कुल पृष्ठ संख्या 24 (कवर पेज सहित) क्रम संख्या....

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान, अजमेर

उच्च माध्यमिक परीक्षा

(परीक्षार्थी द्वारा स्वयं भरा जाना चाहिये)

Candidate's Roll No. In English

(In Figures) [| | | | | | |]

(In Words)

परीक्षार्थी का नामांक हिन्दी म

शब्दों में

नोट :– परीक्षार्थी उपरोक्त के अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका के अन्य किसी भी भाग में अपना नामांक नहीं लिखें।

माध्यम – हिन्दी [✓] अंग्रेजी [ ]

विषय गणित

परीक्षा का दिन गुरुवार

दिनांक 18-06-20

नोट :– परीक्षार्थी के लिए आवश्यक निर्देश इस पृष्ठ के पिछले भाग पर उल्लेखित हैं। जिन्हें सावधानी पूर्वक पढ़ लें व पालना अवश्य करें।

परीक्षक हेतु निर्देश :– (1) परीक्षक को उपरोक्त सारणी अनुसार प्राप्तांक भरना अनिवार्य हैं, अन्यथा नियमानुसार दंडित किया जायेगा।

(2) परीक्षक उत्तर पुस्तिका के अन्दर के पृष्ठों के बायीं ओर निर्धारित कॉलम में लाल इंक से अंक प्रदत्त करें।

(3) कुल योग भिन्न में प्राप्त होने पर उसे पूर्णांक में ही परिवर्तित कर अंकित करें (उदारणार्थ : 15 ¼ को 16, 17 ½ को 18, 19 ¾ को 20)

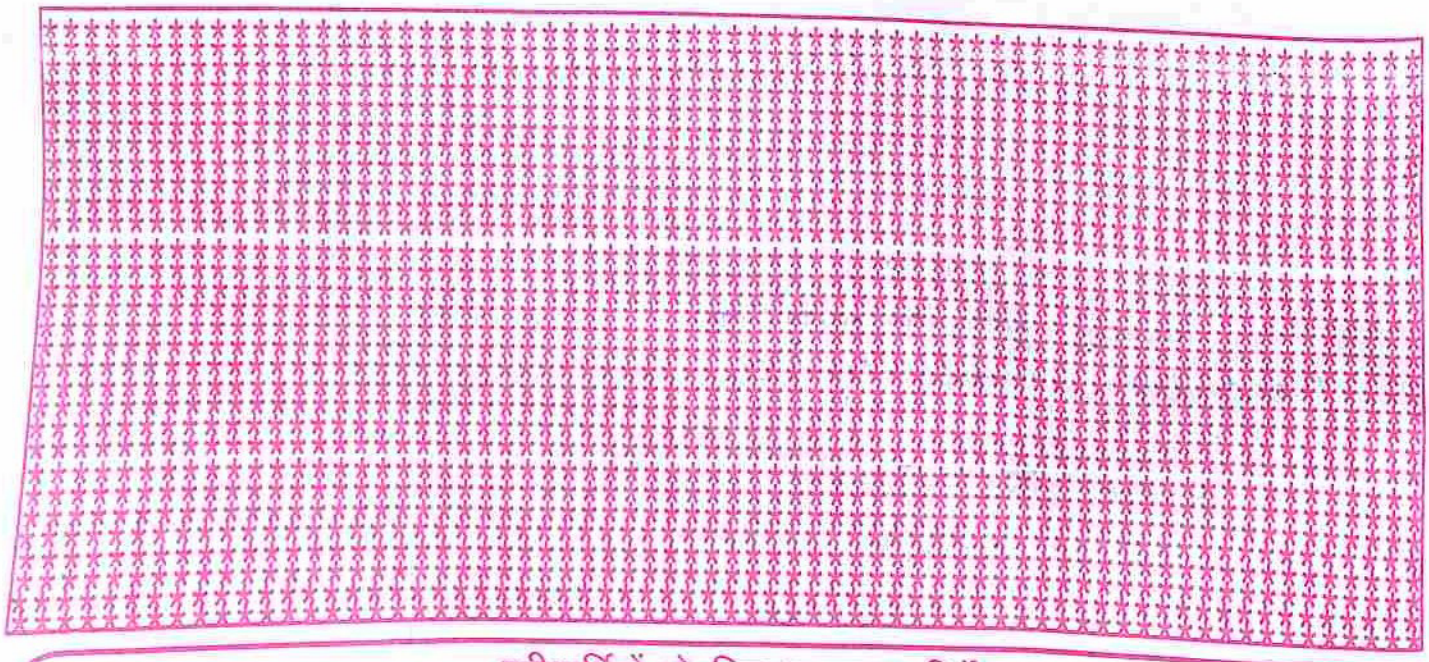
प्रश्नवार प्राप्तांकों की सारणी (परीक्षक के उपयोग हेतु)

