पहिया, चूड़ियाँ, कई घड़ियों के डायल,रुपयों के सिक्के चाबी के छल्ले,कमीज के बटन आदि।

ऐसे व्यावहारिक उदाहरणों के माध्यम से एवं कुछ मॉडल्स के द्वारा वृत्त की अवधारणा को स्पष्ट करने का प्रयास करें जिससे विषयवस्तु रोचक और बोधगम्य बन सकें।

जैसे घडी में छात्रों ने ध्यान दिया होगा कि सेकेण्ड की सुई घडी के डायल के ऊपर जल्दी-जल्दी चक्कर लगाती है तथा उसका सिरा एक गोल पथ में चलता है। सेकेण्ड की सुई के सिरे से बनता हुआ पथ एक वृत्त कहलाता है इस अध्याय में हम वृत्त, इससे संबंधित अन्य पदों तथा वृत्त के कुछ गुणों के बारे में अध्ययन करेंगे।

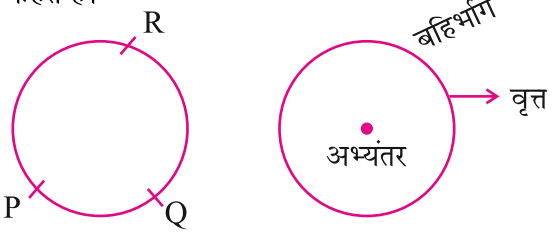
गतिविधि – छात्रों द्वारा परकार और पेंसिल है को कुछ दूरी तक खोलकर एक चक्कर घुमाते हैं, पेंसिल से कागज बनी आकृति एक वृत्त है। अर्थात 'एक तल पर उन सभी बिन्दुओं का समूह, जो तल के स्थित बिंदु से एक स्थिर दूरी पर स्थित हों, एक वृत्त कहलाता है।' स्थिर बिंदु को वृत्त का केंद्र कहते हैं तथा स्थिर दूरी को वृत्त की तृज्या कहते हैं।

एक वृत्त उस तल को जिसमे वह स्थित है तीन भागों में विभाजित करता है ये हैं :

(1) वृत्त के अन्दर का भाग जिसे अभ्यंतर भी कहते हैं।

(2) वृत्त के बाहर का भाग जिसे बहिर्भाग भी कहते हैं।वृत्त तथा इसका अभ्यंतर मिलकर वृत्तीय क्षेत्र बनाते हैं ५ दो बिन्दुओं के बीच वृत्त के भाग को एक चाप (arc) कहते हैं। दी गयी आकृति में बिन्दुओं P और Q के बीच वृत्त के भागों को देखने पर पाते हैं कि दोनों भागों में एक भाग बड़ा तथा एक छोटा है बड़े भाग को दीर्घचाप तथा छोटे भाग को लघुचाप कहते हैं।

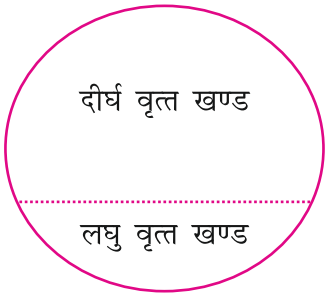
लघुचाप को $\overset{\frown}{PQ}$ से तथा दीर्घचाप को $\overset{\frown}{PRQ}$ से व्यक्त करते हैं। यदि P और Q व्यास के सिरे हों तो दोनों चाप बराबर हो जाते हैं और प्रत्येक को अर्धवृत्त कहते हैं।

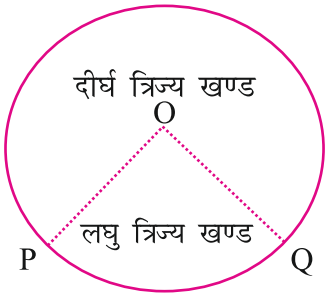


(3) सम्पूर्ण वृत्त की लम्बाई को उसकी 'परिधि' कहते हैं। जीवा तथा प्रत्येक चाप के मध्य क्षेत्रों को वृत्तीय क्षेत्र का खण्ड या सरल शब्दों में 'वृत्तखण्ड' कहते हैं। इसके भी दो प्रकार होते हैं : दीर्घ वृत्तखण्डतथा लघुवृत्तखण्ड।

केंद्र को एक चाप के सिरों से मिलाने वाली त्रिज्याओं एवं चाप के बीच के क्षेत्र को 'त्रिज्यखण्ड' कहते हैं। वृत्तखण्ड की तरह लघु त्रिज्य खण्ड तथा दीर्घ त्रिज्य खण्ड क्रमश: लघुचाप तथा दीर्घ चाप के संगत होते हैं। जब दोनों

चाप बराबर हो जाते हैंऔर प्रत्येक अर्धवृत्त होता है, तो दोनों वृत्तखण्ड तथा त्रिज्यखण्ड एकसमान हो जाते हैंऔर प्रत्येक को अर्धवृत्तीय क्षेत्र कहते हैं।



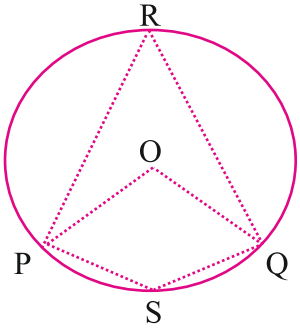


जीवा द्वारा एक बिंदु पर अंतरित कोण :

एक रेखाखंड PQ तथा एक बिंदु R जो रेखा PQ पर स्थित न हो लेतें हैं PR तथा QR को मिलतें हैं, $\angle PRQ$, रेखाखण्ड PQ द्वारा बिंदु R पर अंतरित कोण कहलाता है।

$\angle POQ$ जीवा PQ द्वारा केंद्र O पर अंतरित कोण है।

$\angle PRQ$ तथा $\angle PSQ$ क्रमशः PQ द्वारा दीर्घचाप PQ तथा लघुचाप PQ पर स्थित बिन्दुओं R और S पर अंतरित कोण है।



यदि वृत्त की दो या दो से अधिक बराबर जीवाएं खींचें तथा उनके द्वारा आंतरिक कोण को मापे आप पाएंगें कि उनके केंद्र पर अंतरित कोण समान है।

उदाहरण प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि वृत्त की बराबर जीवाएं केंद्र पर समान कोण अंतरित करती है।

