

NCERT SOLUTIONS

CLASS - 10th



aglasem.com

Class : 10th

Subject : Mathematics

Chapter : 8

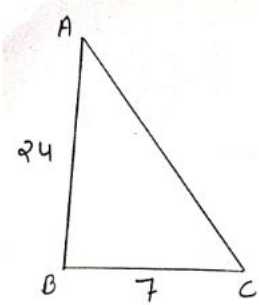
Chapter Name : त्रिकोणमिति का परिचय

Exercise 8.1

Q1 $\triangle ABC$ में, जिसका कोण B समकोण है, $AB=24\text{cm}$ और $BC=7\text{cm}$ है निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

- (i) $\sin A, \cos A$
- (ii) $\sin C, \cos C$

Answer. (i)

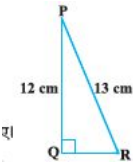


$\sin A, \cos A$
 $\triangle ABC$ में, पाइथगोरस प्रमेय से
 $AC^2 = AB^2 + BC^2$
 $= 24^2 + 7^2$
 $= 576 + 49$
 $= 625$
 $AC = \sqrt{625} = 25$
 $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$
 $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$

(ii) $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$
 $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$

Page : 200 , Block Name : परश्नावली – 8.1

Q2 आकृति में, $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए।



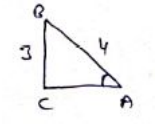
Answer.
 $\triangle PQR$ पाइथगोरस प्रमेय से
 $PQ^2 + QR^2 = PR^2$
 $(12)^2 + (QR)^2 = (13)^2$
 $QR^2 = 169 - 144$
 $QR = \sqrt{25}$
 $QR=5$
 $\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$

$$\cot R = \frac{QR}{PR} = \frac{5}{12}$$
$$\tan P - \cot R = \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$$

Page : 200 , Block Name : प्रश्नावली – 8.1

Q3 यदि $\sin A = \frac{3}{4}$, तो $\tan A$ का मान ज्ञात कीजिए।

Answer.



$$\sin A = \frac{3}{4} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{3}{4}$$

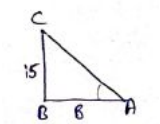
$\triangle BCA$ में, पाइथगोरस प्रमेय से

$$BC^2 + CA^2 = AB^2$$
$$(3)^2 + CA^2 = (4)^2$$
$$CA^2 = 16 - 9$$
$$CA = \sqrt{7}$$
$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

Page : 200 , Block Name : प्रश्नावली – 8.1

Q4 यदि $15 \cot A = 8$ हो तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

Answer.



$$15 \cot A = 8$$
$$\cot A = \frac{8}{15} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{AB}{BC}$$

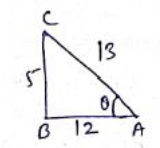
$\triangle ABC$, में $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$= (8)^2 + (15)^2$$
$$= 64 + 225$$
$$AC = \sqrt{289} = 17$$
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{17}$$
$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{17}{8}$$

Page : 200 , Block Name : प्रश्नावली – 8.1

Q5 यदि $\sec \theta = \frac{13}{12}$, हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितिय अनुपात परिकलित कीजिए।

Answer.



$$\sec \theta = \frac{13}{12} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$$

$\triangle ABC$ में, पाइथगोरस प्रमेय से

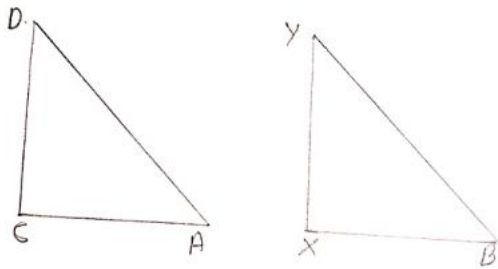
$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$(12)^2 + BC^2 = (13)^2$
 $BC^2 = 169 - 144$
 $BC = \sqrt{25}$
 $BC = 5$
 $\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$
 $\cos \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}$
 $\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$
 $\cot \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{5}$
 $\csc \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{5}$

Page : 200 , Block Name : परश्नावली – 8.1

Q6 यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यून कोण हो, जहां $\cos A = \cos B$, तो दिखाइए कि $\angle A = \angle B$

Answer.