प्रश्नों की क्रम संख्या	प्राप्तांक	प्रश्नों की क्रम संख्या	प्राप्तांक
1		19	
2		20	
3		21	
4		22	
5		23	
6		24	
7		25	
8		26	
9		27	
10		28	
11		29	
12		30	
13		31	
14		योग	
15		प्राप्त अंको का कुल योग (Round off)	
16		अंकों में	शब्दों में
17			
18			

परीक्षक के हस्ताक्षर

अंकेक्षांक [| | | |]

प्रमाणित किया जाता है कि इस उत्तर पुस्तिका के निर्माण में 58 जी.एस.एम. क्रीमवोव कागज ही उपयोग में लिया गया है। 167/2020



परीक्षार्थियों के लिए आवश्यक निर्देश

1. समस्त प्रश्नों का हल निर्धारित शब्द सीमा में इसी उत्तर पुस्तिका में करना है। विशेष परिस्थिति में अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका पृथक से उत्तर पुस्तिका भरी हुई होने पर पर्यवेक्षक एवं वीक्षक की अनुशंषा पर ही उपलब्ध कराई जायेगी।
2. प्रश्न–पत्र पर निर्धारित स्थान पर अपना नामांक लिखें।
3. प्रश्न–पत्र हल करने के पश्चात् जिस पृष्ठ पर हल समाप्त होता है, उस पर अन्त में "समाप्त" लिखकर अन्त के सभी रिक्त पृष्ठों को तिरछी लाईन से काटें।
4. निम्न बातों का विशेष ध्यान रखें अन्यथा अनुचित साधनों की रोकथाम अधिनियम के तहत कार्यवाही की जा सकेगी।
   (i) उत्तर पुस्तिका के ऊपर/अन्दर तथा प्रश्नोत्तर के किसी भी भाग में चाही गई सूचना के अलावा अपना नामांक, नाम, पता, फोन नम्बर अथवा पहचान की कोई अन्य प्रकार की सूचना आदि अंकित नहीं करें अन्यथा "अनुचित साधनों के प्रयोग" के अन्तर्गत कार्यवाही की जावेगी।
   (ii) उत्तर पुस्तिका के पृष्ठों को फाड़ें नहीं। उत्तर–पुस्तिका के मुख पृष्ठ पर अंकित संख्या के अनुसार पृष्ठ पूरे होने चाहिये। परीक्षार्थी उत्तरपुस्तिका प्राप्त करते ही पृष्ठ संख्या की जांच कर लें यदि पृष्ठ कम/अधिक या क्रम में नहीं हैं तो वीक्षक से तुरन्त बदलवा लें।
   (iii) परीक्षा केन्द्रों पर पुस्तक, लेख, कागज, केलक्यूलेटर, मोबाईल, पेजर आदि किसी भी प्रकार का इलेक्ट्रोनिक उपकरण तथा किसी भी प्रकार का हथियार आदि ले जाना निषेध हैं।
   (iv) वस्त्र, स्केल, ज्योमेट्री बॉक्स पर कुछ न लिखकर लावें। टेबुल के आस–पास कोई अवैध सामग्री नहीं होनी चाहिये, इसकी जांच कर लें।
   (v) अपनी उत्तर पुस्तिका/ग्राफ/मानचित्र आदि परीक्षा भवन से बाहर ले जाना दण्डनीय अपराध है, अतः परीक्षा समाप्ति पर उत्तर पुस्तिका वीक्षक को बिना सौंपे परीक्षा कक्ष नहीं छोड़ें।
5. प्रश्नों के उत्तरों को क्रमानुसार एक ही स्थान पर लिखें। प्रश्न क्रमांक भी सही अंकित करें, अन्यथा दण्ड स्वरूप परीक्षक को अंक कम करने का अधिकार है। बीच में उत्तर पुस्तिका के पृष्ठ रिक्त न छोड़ें। गणित विषय के लिए रफ कार्य पुस्तिका के अंतिम पृष्ठों पर करें तथा तिरछी रेखा से काटें।
6. तक हो सके प्रश्न के सभी भाग के उत्तर, उत्तर पुस्तिका में एक ही स्थान पर अंकित करें।
7. विषयों को छोड़कर शेष सभी विषयों के प्रश्न–पत्र हिन्दी–अंग्रेजी दोनों भाषा में मुद्रित है। किसी भी प्रकार की /अन्तर/विसंगतता होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही माना जाये।