उपपत्ति :- एक वृत्त, जिसका केंद्र O है की दो बराबर जीवाएं AB और CD दी हुई हैं।

हमें सिद्ध करना है $\angle AOB = \angle COD$

ΔAOB तथा ΔCOD में

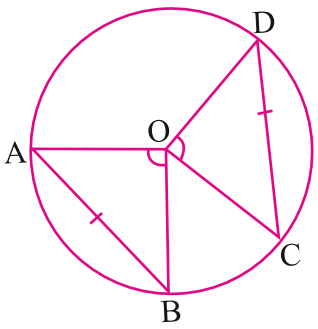
$OA = OC$ (एक वृत्त की त्रिज्जाएं)

$OB = OD$ (एक वृत्त की त्रिज्जाएं)

$AB = CD$ (दिया है)

अतः $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (SSS नियम)

इस प्रकार $\angle AOB = \angle COD$



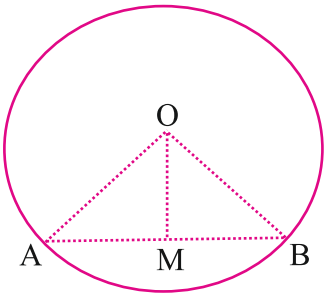
"वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है"

उदाहरण प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि एक वृत्त के केंद्र से एक जीवा को समद्विभाजित करने के लिए खींची गई रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

उपपत्ति :- एक वृत्त, जिसका केंद्र O है, की AB जीवा है और O को AB के मध्य बिंदु M से मिलाया गया है।

हमें सिद्ध करना है की $OM \perp AB$

OA तथा OB को मिलते है। तो



ΔOAM तथा ΔOBM में

$OA = OB$ (वृत्त की त्रिज्जाएं)

$AM = BM$ (M, AB का मध्य बिंदु है, दिया है)

$OM = OM$ (उभयनिष्ट)

अत: $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (SSS नियम)

इससे प्राप्त होता है की $\angle OMA = \angle OMB = 90^0$

अत: $OM \perp AB$

अन्य महत्वपूर्ण तथ्य:

- तीन असरेखीय बिन्दुओं से जाने वाला एक और केवल एक वृत्त होता है।
- एक वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएं लम्बाई में समान होती हैं।
- एक वृत्त की (या सर्वांगसमता वृत्तों की) बराबर जीवाएं केंद्र से (या केन्द्रों से) समान दूरी पर होती है।
- एक बिंदु से एक रेखा पर लम्ब की लम्बाई रेखा की बिंदु से दूरी होती है।

अभ्यास प्रश्न :

प्रश्न1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

1. तीन असरेखीय बिन्दुओं से होकर जाने वाले वृत्तों की संख्या होती है –

   (अ) 1 (ब) 2

   (स) 3 (द) 4

2. अर्द्धवृत्त पर बना कोण होता है –

   (अ) 180^0 (ब) 45^0

   (स) 90^0 (द) 270^0

3. किसी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग होता है:-

   (अ) 360^0 (ब) 180^0

   (स) 90^0 (द) 60^0

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. किसी वृत्त के केंद्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को ..... करता है।
2. वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त का ..... होता है।
3. यदि किसी वृत्त की त्रिज्याएँ बराबर हो तो वे ..... होते हैं।
4. वृत्त की परिधि के किन्ही दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड को वृत्त की ..... कहते हैं।

प्रश्न 3. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए :

1) एक वृत्त जिस तल पर स्थित है, उसे कितने भागों में विभाजित करता है।
2) $5cm$ त्रिज्या वाले वृत्त के केंद्र से $3cm$ की दूरी पर स्थित जीवा लम्बाई क्या होगी?
3) दो सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याओं में क्या सम्बन्ध होता है?
4) वह जीवा जो वृत्त के केंद्र से होकर जाती है, क्या कहलाती है ?

प्रश्न 4. सही जोड़ी बनाइए:-

	स्तम्भ - (I)	**स्तम्भ - (II)**
1.	अर्धवृत्त का कोण:	(अ) व्यास होती है
2.	चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग :	(ब) वृत्त के केंद्र से होकर जाता है
3.	एक वर्ग होता है :	(स) 90^0
4.	वृत्त की सबसे बड़ी जीवा:	(द) बराबर
5.	किसी जीवा का लम्बार्धक :	(इ) चक्रीय समचतुर्भुज
6.	दो बराबर वृत्तों को त्रिज्याएँ:	(फ) 180^0

प्रश्न 5. सत्य/असत्य लिखिए -

1. केंद्र को वृत्त पर किसी बिंदु से मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त की त्रिज्या होती है।
2. यदि एक वृत्त को तीन बराबर चापों में बांट दिया जाए तो प्रत्येक चाप दीर्घचाप होता है।
3. दीर्घ वृत्तखण्ड में आन्तरिक कोण न्यून कोण होता है।
4. वृत्त की सामान जीवायें केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं।
5. वृत्त की सबसे बड़े जीवा त्रिज्या कहलाती हैं।

प्रश्न 6. वृत्त की परिभाषा लिखिए।

प्रश्न 7. दो वृत्तों के सर्वांगसम होने कि स्थिति लिखिए।

प्रश्न 8. किसी चक्रीय चतुर्भुज में $\angle A = 100^0$, $\angle B = 50^0$, $\angle D = 130^0$ तो $\angle C$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 9. वृत्त की जीवा व वृत्त के व्यास से क्या समझते हैं।

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए की सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएं उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अंतरित करती है।

प्रश्न 11. एक दिए वृत्त के केंद्र को ज्ञात करने की विधि का वर्णन कीजिए।

सिद्ध करो की वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लांब जीवा को समद्विभाजित करता है।

प्रश्न 12. यदि दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें, तो सिद्ध कीजिए की उनके केंद्र उभयनिष्ट जीवा को लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है।

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिये की चक्रीय समान्तर चतुर्भुज आयत होता है।

प्रश्न 14. 5 सेमी तथा 3 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करतें हैं, तथा उनके केन्द्रों की बीच की दूरी 4 सेमी है। उभयनिष्ट जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 15. सिद्ध करो की चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180^0 होता है।

प्रश्न 16. सिद्ध करो की किसी चतुर्भुज के अंत: कोणों के समद्विभाजकों से बना चतुर्भुज चक्रीय होता है।

प्रश्न 17. एक वृत्त की $5cm$ तथा $11cm$ लम्बी दो जीवाएं AB और CD समान्तर है और केंद्र की विपरीत दिशा में स्थित है। यदि AB और CD के बीच की दूरी $6cm$ हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

उत्तरमाला

प्रश्न 1. (1) (अ) 1(2) (स) 90^0

(3) (ब) 180^0

प्रश्न 2. (1) समद्विभाजित (2) व्यास

(3) सर्वांगसम (4) जीवा

प्रश्न 3. (1) त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ समान हों (2) एक

(3) दो (4) 180^0

(5) तीन भुजाएँ, तीन शीर्षएवं तीन कोण

प्रश्न 4.