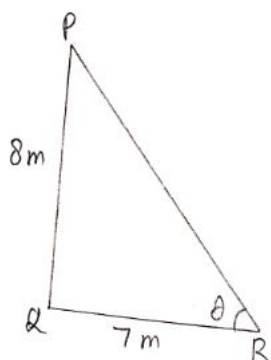


$\cos A = \cos B$
 $\frac{AC}{AD} = \frac{BX}{BY}$
 $\frac{AD}{AC} = \frac{BY}{BX}$
 $\frac{AC}{BX} = \frac{AD}{BY}$
माना $\frac{AC}{BX} = \frac{AD}{BY} = k \rightarrow (1)$
 $\triangle ACD$ और $\triangle BXY$ में,
 $\frac{CD}{XY} = \frac{\sqrt{AD^2 - AC^2}}{\sqrt{BY^2 - BX^2}} = \frac{\sqrt{(k(BY))^2 - (kBX)^2}}{\sqrt{BY^2 - BX^2}} = \frac{k\sqrt{BY^2 - BX^2}}{\sqrt{BY^2 - BX^2}} = k \rightarrow (2)$
समीकरण (1) व (2) से,
 $\frac{AC}{BX} = \frac{AD}{BX} = \frac{CD}{XY}$
 $\therefore \triangle ACD \sim \triangle BXY$ [SSS समरूपता से]
अतः $\angle A = \angle B$

Page : 200 , Block Name : परश्नावली – 8.1

Q7 यदि $\cot \theta = \frac{7}{8}$, तो
(i) $\frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$,
(ii) $\cot^2 \theta$ का मान निकालिए?

Answer.



$\cot \theta = \frac{7}{8} = \frac{7m}{8m}$, यहाँ m कोई वास्तविक संख्या है
 $\triangle PQR$ में, पाइथगोरस प्रमेय से
 $PQ^2 + QR^2 = PR^2$
 $PR^2 = (8m)^2 + (7m)^2$
 $PR^2 = 64m^2 + 49m^2$
 $PR^2 = 113m^2$
 $PR = \sqrt{113m^2} = \sqrt{113}m$

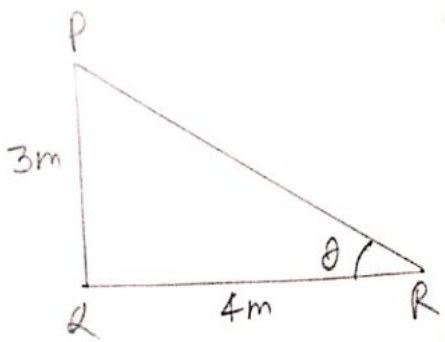
(i)
$$\frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} = \frac{\left(1 + \frac{8}{\sqrt{113}}\right)\left(1 - \frac{8}{\sqrt{113}}\right)}{\left(1 + \frac{7}{\sqrt{113}}\right)\left(1 - \frac{7}{\sqrt{113}}\right)}$$
$$= \frac{1 - \left(\frac{8}{\sqrt{113}}\right)^2}{1 - \left(\frac{7}{\sqrt{113}}\right)^2}$$
$$= \frac{1 - \frac{64}{113}}{1 - \frac{49}{113}}$$
$$= \frac{\frac{113 - 64}{113}}{\frac{113 - 49}{113}}$$
$$= \frac{49}{64}$$

(ii) $\cot^2 \theta = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$

Page : 200 , Block Name : परश्नावली – 8.1

Q8 यदि $3 \cot A = 4$, तो जाँच कीजिए कि $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

Answer.