द्वारा अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

Section-A

1. $F: R \to R$

$F(x) = x^2 + 5x + 9$

Let $f^{-1}(8) = x$

$f(x) = 8$

$x^2 + 5x + 9 = 8$

$x^2 + 5x + 1 = 0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(1)}}{2(1)}$ { By using sridhara charya formula)

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$F^{-1}(8) = \left\{ \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \right\}$

Let $f^{-1}(9) = x$

$f(x) = 9$

$x^2 + 5x + 9 = 9$

$x^2 + 5x = 0$

$x(x+5) = 0$

$x = 0, \quad x = -5$

$\therefore F^{-1}(9) = x$

$F^{-1}(9) = \{0, -5\}$

2. $2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$

$= 2\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{x + x^3}{1 - x^4}\right)\right]$

$= 2\,\frac{(x + x^3)}{1 - x^4}$ $\left[\because \tan(\tan^{-1}x) = x\right]$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$= \frac{2x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}$$

$$= \frac{2x}{1-x^2}$$

3. $$\begin{bmatrix} k+4 & -1 \\ 3 & k-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$\therefore k-6 = -4 \quad [a_{22} = a_{22}]$

$k = 6-4$

$\boxed{k = 2}$

$\because a_{11} = a_{11}$

$k+4 = a$

$a = 2+4$

$\boxed{a = 6}$

4. Singular matrix -

Any matrix A is said to be singular if it's determinant is not zero. $\rightarrow |A| \neq 0$

Non-singular matrix -

Any matrix A is called non singular matrix if its determinant value is zero. Inverse of this matrix does not exist. $\rightarrow |A| = 0$

i.e. For singular matrix A^{-1} is possible

For non singular matrix A^{-1} is not possible

द्वारा अंक	प्रश्न संख्या	परीक्षार्थी उत्तर

5. $f(x) = x^2 - x + 1 \quad x \in (-1, 1)$

$f'(x) = 2x - 1$

$f'(x) = 0$

$2x - 1 = 0$

$x = 1/2$

in $(-1, 1/2)$

$f'(x) < 0$

so $f(x)$ is decreasing

in $(1/2, 01)$

$f'(x) > 0$

so $f(x)$ is increasing.

so in $(-1, 1)$ $f(x)$ is neither increasing nor decreasing.

6. $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$

$= \int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx$

$= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} dx$

$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \int \sec^2 x \, dx - \int \sec x \tan x \, dx$

$= \tan x - \sec x + C.$

BSER 167/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या	परीक्षार्थी उत्तर

7. $(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times (3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(12 - 16) - \hat{j}(-8 - 12) + \hat{k}(8 + 9)$$

$$= -4\hat{i} + 20\hat{j} + 17\hat{k}$$

8. A (2, 3, 4) B (-1, 2, -3) C (-4, 1, -10)

Direction ratios of AB =

$-1-2, 2-3, -3-4$

$= -3, -1, -7$

Direction ratios of BC =

$-4+1, 1-2, -10+3$

$= -3, -1, -7$

∵ Direction ratios of AB and BC are proportional. ∴ A, B, C are collinear.

9. Feasible solution of linear programming problem - All the values of x and y that satisfy given inequalities and value of z is maximum or minimum is called feasible solution.