	स्तम्भ - (I)	**स्तम्भ - (II)**
1.	अर्धवृत्त का कोण	(स) 90^0
2.	चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग	(फ) 180^0
3.	एक वर्ग होता है	(इ) चक्रीय समचतुर्भुज
4.	वृत्त की सबसे बड़ी जीवा	(अ) व्यास होती है
5.	किसी जीवा का लम्बार्धक	(ब) वृत्त के केंद्र से होकर जाता है
6.	दो बराबर वृत्तों की त्रिज्याएँ	(द) बराबर होती है

प्रश्न 5. (1) असत्य (2) असत्य

(3) सत्य (4) सत्य

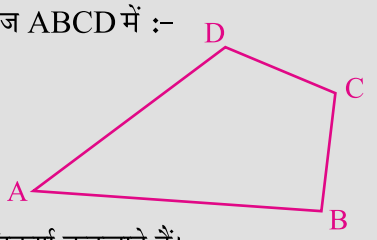
(5) असत्य

अध्याय-8
चतुर्भुज

हम जानते हैं की तीन असरेख बिन्दुओं को युग्मो में जोड़ने पर जो आकृति प्राप्त होती है त्रिभुज कहलाती है। अब अगर चार बिंदु अंकित कर देखें कि क्रमानुसार युग्मो में इन्हें जोड़ने पर क्या आकृति बनती है?

ध्यान देने पर हम पाते है कि यदि सभी बिंदु सरेख हों तो हमें रेखाखण्ड प्राप्त होता है। यदि चार बिन्दुओं में से तीन सरेख हों तो त्रिभुज और यदि चार में से कोई तीन सरेख न हों तो हमें चतुर्भुज प्राप्त होता है।

एक चतुर्भुज में चार भुजाएँ चार कोण और चार शीर्ष होते हैं जैसे निम्न चतुर्भुज ABCD में :-



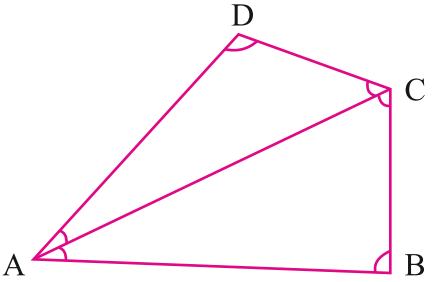
AB, BC, CD और DA चार भुजाएँ हैं

A,B,C और D चार शीर्ष हैं तथा $\angle A, \angle B, \angle C$ और $\angle D$ शीर्षों पर बने चार कोण हैं। अब यदि सम्मुख शीर्षों A और C तथा B और D को जोड़े तो AC तथा BD चतुर्भुज ABCD के दो विकर्ण कहलाते हैं।

" चतुर्भुज के चरों कोणों को योग 360^0 होता है" इसकी जांच चतुर्भुज का एक विकर्ण खींचकर उसे दो त्रिभुजों में विभाजित करके कर सकते हैं।

प्रश्न 1. दिखाइए की चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 होता है।

हल : माना ABCD एक चतुर्भुज है और AC इसका एक विकर्ण है।



ΔADC में

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180^0$..... (1)

उसी प्रकार ΔBAC में

$\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^0$.....(2)

(1) व (2) को जोड़ने पर

$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^0 + 180^0 = 360^0$

$\angle DAC + \angle CAB + \angle ACD + \angle ACB + \angle B + \angle D = 360^0$

$\angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 360^0$ ($\angle DAC + \angle CAB = \angle A$ और $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$)

अर्थात चतुर्भुज के कोणों का योग 360^0 होता है।

चतुर्भुज के प्रकारों से सम्बंधित महत्वपूर्ण बिंदु-

- यदि चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर हो तो यह एक समलम्ब (Trapezium) कहलाता है।
- यदि चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समान्तर हो तो ये चतुर्भुज 'समान्तर चतुर्भुज' कहलाता है।
- यदि समान्तर चतुर्भुज में एक कोण समकोण है तो यह समान्तर चतुर्भुज 'आयत' कहलाता है। (यहाँ यह स्पष्ट करें कि एक कोण समकोण होने का अर्थ चरों कोणों के समकोण होने से हैं)।

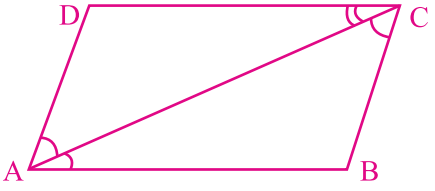
- यदि समान्तर चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हो तो वह 'समचतुर्भुज ' कहलाता है।
- यदि समान्तर चतुर्भुज का एक कोण समकोण हो और चारों भुजाएँ बराबर हों तो यह एक वर्ग कहलाता है। (यहाँ पर भी एक कोण समकोण होने का अर्थ चारों कोणों के समकोण होने से हैं)।
- वर्ग, आयत और समचतुर्भुज में से प्रत्येक एक समान्तर चतुर्भुज होता है।
- वर्ग एक आयत है और एक समान्तर चतुर्भुज भी।
- एक समान्तर चतुर्भुज एक समलम्ब है।
- एक आयत अथवा समचतुर्भुज एक वर्ग नहीं है।

उपर्युक्त बिन्दुओं पर वस्तुनिष्ट प्रश्न पूछें जा सकते हैं छात्र को स्पष्ट कर याद रखने हेतु प्रेरित करें।

क्रियाकलाप- कागज पर एक समान्तर चतुर्भुज खींचकर इसके विकर्ण के अनुदिश काटते हैं तो दो त्रिभुज हमें प्राप्त होते हैं। आइए अब इन त्रिभुजों को एक के ऊपर दुसरे को रखकर देखते हैं और पाते हैं कि दोनों त्रिभुज परस्पर सर्वांगसम हैं। अर्थात समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि 'समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है'।

उपपत्ति- माना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।



और AC उसका एक विकर्ण है जो समान्तर चतुर्भुज ABCD को दो त्रिभुजों ABC और CDA में विभाजित करता है।

हमें सिद्ध करना है कि $\Delta ABC \cong \Delta ACD$

यहाँ $BC \| AD$ और AC एक तिर्यक रेखा है।

इसलिए $\angle BCA = \angle DAC$ [एकांतर कोणों का युग्म]