$3 \cot A = 4$

$$\cot A = \frac{4}{3} = \frac{4m}{3m}, \text{ जहाँ } m \text{ कोई वास्तविक संख्या है}$$

$\triangle PQR$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$PR^2 = QR^2 + PQ^2$$

$$= (4m)^2 + (3m)^2$$

$$= 25m^2$$

$$PR = \sqrt{25m^2} = 5m$$

$$\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25}$$

$$\cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\text{अतः } \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$$

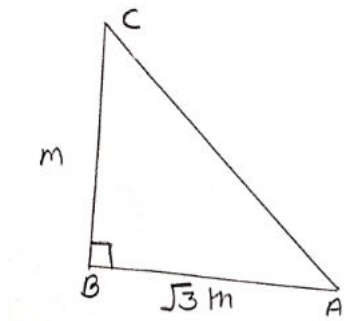
Page : 200 , Block Name : परश्नावली – 8.1

Q9 त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

Answer.



$$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan A = \frac{m}{\sqrt{3}m}$$

जहाँ m कोई वास्तविक संख्या है

$\triangle ABC$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (\sqrt{3}m)^2 + m^2$$

$$= 3m^2 + m^2$$

$$= 4m^2$$

$$AC = \sqrt{4m^2} = 2m$$

Page : 200 , Block Name : परश्नावली – 8.1

Q10 $\triangle PQR$ में, जिसका कोण Q समकोण है, $PR + QR = 25\text{cm}$ और $PQ = 5\text{cm}$ है $\sin P$, $\cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए।

Answer. QR = a

$$PR = 25 - a$$

PQR में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PR^2 = PQ^2 + OQ^2$$

$$(25 - a)^2 = 5^2 + a^2$$

$$625 + a^2 - 50a = 25 + a^2$$

$$625 - 50a = 25$$

$$a = 12$$

$$PR = 25 - 12 = 13$$

$$\sin P = \frac{12}{13}$$

$$\cos P = \frac{5}{13}$$

$$\tan P = \frac{12}{5}$$

Page : 200 , Block Name : परश्नावली – 8.1

Q11 बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य । कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

- (i) $\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है ।
- (ii) कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$
- (iii) $\cos A$, कोण A के cosecant के लिए पर्युक्त एक संक्षिप्त रूप है ।
- (iv) $\cot A$, $\cot$ और A का गुणनफल होता है ।
- (v) किसी भी कोण θ के लिए $\sin \theta = \frac{4}{3}$

Answer. (i) असत्य, क्योंकि $\tan \theta =$ कोण A के विपरीत भुजा / कोण A की सम्मुख भुजा
यदि विपरीत भुजा > सम्मुख भुजा, तब $\tan A > 1$
(ii) सत्य, क्योंकि $\sec A =$ कर्ण / कोण A की सम्मुख भुजा
और कर्ण हमेशा अन्य भुजाओं से बड़ा होता है
(iii) असत्य, क्योंकि $\cos A$ कोण A के cosine के लिए पर्युक्त एक संक्षिप्त रूप है
(iv) असत्य, क्योंकि $\cot A$ कोण A का cotangent होता है
(v) असत्य, क्योंकि $\sin \theta =$ कोण A की सम्मुख भुजा / कर्ण
सम्मुख भुजा से कर्ण सदैव बड़ा होता है

Page : 200 , Block Name : परश्नावली – 8.1

Exercise 8.2

Q1 निम्नलिखित के मान निकालिए:

- (i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$
- (ii) $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$
- (iii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$
- (iv) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$
- (v) $\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

Answer. (i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$
 $= \frac{4}{4}$
 $= 1$

(ii) $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$
 $= 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
 $= 2$

(iii) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$
 $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \div 2 + 2\sqrt{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$
 $= \frac{\sqrt{3}(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6})}{(2\sqrt{2} + 2\sqrt{6})(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6})}$
 $= \frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{18}}{(2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{6})^2}$

$$= \frac{2\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}{8 - 24} = \frac{-2(3\sqrt{2} - \sqrt{6})}{-16}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$$

$$(iv) \frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - 4}{3\sqrt{3} + 4}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3} - 4)(3\sqrt{3} - 4)}{(3\sqrt{3} + 4)(3\sqrt{3} - 4)}$$

$$= \frac{27 - 12\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 16}{27 - 16}$$

$$= \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$$

$$(v) \frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$$

$$= \frac{5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{5}{4} + \frac{16}{3} - 1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{15 + 64 - 12}{12}}{\frac{4}{4}}$$

$$= \frac{67}{12}$$

Page : 206 , Block Name : परश्नावली – 8.2

Q2 सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए:

$$(i) \frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} =$$

(A) $\sin 60^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

$$(ii) \frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} =$$

(A) $\tan 90^\circ$ (B) 1 (C) $\sin 45^\circ$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2 \sin A$ तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है:

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

$$(iv) \frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} \text{ बराबर है:}$$

(A) $\cos 60^\circ$ (B) $\sin 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

$$\text{Answer. (i) } \frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{6}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

विकल्प (A) क्योंकि $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} = \frac{1 - (1)^2}{1 + (1)^2} = 0$

विकल्प (D)

(iii) $\sin 2A = 2 \sin A$
हमें ज्ञात है कि $\sin 0 = 0$
अतः $A = 0$, विकल्प (A)

(iv) $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} \\ &= \sqrt{3}, \text{ विकल्प (C)} \end{aligned}$$

Page : 207 , Block Name : परश्नावली – 8.2

Q3 यदि $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}, 0^\circ < A + B < 90^\circ, A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

Answer. $\tan(A + B) = \sqrt{3}$
 $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\tan(A + B) = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$
 $A + B = 60 \longrightarrow (1)$
 $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$
 $A - B = 30 \longrightarrow (2)$
समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर
 $2A = 90^\circ$
 $A = 45^\circ$
तथा $45^\circ + B = 60^\circ$
 $B = 15^\circ$
अतः $A = 45^\circ$ और $B = 15^\circ$

Page : 207 , Block Name : परश्नावली – 8.2

Q4 बताइए कि निम्नलिखित में कौन-कौन सत्य है या असत्य है कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

- (i) $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$
- (ii) θ में वृद्धि होने के साथ $\sin \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।
- (iii) θ में वृद्धि होने के साथ $\cos \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।
- (iv) θ के सभी मानों पर $\sin \theta = \cos \theta$
- (v) $A = 0^\circ$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

Answer. (i) असत्य
माना $A = 30^\circ$ और $B = 60^\circ$

$\sin(A + B) = \sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$
 $\sin A + \sin B = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$
अतः $\sin(A + B) \neq \sin A + \sin B$

(ii) सत्य, क्योंकि $\sin 0^\circ = 0, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 θ में वृद्धि होने पर $\sin \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iii) असत्य, क्योंकि $\cos 0^\circ = 1, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 θ में वृद्धि होने पर $\cos \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।

(iv) असत्य, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ और $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ होता है
(v) $\tan 0^\circ = 0$, और $\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0}$, परिभाषित नहीं है
अतः कथन सत्य है।

Page : 207 , Block Name : परश्नावली – 8.2

Exercise 8.3

Q1 निम्नलिखित का मान निकालिए:

(i) $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$ (ii) $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$
(iii) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$ (iv) $\csc 31^\circ - \sec 59^\circ$

Answer. (i) $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$
 $= \frac{\cos(90^\circ - 18^\circ)}{\cos 72^\circ} = \frac{\cos 72^\circ}{\cos 72^\circ} = 1$

(ii) $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$
 $= \frac{\cot(90^\circ - 26^\circ)}{\cot 64^\circ} = \frac{\cot 64^\circ}{\cot 64^\circ} = 1$

(iii) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$
 $= \cos 48^\circ - \cos(90^\circ - 42^\circ)$
 $= \cos 48^\circ - \cos 48^\circ$
 $= 0$

(iv) $\csc 31^\circ - \sec 59^\circ$
 $= \csc 31^\circ - \csc(90^\circ - 59^\circ)$
 $= \csc 31^\circ - \csc 31^\circ$
 $= 0$

Page : 209 , Block Name : परश्नावली – 8.3

Q2 दिखाइए कि

(i) $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$
(ii) $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$