BSER-167/2020

द्वारा क | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

10. $P(A) = \frac{6}{11}$ $P(B) = \frac{5}{11}$

$P(A \cup B) = \frac{7}{11}$

$\because P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= \frac{6}{11} + \frac{5}{11} - \frac{7}{11}$

$P(A \cap B) = \frac{4}{11}$

Section - B

12. $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A = 2I + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

BSER-167/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -7 & 1 \\ -7 & 14 & -5 \\ 1 & -5 & 14 \end{bmatrix}$$

BSER-167/2020

13. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+3x+1}}\, dx$

Let $2x+5 = A\frac{d(x^2+3x+1)}{dx} + B$

$2x+5 = A(2x+3) + B$

$2x+5 = 2xA + 3A + B$

$A = 1$

$B = 2$

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}}\, dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+3x+1}}$$

Let $x^2+3x+1 = t$

$(2x+3)\,dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t}} + 2\int \frac{1}{\sqrt{(x+3/2)^2 - (\sqrt{5}/2)^2}}$$

$= 2\sqrt{t} + 2\log\left|(x+3/2) + \sqrt{x^2+3x+1}\right| + C$

$= 2\sqrt{x^2+3x+1} + 2\log\left|\left(x+\frac{3}{2}\right) + \sqrt{x^2+3x+1}\right| + C$

14. $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \cdots \infty}}}$

$y = \sqrt{\log x + y}$ (let $\sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \cdots \infty}} = y$)

Squaring both sides.

$y^2 = \log x + y$

differentiating both sides.

$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{dy}{dx}$

$2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx}(2y-1) = \frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}$

15. $2x^2 - y^2 = 14$ — (1)

∵ normals are parallel to $3y + x = 6$

$3y = -x + 6$

$y = -\frac{1}{3}x + 2$

$m = \text{slope} = \frac{dy}{dx} = -1/3$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

From eq. ①

$$4x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$$

$$\because \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{2x}{y} = -\frac{1}{3}$$

$$y = -6x$$

Putting in eq. ①

$$2x^2 - (-6x)^2 = 14$$

$$2x^2 - 36x^2 = 14$$

For normal -

$$m = \frac{-1}{dy/dx}$$

$$m = \frac{-y}{2x}$$

$$\because m = -1/2$$

$$\therefore \frac{-y}{2x} = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{2x}{3}$$

From eq. ①

$$2x^2 - \left(\frac{2x}{3}\right)^2 = 14$$

HSFR-167/2020

द्वारा अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$2x^2 - \frac{4}{9}x^2 = 14$$

$$\frac{14}{9}x^2 = 14$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$x = 3, \rightarrow y = 2$, $x = -3, \rightarrow y = -2$

normal passes through $(3, 2)$ and $(-3, -2)$

eqn of normal passing through $(3, 2)$

$$y - 2 = \frac{-1}{3}(x - 3)$$

$$3y - 6 = -x + 3$$

$$\boxed{x + 3y - 9 = 0}$$ Ans

eqn of normal passing through $(-3, -2)$

$$y + 2 = \frac{-1}{3}(x + 3)$$

$$3y + 6 = -x - 3$$

$$\boxed{x + 3y + 9 = 0}$$ Ans

11. Given that gof and $(gof)^{-1}$ are defined

Let $g: A \to A \Rightarrow g^{-1}: A \to A$

$f: A \to A \Rightarrow f^{-1}: A \to A$

so clearly $f^{-1}og^{-1}$ is also defined.

Let $gof(x) = y$

$g[f(x)] = y$

$f(x) = g^{-1}(y)$

BSEB-167/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$x = f^{-1}[g^{-1}(y)]$

$x = f^{-1}og^{-1}(y)$

similarly

let $gof(x) = y$

$x = (gof)^{-1}(y)$

$gof^{-1}(y) = f^{-1}og^{-1}(y)$

$gof^{-1}(x) = f^{-1}og^{-1}(x)$

Section - C

16. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x + \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}$

$\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}x + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$

$\cos^{-1}x + \cot^{-1}2x = \pi - \pi/3$

$\cos^{-1}x + \cot^{-1}2x = 2\pi/3$

~~$\cot^{-1}[\quad\quad]$~~

$\cos^{-1}[2x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}] = 2\pi/3$

$2x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = \cot 2\pi/3$

$= \cos(\pi - \pi/3)$

$2x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = -\cot \pi/3$

$= -1/2$

$$2x^2 + \frac{1}{2} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}$$

Squaring both sides

$$4x^4 + \frac{1}{4} + 2x^2 = (1-x^2)(1-4x^2)$$
$$= 1 - x^2 - 4x^2 + 4x^4$$

$$4x^4 + \frac{1}{4} + 2x^2 = 1 - 5x^2 + 4x^4$$

$$5x^2 + 2x^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$7x^2 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore x^2 = \frac{3}{28}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{28}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$\because x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ is does not satisfy given equation.

so $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$

17.