पुन: $AB \| DC$ और AC एक तिर्यक रेखा है।

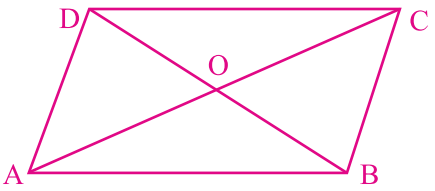
इसलिए $\angle BAC = \angle DCA$ [एकांतर कोणों का युग्म]

और $AC = AC$ [उभयनिष्ट]

अत: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ [ASA नियम]

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए की एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समद्विभाजित करे, तो वह एक समान्तर चतुर्भुज होता है।

हल: यहाँ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है और इसके विकर्ण AC और BD बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $OD = OB$ तथा $OA = OC$



तथा $\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अत: $\Delta AOB \cong \Delta COD$

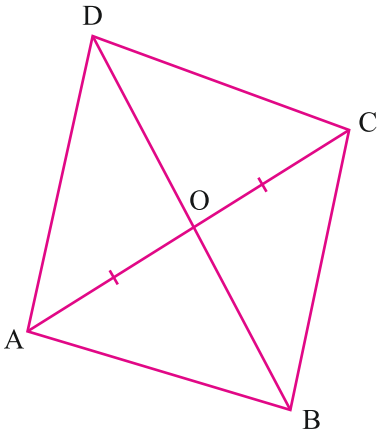
फलत : $\angle BAO = \angle DCO$ (एकांतर कोण)

इसलिए $AB \| CD$

अत: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

प्रश्न 4. दर्शाइए कि एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते हैं।

हल : समचतुर्भुज ABCD में



हम जानते हैं कि

$AB = BC = CD = DA$

अब ΔAOD और ΔCOD में

$OA = OC$ (समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समद्विभाजित करते हैं)

$OD = OD$ [उभयनिष्ट है]

$AD = CD$ (दिया है)

अत: $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (SSS सर्वांगसमता नियम)

परन्तु $\angle AOD + \angle COD = 180^0$

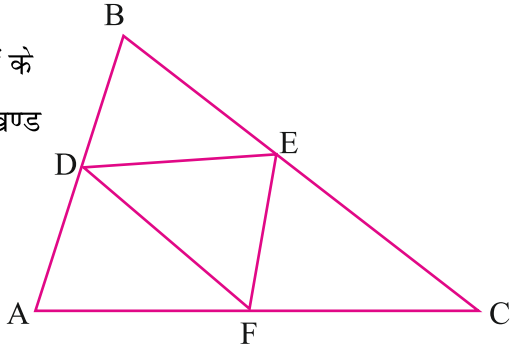
इसलिए $2\angle AOD = 180^0$

या $\angle AOD = 90^0$

अत: समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब हैं।

प्रश्न 5. ΔABC में D, E, और F क्रमश: भुजाओं AB,BC और CA के मध्य बिंदु हैं। दर्शाइए कि बिन्दुओं D, E, और F को मिलाने पर ΔABC चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित हो जाता है।

हल : चूँकि D और E क्रमश: भुजाओं AB और, BC के मध्य बिंदु हैं



इसलिए $DE \| AC$ (किसी त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर होता है)

इसी प्रकार $DF \| BC$ और $EF \| AB$ है।

इसलिए ADEF, BDFE और DFCE में से प्रत्येक एक समान्तर चतुर्भुज है।

अब, DE समान्तर चतुर्भुज ADFE का एक विकर्ण है।

इसलिए $\Delta BDE \cong \Delta FED$

$\Delta DAF \cong \Delta FED$

$\Delta EFC \cong \Delta FED$

अत: चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

अभ्यास प्रश्न :

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

1. आयत का प्रत्येक कोण होता है।

   (अ) 90^0 (ब) 100^0

   (स) 80^0 (द) 60^0

2. निम्नलिखित में से कौन एक चतुर्भुज नहीं है?

   (अ) आयत (ब) त्रिभुज

   (स) पतंग (द) वर्ग

3. किसी चतुर्भुज के सभी अन्त: कोणों का योग होता है:

   (अ) 180^0 (ब) 360^0

   (स) 540^0 (द) 270^0

4. एक समचतुर्भुज हो सकता है:

   (अ) आयत (ब) समलंब

   (स) पतंग (द) वर्ग

5. एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण होते हैं:

   (अ) बराबर (ब) असमान

   (स) निर्धारित नहीं किया जा सकता है (द) इनमे से कोई भी नहीं

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते है और ..... होते है।
2. समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर ..... पर समद्विभाजित करते है।
3. एक समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ ..... होतीं हैं।
4. यदि समान्तर चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर हो तो वह ..... कहलाता है।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए :

1. समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे तीन सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।
2. वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते है।
3. एक आयत एवं एक समचतुर्भुज, एक वर्ग होता है।
4. वर्ग एक आयत है और समचतुर्भुज भी।
5. वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर न तो समद्विभाजित करते हैं और न बराबर होते है।

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए :

1. एक चतुर्भुज जिसके सम्मुख भुजाओं का प्रत्येक युग्म बराबर हो क्या कहलाता है?
2. क्या एक आयत अथवा एक समचतुर्भुज एक वर्ग होता है?

3. एक समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे कितने सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है?

4. एक चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म बराबर हों तो ऐसा चतुर्भुज क्या कहलाता है?

प्रश्न 5. एक चतुर्भुज के कोण 3:5:9:13 के अनुपात में है तो इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 6. दर्शाइए यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हो तो वह एक आयत है।

प्रश्न 7. ABC एक त्रिभुज है जो C पर समकोण है। कर्ण AB के मध्य बिंदु M से होकर BC के समांतर एक रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि D भुजा AC का मध्य बिंदु है तथा $CM=MA=\frac{1}{2}AB$

प्रश्न 8. दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

प्रश्न 9. ABCD एक आयत है और P, Q, R उत्तर S क्रमशः AB, BC, CD और DA भुजाओं के मध्य बिंदु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज PQRS एक समचतुर्भुज है।

प्रश्न 10. दर्शाइए कि एक चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं तो वह एक समचतुर्भुज होता है।

उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक 1.

(1) (अ) 90^0 (2) (ब) त्रिभुज

(3) (ब)360^0 (4) (द) वर्ग

(5) (अ) बराबर

प्रश्न क्रमांक 2.

(1) बराबर (2) समकोण

(3) बराबर (4) समचतुर्भुज

प्रश्न क्रमांक 3.