Answer. (i) $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$
L.H.S $= \tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ$
 $= \tan 48^\circ \tan 23^\circ \cot(90^\circ - 42^\circ) \cot(90^\circ - 67^\circ)$
 $= \tan 48^\circ \tan 23^\circ \cot 48^\circ \cot 23^\circ$
 $= \tan 48^\circ \tan 23^\circ \frac{1}{\tan 48^\circ} \frac{1}{\tan 23^\circ}$
 $= 1$
 $= \text{R.H.S}$

(ii) $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$
L.H.S $= \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ$
 $= \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \cos(90^\circ - 38^\circ) \cos(90^\circ - 52^\circ)$
 $= \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \cos 52^\circ \cos 38^\circ$

$$=0$$

$$=R.H.S$$

Page : 209 , Block Name : परश्नावली – 8.3

Q3 यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, जहाँ $2A$ एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{Answer. } \tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$$

$$\cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$$

$$90^\circ - 2A = A - 18^\circ$$

$$3A = 108^\circ$$

$$A = 36^\circ$$

Page : 209 , Block Name : परश्नावली – 8.3

Q4 यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^\circ$

$$\text{Answer. } \tan A = \cot B$$

$$\cot(90^\circ - A) = \cot B$$

$$90^\circ - A = A - 18$$

$$A + B = 90^\circ$$

Page : 209 , Block Name : परश्नावली – 8.3

Q5 यदि $\sec 4A = \csc(A - 20^\circ)$, जहाँ $4A$ का न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{Answer. } \sec 4A = \csc(A - 20^\circ)$$

$$\csc(90^\circ - 4A) = \cos(A - 20^\circ)$$

$$90^\circ - 4A = A - 20^\circ$$

$$5A = 110^\circ$$

$$A = 22^\circ$$

Page : 209 , Block Name : परश्नावली – 8.3

Q6 यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अंतः कोण हो, तो दिखाइए कि $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$

$$\text{Answer. } \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$$

$$L.H.S = \sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$A+B+C=180^\circ$$

$$= \sin\left(\frac{180^\circ - A}{2}\right)$$

$$= \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos \frac{A}{2} = R.H.S$$

Page : 209 , Block Name : परश्नावली – 8.3

Q7 $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ को 0° और 45° के बीच का कोणों का त्रिकोणमितिय अनुपातो के पदों में व्यक्त कीजिए।

$$\text{Answer. } \sin A = \cos(90-A)$$

$$\cos A = \sin(90-A)$$

परश्नानुसार,

$$\sin 67^\circ + \cos 75^\circ = \cos(90 - 67)^\circ + \sin(90 - 75)^\circ$$

$$= \cos 23^\circ + \sin 15^\circ$$

Page : 209 , Block Name : परश्नावली – 8.3

Exercise 8.4

Q1 त्रिकोणमितिय अनुपातो $\sin A$, $\cos A$ और $\tan A$ को $\cot A$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

- (i) $\sin A$
 (ii) $\cos A$
 (iii) $\tan A$
 Answer.

$$\begin{aligned} \text{(i) } \sin A &= \sqrt{\sin^2 A} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 A}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \cos A &= \sqrt{\cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \cot^2 A}} \\ &= \frac{\cot A}{\sqrt{1 + \cot^2 A}} \end{aligned}$$

$$\text{(iii) } \tan A = \frac{1}{\cot A}$$

Page : 209 , Block Name : परश्नावली - 8.4

Q2 $\angle$ के अन्य सभी त्रिकोणमितिय अनुपातो को $\sec A$ के पदों में लिखिए।

Answer.

$\angle$ के अन्य सभी त्रिकोणमितिय अनुपात = $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{cosec} A$, $\tan A$, $\cot A$.