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ -1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1/a$, $R_2 \to R_2/b$, $R_3 \to R_3/c$

$$= abc \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$

$$= abc \begin{vmatrix} (1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) & (1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) & (1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \\ 1/b & 1+1/b & 1/b \\ 1/c & 1/c & 1+1/c \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/b & 1+1/b & 1/b \\ 1/c & 1/c & 1+1/c \end{vmatrix}$$

$C_3 \to C_3 - C_1$, $C_2 \to C_2 - C_1$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/b & 1 & 0 \\ 1/c & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left[1(1-0)+0+0\right]$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

18.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ z \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3x+3z \\ 2x+y \\ 4x+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ z \\ 3y \end{bmatrix}$$

BSLR-16/7/2020

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3x-2y+3z \\ 2x+y-z \\ 4x-3y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

So system of equations -

$3x-2y+3z = 8$

$2x+y-z = 1$

$4x-3y+2z = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$|A| = 3(2-3)+2(4+4)+3(-6-4)$

$= -3 + 16 - 30$

$= -17$

adj A -

$A_{11} = -1 \quad A_{12} = -8 \quad A_{13} = -10$

$A_{21} = -5 \quad A_{22} = -6 \quad A_{23} = +1$

$A_{31} = -1 \quad A_{32} = +9 \quad A_{33} = 7$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ -5 & -6 & +1 \\ -1 & +9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & +9 \\ -10 & +1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{-1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & +9 \\ -10 & +1 & 7 \end{bmatrix}$$

BSEK-167/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$\because AX = C$

$X = A^{-1}C$

$$X = \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & +9 \\ -10 & +1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$

19. $\int \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right) dx$

~~$x = a\tan^2\theta$~~

~~$dx = a\sec^2\theta\, d\theta$~~ $\quad \theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$

$dx = 2a\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \cos^{-1}\sqrt{\frac{a\tan^2\theta}{a(1+\tan^2\theta)}}\; 2a\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

द्वारा अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$= 2a \int \cos^{-1}\sqrt{\frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}}\ \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a \int \cos^{-1}(\sin\theta)\ \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a \left[\int \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta \right]$$

$$= 2a \left[\int \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta \right]$$

$$= 2a \left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta - \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{d\theta} \cdot \int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta \right]$$

$$= 2a \left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta + \int \tan\theta \sec^2\theta\, d\theta \right]$$

Let $\tan\theta = t$

$\sec^2\theta\, d\theta = dt$

$$= 2a \left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \int t\, dt + \int t\, dt \right]$$

$$= 2a \left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} \right] + c$$

$$= 2a \left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \frac{\tan^2\theta}{2} + \frac{\tan^2\theta}{2} \right] + c$$

$$= 2a \left[\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\right) \cdot \frac{x}{2a} + \frac{x}{2a} \right] + c$$

$$= \frac{\pi a - 2a \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}}{\pi}$$

$$= \frac{\pi x}{2} - \frac{x}{2} \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} + x + c$$

Ans.

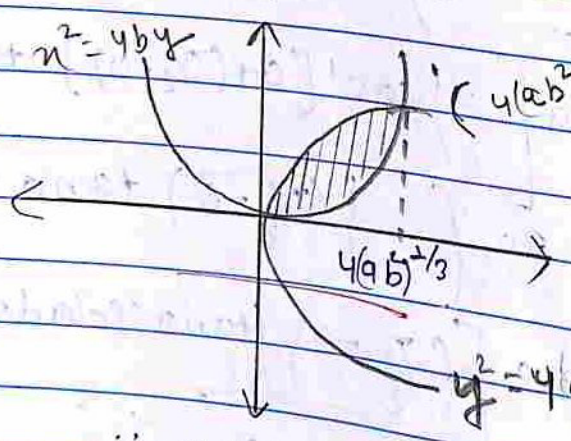
परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या

परीक्षार्थी उत्तर

20.