(1) असत्य (2) सत्य

(3) असत्य (4) सत्य

(5) सत्य

प्रश्न क्रमांक 4.

(1) समान्तर चतुर्भुज (2) नहीं

(3) दो (4) समान्तर चतुर्भुज

अध्याय-5
यूक्लिड ज्योमिति का परिचय

युक्लिड की परिभाषाएँ, अभिगृहीत और अभिधारणाएँ :

युक्लिड के समय के यूनानी गणितज्ञों ने ज्योमिति को उस विश्व का एक सिद्धांतीय प्रतिमान (model) सोचा जिसमे वे रहते थे। बिंदु (point), रेखा (line), तल (plane) [या पृष्ठ (surface)], थेल्स इत्यादि की अवधारणाएँ उन वस्तुओं से स्थापित की गई जो उनके आस-पास थीं। आकाश (space)और उनके आस-पास के ठोसों के अध्ययनों के आधार पर, एक ठोस वस्तु की सिद्धांतीय ज्यामितीय अवधारणा विकसित की गयी है। एक ठोस (solid) का आकार, माप और स्थिति होती है तथा इसे एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाया जा सकता है। इसकी परिसीमाएँ पृष्ठ (surface) कहलाती हैं। पृष्ठ (surface), आकाश के एक भाग को दूसरे भाग से पृथक करती है और इनमे कोई मोटाई नहीं होती। पृष्ठों की सीमाएँ वक्र (curves) या सीधी रेखाएँ (lines) होतीं हैं। इन रेखाओं के सिरे बिंदु (points) होते हैं।

ठोसों से बिन्दुओं (ठोस-पृष्ठ-रेखाएँ-बिंदु) तक के तीन चरणों पर विचार कीजिए। प्रत्येक चरण में, हम एक विस्तार, जिसे हम एक विमा (dimension) भी कहते हैं, से वंचित होते हैं। इसलिए यह कहा जाता है की एक ठोस की तीन विमाएँ होती हैं, एक पृष्ट की दो विमाएँ, एक रेखा की एक विमा और एक बिंदु की कोई विमा नहीं होती है। युक्लिड में इन कथनों को संक्षिप्त रूप से परिभाषाओं के रूप में प्रस्तुत किया है। उन्होंने अपने इन रहस्योदघाटनों का प्रारंभ 'एलिमेंट्स' (जिसमें 13 अध्याय है और प्रत्येक भाग एक पुस्तक कहलाती है) जिसके पुस्तक 1 में 23 परिभाषाएँ (definitions) देकर किया है। इनमे से कुछ परिभाषाएँ नीचे दी जा रही हैं:

1. एक बिंदु (point) वह है जिसका कोई भाग नहीं होता।
2. एक रेखा (line) चौड़ाई रहित लम्बाई होती है।
3. एक रेखा के सिरे बिंदु होते हैं।
4. एक सीधी रेखा ऐसी रेखा है जो स्वयं पर बिन्दुओं के साथ सपाट रूप से स्थित होती है।
5. एक पृष्ट (surface) वह है है जिसकी केवल चौड़ाई और लम्बाई होती है।
6. पृष्ट के किनारे रेखाएँ (edges) होती हैं।
7. एक समतल पृष्ट (plane surface) ऐसा पृष्ट है जो स्वयं पर सीधी रेखाओं के साथ सपाट रूप से स्थित होता है।

अपनी इन परिभाषाओं से प्रारंभ करते हुए, यूक्लिड ने कुछ गुणों को बिना सिद्ध किए सत्य कथन मानने की कल्पना की। ये कल्पनाएँ वास्तव में 'स्पष्टत: सर्वव्यापी सत्य' थे।

उन्होंने इनको दो वर्गों में विभाजित किया है। ये वर्ग थे : अभिगृहीत (axioms) और अभिधारणाएँ (postulates)। उन्होंने अभिधारणा शब्द का प्रयोग उन कल्पनाओं के लिए को विशिष्ट रूप से ज्योमिति से सम्बंधित थीं। दूसरी ओर, सामान्य अवधारणाएँ [जिन्हें प्राय: अभिगृहीत कहा गया] वे कल्पनाएँ थीं जिन्हें निरंतर गणित में प्रयोग किया गया और जिनका केवल ज्योमिती से ही विशष संबंध नहीं था। अभिगृहीत और

अभिधारणाओं की ओर अधिक जानकारी के लिए परिशिष्ट 1 को देखिये प्यूक्लिड के कुछ अभिग्रिहीतों को, बिना उनके द्वारा दिए क्रम के नीचे दिया जा रहा है :

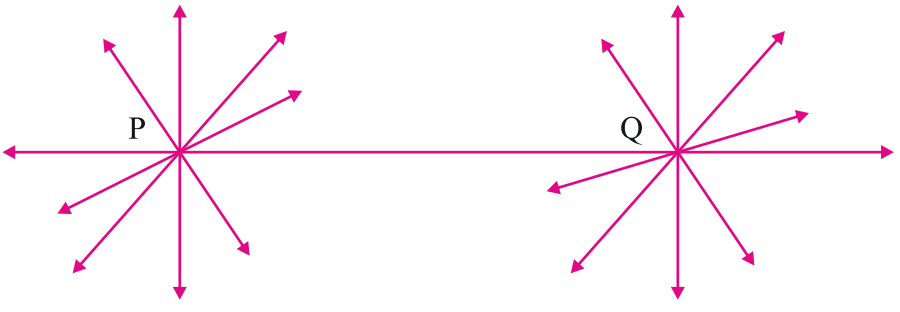
1. वे वस्तुएं जो एक ही वास्तु के बराबर हों एक दुसरे के बराबर होती हैं।
2. यदि बरबरों को बरबरों में जोड़ा जाए, तो पूर्ण भी बराबर होता है।
3. यदि बरबरों को बरबरों से घटाया जाए, तो शेषफल भी बराबर होता है।
4. वे वस्तुएं जो परस्पर सम्पती हों, एक दुसरे के बराबर होती हैं।
5. पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।
6. एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होते हैं।
7. एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होते हैं।

आइये अब यूक्लिड की पाँच अभिधारणाओं (postulates) की चर्चा करें । ये इस प्रकार हैं :