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{\sin^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 A}} \\ &= \sqrt{\frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A}} \end{aligned}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}$$

$$\begin{aligned} \tan A &= \sqrt{\tan^2 A} \\ &= \sqrt{\sec^2 A - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} A &= \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A} \\ &= \sqrt{1 + \cot^2 A} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 A}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{\sec^2 A} - 1} \\ &= \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot A &= \sqrt{\cot^2 A} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\tan^2 A}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}} \end{aligned}$$

Q3 मान निकालिए:

- (i) $\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$
 (ii) $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$

$$\begin{aligned} \text{Answer. (i) } &\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ} \\ &= \frac{\sin^2 63^\circ + \cos^2(90^\circ - 27^\circ)}{\cos^2 17^\circ + \sin^2(90^\circ - 73^\circ)} \\ &= \frac{\sin^2 63^\circ + \cos^2 63^\circ}{\cos^2 17^\circ + \sin^2 17^\circ} (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \end{aligned}$$

(ii) $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$
 $= \sin 25^\circ + \sin(90^\circ - 65^\circ) + \cos 25^\circ + \cos(90^\circ - 65^\circ)$
 $= \sin 25^\circ + \sin 25^\circ + \cos 25^\circ + \cos 25^\circ$
 $= \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ$
 $= 1$

Page : 213 , Block Name : परश्नावली – 8.4

Q4 सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए:

- (i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$
(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0
- (ii) $(1 + \tan \theta + \sec \theta) (1 + \cot \theta - \csc \theta)$ बराबर है:
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1
- (iii) $\sec A + \tan A (1 - \sin A)$ बराबर है:
(A) $\sec A$ (B) $\sin A$ (C) $\csc A$ (D) $\cos A$
- (iv) $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ बराबर है:
(A) $\sec^2 A$ (B) -1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

Answer. (i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$
 $= 9 (\sec^2 A - \tan^2 A)$
 $= 9 \times 1 [\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1]$
 $= 9$

अतः विकल्प (B) सही है

(ii) $(1 + \tan \theta + \sec \theta) (1 + \cot \theta - \csc \theta)$
 $= 1 + \cot \theta - \csc \theta + \tan \theta + \tan \theta \cot \theta - \tan \theta \csc \theta + \sec \theta + \sec \theta \cot \theta - \sec \theta \csc \theta$
 $= 2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta \sin \theta}$
 $= 2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$
 $= 2 + \frac{1 - 1}{\sin \theta \cos \theta}$
 $= 2 + 0$
 $= 2$

अतः विकल्प (C) सही है

(iii) $\sec A + \tan A (1 - \sin A)$
 $= \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \right) (1 - \sin A)$
 $= \left(\frac{1 + \sin A}{\cos A} \right) (1 - \sin A)$
 $= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos A}$
 $= \frac{\cos^2 A}{\cos A}$
 $= \cos A$

अतः विकल्प (D) सही है

(iv) $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$
 $= \frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}$
 $= \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 A}}$
 $= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A}$
 $= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$
 $= \tan^2 A$

अतः विकल्प (D) सही है

Page : 213 , Block Name : परश्नावली – 8.4

Q5 निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिसके लिए व्यंजन परिभाषित है, न्यून कोण है:

(i) $(\csc \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A \\
 \text{(iii)} \quad & \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \csc \theta \\
 \text{(iv)} \quad & \frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A} \\
 \text{(v)} \quad & \sec^2 A = 1 + \cot^2 A \\
 \text{(vi)} \quad & \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A \\
 \text{(vii)} \quad & \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta \\
 \text{(viii)} \quad & (\sin A + \csc A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A \\
 \text{(ix)} \quad & (\csc A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A} \\
 \text{(x)} \quad &
 \end{aligned}$$

$$\text{Answer. (i) } (\csc \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S } & (\csc \theta - \cot \theta)^2 \\
 & = \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \\
 & = \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \\
 & = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \\
 & = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} \\
 & = \frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \\
 & = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \\
 & = \text{R.H.S}
 \end{aligned}$$

$$\text{(ii) } \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S } & \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} \\
 & = \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2 \sin A}{\cos A (1 + \sin A)} \\
 & = \frac{\cos^2 A \sin^2 A + 1 + 2 \sin A}{\cos A (1 + \sin A)} \\
 & = \frac{1 + 1 + 2 \sin A}{\cos A (1 + \sin A)} \\
 & = \frac{2 + 2 \sin A}{\cos A (1 + \sin A)} \\
 & = \frac{2(1 + \sin A)}{\cos A (1 + \sin A)} \\
 & = 2 \sec A \\
 & = \text{R.H.S}
 \end{aligned}$$