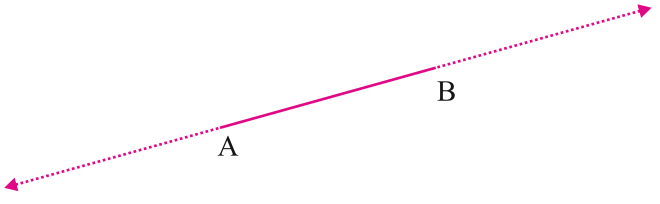
अभिधारणा 1 : एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है। ध्यान दीजिये कि यह अभिधारणा हमें बनाती है कि दो भिन्न (distinct)बिन्दुओं से होकर कम एक रेखा अवश्य खींची जा सकती है, परन्तु इससे नहीं ज्ञात होता कि ऐसी एक से अधिक सीधी रेखाएँ नहीं हो सकती। परन्तु अपने समस्त कार्यों में युक्लिड ने, बिना कुछ बताए, यह बार–बार कल्पना की है कि दो भिन्न बिन्दुओं से एक अद्वितीय (unique) रेखा ही खींची जा सकती है। हम इस परिणाम को एक अभिगृहीत के रूप में नीचे दे रहें हैं :

अभिगृहीत 1: दिए हुए दो भिन्न बिन्दुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है। बिंदु P से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं जो बिंदु Q से होकर भी जाती हों केवल एक। यह रेखा PQ है। बिंदु Q से होकर जाने वाली ऐसी कितनी रेखाएं हैं जो बिंदु P से होकर भी जाती हैं? केवल एक, अर्थात् रेखा PQ । इस प्रकार, उपरोक्त कथन एक स्वयं सिद्ध (self&evident) सत्य है और इसलिए हम इसे एक अभिगृहीत के रूप में मान लेते हैं।

(देखिये आकृति)



अभिधारणा 2: एक सांत रेखा (terminated line)को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

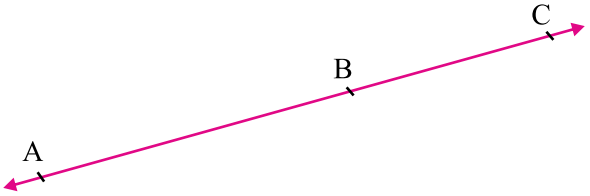


अभिधारणा 3: किसी को केंद्र मान कर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

अभिधारणा 4: सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।

अभिधारणा 5: यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिर कर अपने एक ही ओर दो अंत: कोण (interior angles)इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिलकर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बाधाए अनिश्चित रूप से बढाए जाने पर उसी ओर मिलती है जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।

उदाहरण 1: यदि A,B और C एक रेखा पर स्थित तीन बिंदु हैं और B बिन्दुओं A और C के बीच में स्थित है (देखिये आकृति 5.7), तो सिद्ध कीजिए कि AB + BC = AC है।

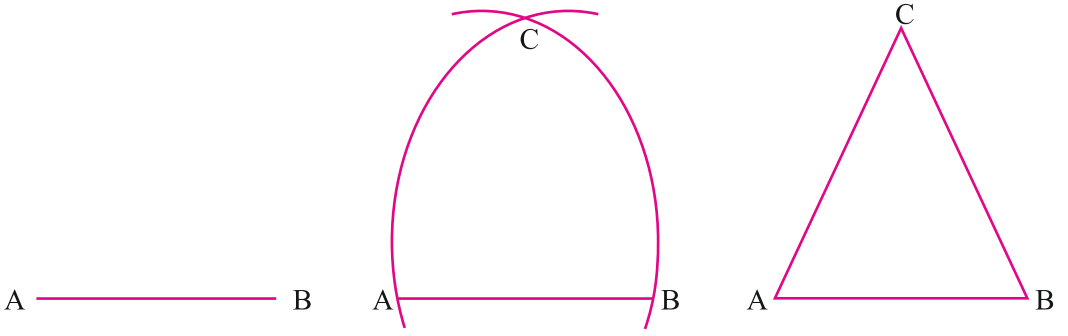


हल: उपरोक्त आकृति में, AB , BC के साथ AC सम्पाती है। साथ ही, युक्लिड का अभिगृहीत (4) कहता है कि वे वस्तुएँ जो परस्पर सम्पाती हों एक दुसरे के बराबर होती हैं। अत: यह सिद्ध किया जा सकता है कि AB + BC = AC है। ध्यान दीजिये कि इस हल में यह मान लिया गया है कि दो बिन्दुओं से होकर एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।

उदाहरण 2 : सिद्ध कीजिये कि एक दिए हुए रेखाखण्ड पर एक समबाहु त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

हल: उपरोक्त कथन में, एक दी हुयी लम्बाई का एक रेखाखण्ड AB(माना) दिया है।

यहाँ कुछ रचना करने की आवश्यकता है। यूक्लिड की अभिधारणा (3) का प्रयोग करके आप बिंदु A को केंद्र और AB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींच सकते हैं। इसी प्रकार ठको केंद्र और BA त्रिज्या लेकर एक अन्य वृत्त खींचा जा सकता है। ये दोनों वृत्त बिंदु C (माना) पर मिलते हैं। अब रेखाखण्डों AC और BC खींचकर ΔABC बनाइए। इसलिए हमें सिद्ध करना है कि यह एक समबाहु त्रिभुज है अर्थात AB = AC = BC है। अब AB = AC क्योंकि ये वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।



गणित के इतिहास में यूक्लिड की पांचवी अभिधारणा का अत्यधिक महत्त्व है द्य इस अभिधारणा के परिणाम स्वरूप यदि दो रेखाओं पर गिरने वाली रेखा के एक ही ओर के दोनों अन्त: कोण कोणों का योग 1800 हो, तो दोनों

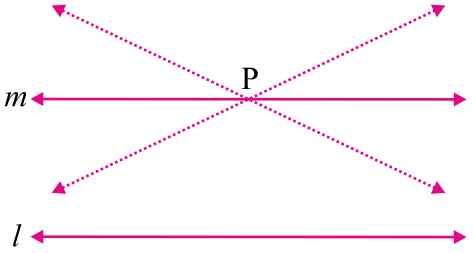
रेखाएँ कभी प्रतिच्छेद नहीं कर सकती। इस अभिधारणा के अनेक समतुल्य रूपांतरण (equivalent versions)हैं। इनमें से एक प्लेफेयर का अभिगृहीत(Playfair's Axiom)है (जिसे स्कॉटलैंड के एक गणितज्ञ जॉन प्लेफेयर ने 1729 में दिया था)। यह इस प्रकार है :

प्रत्येक रेखा l और उस पर न स्थित प्रत्येक बिंदु P के लिए, एक अद्वितीय रेखा m ऐसी होती है जो P से होकर जाती है और l के समान्तर है।

निम्न आकृति में देख सकते हैं, कि P से होकर जाने वाली सभी रेखाओं में से केवल m ही रेखा l के समान्तर है।

इस परिणाम को निम्नलिखित रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है :

दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समान्तर नहीं हो सकती।



उदाहरण 3: निम्न कथन पर विचार कीजिए :

सीधी रेखाओं के एक ऐसे युग्म का अस्तित्व है, जो एक दूसरे से प्रत्येक स्थान पर समदूरस्थ (equidistant)होती है। क्या यह कथन यूक्लिड की पांचवी अभिधारणा का प्रत्यक्ष (सीधा) परिणाम है? स्पष्ट कीजिए।

हल: एक रेखा स लीजिए और एक बिंदु ऐसा लीजिए जो रेखा स पर स्थित न हो। तब, प्लेफेयर अभिगृहीत से, जो यूक्लिड की पांचवीं अभिधारणा के समतुल्य है, हम जानते हैं कि P से होकर जाती हुई एक अद्वितीय रेखा m है जो l के समान्तर है। अब, एक बिंदु की एक रेखा से दूरी उस बिंदु से रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई होती है। m पर स्थित किसी बिंदु से रेखा की दूरी और l की दूरी और स पर स्थित किसी बिंदु से रेखा m की दूरी सदैव समान होगी। अत: ये दोनों रेखाएँ l और m प्रत्येक स्थान पर एक दुसरे से समदूरस्थ हैं।

प्रश्न 1. आप यूक्लिड की पांचवीं अभिधारणा को किस प्रकार लिखेंगे ताकि वह सरलता से समझी जा सके?

प्रश्न 2. क्या यूक्लिड की पांचवीं अभिधारणा से समांतर रेखाओं के अस्तित्व का औचित्य निर्धारित होता है? स्पष्ट कीजिए।

अभ्यास प्रश्न :

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

1. गणितज्ञ थेल्स का सबसे प्रसिद्ध शिष्य था :

   (अ) आर्यभट्ट (ब) पायथागोरस

   (स) रामानाजुन (द) आइंस्टीन

2. सिन्धु घाटी सभ्यता में प्रयुक्त ईंट की लम्बाई : चौड़ाई : ऊंचाई के लिए अनुपात था :

   (अ) 1 : 2 : 3 (ब) 3 : 2 : 1

   (स) 4 : 2 : 1 (द) 1 : 2 : 4

3. पिरामिड एक ऐसी ठोस आकृति होती है जिसका आधार निम्न में से नहीं होता है:

   (अ) त्रिभुज (ब) वर्ग

   (स) बहुभुज (द) रेखा

4. यूक्लिडने अपनी प्रसिद्ध कृति 'एलिमेंट्स' को कितने अध्यायों में विभाजित किया है :

   (अ) 10 (ब) 11

   (स) 12 (द) 13

5. यूक्लिड हैं :

   (अ) यूनानी (ब) मिस्रवासी

   (स) रोमवासी (द) भारतीय

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ती कीजिए।

1. वे वस्तुएँ जो परस्पर सम्पाती हों, एक दूसरे के ..... होती है।
2. पूर्ण अपने भाग से ..... होता है।
3. एक ..... वह है जिसकी केवल लम्बाई व चौड़ाई होती है।
4. एक रेखा के सिरे ..... होते हैं।
5. पृष्ठों की परिसीमाएँ ..... होती है।
6. एक सांत रेखा (terminated line) को ..... रूप से बढ़ाया जा सकता है।

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइए।

स्तंभ (A)	स्तंभ (B)
(i) दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के	(अ) रेखाएँ होती है।
(ii) एक सांत रेखा को	(ब) एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।
(iii) सभी समकोण	(स) उभयनिष्ट नहीं हो सकता।
(iv) दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिन्दु	(द) समान्तर नहीं हो सकती।
(v) दिए हुए दो बिन्दुओं से होकर	(इ) दिए हुए दो बिन्दुओं से बढ़ाया जा सकता है।
(vi) पृष्ठ के किनारे	(फ) एक दुसरे के बराबर होते हैं।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर कीजिए।

1. यूक्लिड की प्रथम अभिधारणा क्या है।
2. यूक्लिड की पांचवी अभिधारणा लिखिए।
3. एक ठोस की परिसीमाएं क्या कहलाती है।
4. एक रेखा के सिरे क्या होते है।
5. सिंधु घाटी की सभ्यता प्रयुक्त ईंट की लिए लंबाई : चौड़ाई : मोटाई क्या थी।

प्रश्न 5. सत्य / असत्य लिखिए।

(i) प्राचीन भारत में, सुल्बसूत्र ज्यामितीय रचनाओं के लिए महत्वपूर्ण ग्रंथ थे।

(ii) श्रीयंत्र में एक ख़ दूसरे के साथ जुड़े नौ समद्विबाहु त्रिभुज अंतर्निहित नहीं है।

(iii) एक ठोस की तीन विमाएँ होती हैं।

(iv) एक पृष्ट की एक विमा होती है।

(v) एक रेखा में दो विमाएँ होती हैं।

(vi) एक बिंदु में कोई विमा नहीं होती है।

(vii) एक बिंदु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

(viii) दो भिन्न बिन्दुओं से होकर जाने वाली असंख्य रेखाएँ हैं।

(ix) यदि दो वृत्त बराबर हैं तो उनकी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।

(x) एक सांत रेखा दोनों और अनिश्चित रूप से बढ़ाई जा सकती है।

(xi) यदि $AB = PQ$ और $PQ = XY$ है, तो $AB = XY$ होगा।

प्रश्न 6. समान्तर रेखाओं को परिभाषित कीजिए।

प्रश्न 7. लम्ब रेखाओं को परिभाषित कीजिए।

प्रश्न 8. रेखाखंड को परिभाषित कीजिए।

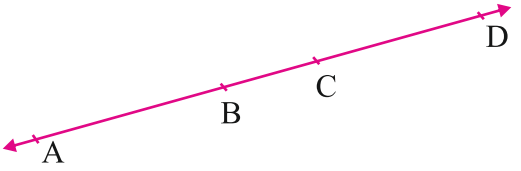
प्रश्न 9. वर्ग की त्रिज्या को परिभाषित कीजिए।

प्रश्न 10. वर्ग को परिभाषित कीजिए।

प्रश्न 11. आप यूक्लिड की पाँचवी अभिधारणा को किस प्रकार लिखेंगे ताकि वह सरलता से समझी जा सके।

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि एक रेखाखण्ड का एक और केवल एक ही मध्यबिंदु होता है।