$$\text{(iii) } \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \csc \theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S } & \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} \\
 & = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} + \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\
 & = \frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}}{1 - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} + \frac{\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\
 & = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta (\cos \theta - \sin \theta)} \\
 & = \frac{1}{(\sin \theta - \cos \theta)} + \left[\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right] \\
 & = \frac{1}{(\sin \theta - \cos \theta)} \left[\frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right] \\
 & = \frac{(\sin \theta - \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \left[\frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right] = \frac{1 + \cos \theta \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \sec \theta \csc \theta + 1 \frac{1}{\sin \theta = \csc \theta} \text{ और } \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$$

$$(iv) \frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 A}{1 - \cos A} [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= \frac{(1 - \cos A)(1 + \cos A)}{(1 - \cos A)}$$

$$= 1 + \cos A$$

$$= 1 + \frac{1}{\sec A} \left[\because \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \right]$$

$$= \frac{1 + \sec A}{\sec A}$$

$$= \text{L.H.S}$$

$$(v) \sec^2 A = 1 + \cot^2 A$$

Answer.

$$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \sec A + \cot A$$

$$\text{L.H.S} = \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1}$$

$$= \frac{\cot A - 1 + \sec A}{\cot A + 1 - \sec A} = \left(\frac{\cot A + \sec A - (\sec^2 A - \cot^2 A)}{\cot A + 1 - \sec A} \right) = \left(\frac{\cot A + \sec A - (\sec A - \cot A)(\sec A + \cot A)}{\cot A + 1 - \sec A} \right) = \left(\frac{1}{1} \right)$$

= R.H.S

$$(vi) \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$$

$$\text{L.H.S} = \sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sqrt{\frac{(1 + \sin A)(1 + \sin A)}{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}}$$

$$= \frac{1 + \sin A}{\sqrt{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{\cos A}{1 + \sin A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A + \tan A$$

= R.H.S

$$(vii) \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$$

$$\text{L.H.S} = \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)}$$

$$= \tan \theta \cdot \frac{(1 - 2 \sin^2 \theta)}{(2 (1 - \sin^2 \theta) - 1)} [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= \tan \theta \cdot \frac{(1 - 2 \sin^2 \theta)}{(2 - 2 \sin^2 \theta - 1)}$$

$$= \tan \theta \frac{(1 - 2 \sin^2 \theta)}{(1 - 2 \sin^2 \theta)}$$

$$= \tan \theta$$

= R.H.S

$$(viii) (\sin A + \csc A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$\text{L.H.S} = (\sin A + \csc A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$$

$$= \sin^2 A + \csc^2 A + 2 \sin A \csc A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2 \cos A \sec A$$

$$\begin{aligned}
&= \sin^2 A + \cos^2 A + \csc^2 A + 2 + \sec^2 A + 2 \\
&= 1 + 2 + 2 + 1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A \\
&= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A \\
&= \text{R.H.S}
\end{aligned}$$

$$(ix) (\csc A - \sin A) (\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

$$\text{L.H.S} = (\csc A - \sin A) (\sec A - \cos A)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A \right) \left(\frac{1}{\cos A} - \cos A \right)$$

$$= \left(\frac{1 - \sin^2 A}{\sin A} \right) \left(\frac{1 - \cos^2 A}{\cos A} \right)$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin A} \times \frac{\sin^2 A}{\cos A}$$

$$= \sin A \cos A$$

$$\text{R.H.S} = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}}$$

$$= \sin A \cdot \cos A$$

$$\rightarrow \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$$(x) \left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} \right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$$

$$\rightarrow \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{1}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \tan^2 A$$

$$\left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \left(\frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A}}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}} \right)^2$$

$$= \left[\frac{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}} \right]^2$$

$$= \left[\frac{-\sin A (\sin A - \cos A)}{\cos A (\sin A - \cos A)} \right]^2$$

$$= [-\tan A]^2$$

$$= \tan^2 A$$

$$\text{अतः} \left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} \right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$$