प्रश्न 13. निम्न आकृति में, यदि $AC = BD$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $AB = CD$ है।



प्रश्न 14. यदि दो बिन्दुओं A और B के बीच एक बिंदु C ऐसा स्थित है कि $AC = BC$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $AC = \frac{1}{2}AB$ है। एक आकृति खींचकर स्पष्ट कीजिए।

नीचे दी हुई दो अभिधारणाओं पर विचार कीजिए :

प्रश्न 15. (i)दो भिन्न बिंदु A और B दिए रहने पर, एक तीसरे बिंदु C ऐसा विद्यमान है जो A और B के बीच स्थित होता है।

(ii) यहाँ कम से कम ऐसे तीन बिंदु विद्यमान हैं कि वे एक रेखा पर स्थित नहीं हैं।

क्या इन अभिधारणाओं में कोई अपरिभाषित शब्द है ? क्या ये अभिधारणाएँ अविरोधी हैं? क्या ये यूक्लिड की अभिधारणाओं से प्राप्त होतीं हैं। स्पष्ट कीजिए।

सारांश:

1. यद्यपि यूक्लिड ने बिंदु, रेखा और तल को परिभाषित किया है परन्तु गणितज्ञों ने इन परिभाषाओं को पूरी तरह से स्वीकार नहीं किया है द्य इसलिए ज्यामिति में इन्हें अब अपरिभाषित पदों के रूप में लिया जाता है।
2. अभिगृहीत और अभिधारणाएँ ऐसी कल्पनाएँ हैं जो स्पष्टत: सर्वव्यापी सत्य होती हैं। इन्हें सिद्ध नहीं किया जाता है।
3. प्रमेय वे कथन हैं जिन्हें परिभाषाओं, अभिगृहीतों, पहले सिद्ध किए गए कथनों और निगमनिक तर्कण द्वारा सिद्ध किया जाता है।
4. यूक्लिडके कुछ अभिगृहीत थे :
   (1) वे वस्तुएँ जो एक ही वस्तु के बराबर हों, एक दूसरे के बराबर होंतीं हैं।
   (2) यदि बराबरों को बराबरों में जोड़ा जाय, तो पूर्ण भी बराबर होतें हैं।
   (3) यदि बराबरों को बराबरों में से घटाया जाय, तो शेषफल भी बराबर होतें हैं।
   (4) वे वस्तुएँ जो परस्पर सम्पाती हों एक दूसरे के बराबर होंतीं हैं।
   (5) पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता हैं।
   (6) एक ही वस्तुओं के दुगुने परस्पर बराबर होतें हैं।
   (7) एक ही वस्तुओं के आधे परस्पर बराबर होतें हैं।

यूक्लिड की अभिधारणाएँ निम्न थीं :

अभिधारणा 1: एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है।

अभिधारणा 2: एक सांत रेखा (terminated line) को अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।

अभिधारणा 3: किसी को केंद्र मान कर और किसी त्रिज्या से एक वृत्त खींचा जा सकता है।

अभिधारणा 4: सभी समकोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।

अभिधारणा 5: यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिर कर अपने एक ही ओर दो अंत: कोण (interior angles) इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिल कर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बाधाए अनिश्चित रूप से बढाए जाने पर उसी ओर मिलती है जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।

यूक्लिड की पाँचवी अभिधारणा के दो समतुल्य रूपांतरण हैं :

(i) प्रत्येक रेखा *l* और उस पर न स्थित प्रत्येक बिंदु P के लिए, एक अद्वितीय रेखा m ऐसी होती है जो P से होकर जाती है और *l* के समांतर है।

(ii) दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के समांतर नहीं हो सकती।

यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा को पहली चारों अभिधारणाओं की सहायता से सिद्ध करने के सभी प्रयत्न असफल रहे। परन्तु इनसे अन्य ज्यामितियों की खोज हुई जिन्हें अयूक्लिडीय ज्यामितियाँ कहा जाता है।

उत्तरमाला

प्रश्न क्रमांक 1.

(1) (ब) पायथागोरस (2) (स) 4:2:1

(3) (द) रेखा (4) (द) 13

(5) (ब)मिस्रवासी

प्रश्न क्रमांक 2.

(1) बराबर (2) बड़ा

(3) पृष्ठ (4) बिंदु

(5) रेखा (6) अनिश्चित

प्रश्न क्रमांक 3.

स्तंभ (A)	स्तंभ (B)
(i) दो भिन्न प्रतिच्छेदी रेखाएँ एक ही रेखा के	(द) समान्तर नहीं हो सकती।
(ii) एक सांत रेखा को	(इ) दिए हुए दो बिन्दुओं से बढ़ाया जा सकता है।
(iii) सभी समकोण	(फ) एक दूसरे के बराबर होते हैं।
(iv) दो भिन्न रेखाओं में एक से अधिक बिन्दु	(स) उभयनिष्ट नहीं हो सकता।
(v) दिए हुए दो बिन्दुओं से होकर	(ब) एक अद्वितीय रेखा खींची जा सकती है।
(vi) पृष्ठ के किनारे	(अ) रेखाएँ होती है।

प्रश्न क्रमांक 4.

(1) एक बिंदु से एक अन्य बिंदु तक एक सीधी रेखा खींची जा सकती है ?

(2) यदि एक सीधी रेखा दो सीधी रेखाओं पर गिर कर अपने एक ही ओर दो अंत: कोण (interior angles) इस प्रकार बनाए कि इन दोनों कोणों का योग मिल कर दो समकोणों से कम हो, तो वे दोनों सीधी रेखाएँ अनिश्चित रूप से बाधाए अनिश्चित रूप से बढाए जाने पर उसी ओर मिलती है जिस ओर यह योग दो समकोणों से कम होता है।

(3) रेखा (4) बिंदु (5) 4 : 2 : 1

प्रश्न क्रमांक 5.

(1)सत्य (2)असत्य (3)सत्य (4)असत्य (5)असत्य (6)सत्य

(7)असत्य (8)असत्य (9)सत्य (10)सत्य (11)सत्य

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्त्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्त्तव्य– भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्त्तव्य होगा कि वह–

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे;

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखें और उनका पालन करे;

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करें और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे;

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे;

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हो;

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे;

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अन्तर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे;

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे;

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे;

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊँचाइयों को छू सके ; और

(ट) यदि माता–पिता या संरक्षक है, छह वर्ष से चौदह वर्ष तक की आयु वाले अपने यथास्थिति बालक या प्रतिपाल्य को शिक्षा के अवसर प्रदान करे।