$y^2 = 4ax$ — ①

$x^2 = 4by$ — ②



$\therefore y = \frac{x^2}{4b}$

Putting in ①

$\frac{x^4}{16b^2} = 4ax$

$x^4 = 64ab^2x$

$x^3 = 64ab^2$

$x = 4(ab^2)^{1/3}$

$y = 4(a^2b)^{1/3}$

Required area $= \int_0^{4(ab^2)^{1/3}} y\,dx$ (Para I)

$= \int_0^{4(ab^2)^{2/3}} 4\sqrt{x}\,dx - \frac{1}{4b}\int_0^{4(ab^2)^{2/3}} x^2\,dx$ (Para II)

$= 2\sqrt{4}\int_0^{4(ab^2)^{2/3}} \sqrt{x}\,dx - \frac{1}{4b}\int_0^{4(ab^2)^{2/3}} x^2\,dx$

$= 2\sqrt{4}\cdot\frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^{4(ab^2)^{2/3}} - \frac{1}{4b\times 3}\left[x^3\right]_0^{4(ab^2)^{2/3}}$

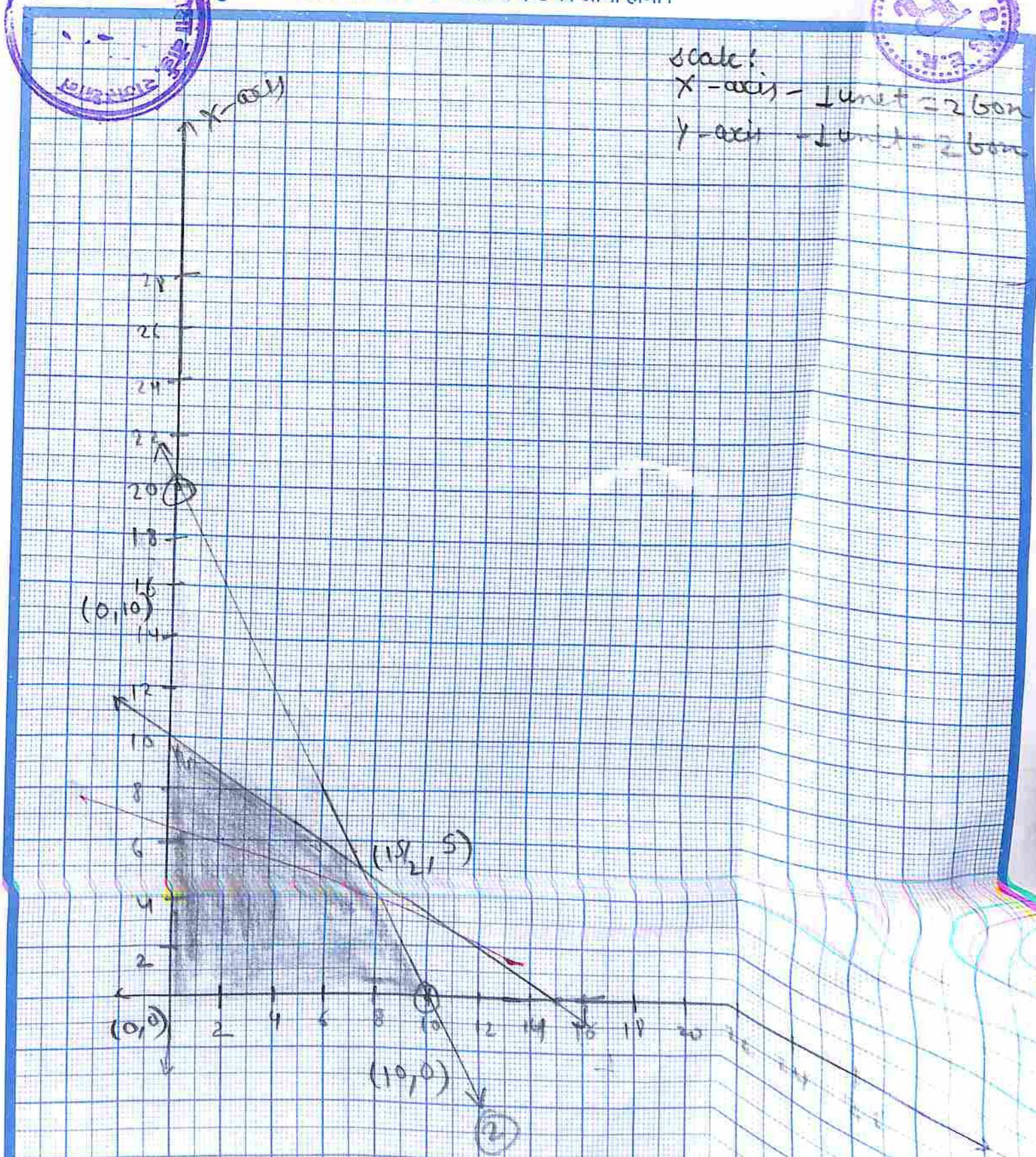
माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान

परीक्षा .....

नामांक (अंकों में) [ ] (शब्दों में) .....

विषय math प्रश्न संख्या 25

नोट : परीक्षार्थी अनिवार्य रूप से इस ग्राफ कागज को अपनी उत्तर पुस्तिका में धागे द्वारा संलग्न करें तथा साथ न हो जाये। ग्राफ कागज उत्तर पुस्तिका के साथ न मिलने पर परीक्षार्थी दण्ड का भागी होगा।



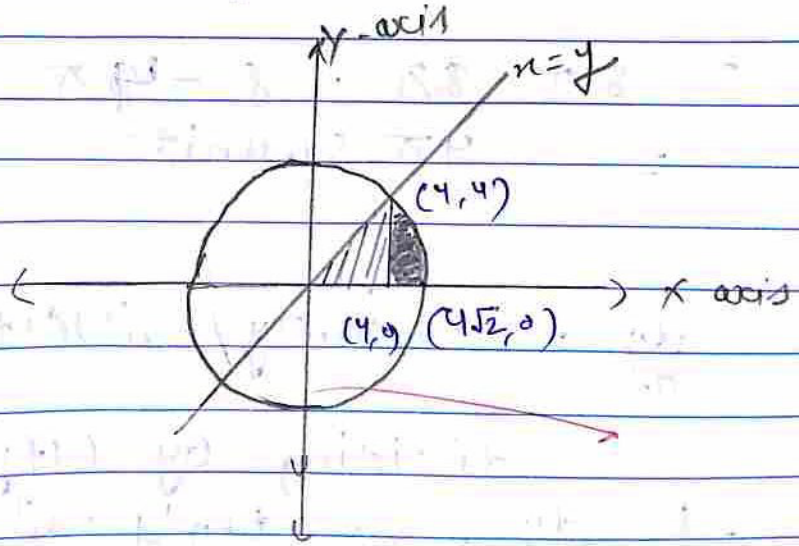
$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}\left[8\sqrt{ab^2}\right] - \frac{1}{12b} \times 64\, ab^2$$

$$= \frac{32}{3}ab - \frac{16}{3}ab$$

$$= \frac{16ab}{3} \text{ Sq. unit}$$

21. $x^2 + y^2 = 32$ ... (1)

$x = y$



Intersection point -

$2x^2 = 32$

$x^2 = 16$

$x = 4$ (I quadrant)

$y = 4$

Required area = $\int_0^4 y\,dx$ (line) + $\int_4^{4\sqrt{2}} y\,dx$ (circle)

DSER-167/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$= \int_0^4 x\,dx + \int_4^{4\sqrt{2}} \sqrt{32-x^2}\,dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^4 + \left[\frac{x}{2}\sqrt{32-x^2} + 16\sin^{-1}\frac{x}{4\sqrt{2}}\right]_4^{4\sqrt{2}}$$

$\because$ by using formula $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}$

$$= \left(\frac{4^2}{2}\right) + \left[0 + 16\sin^{-1}\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} - \frac{4}{2}\times 4 - 16\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{16}{2} + \left[0 + 16\times\frac{\pi}{2} - 2\times 4 - 16\times\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 8 + 8\pi - 8 - 4\pi$$

$$= 4\pi \text{ sq. unit}$$

(22) $\frac{dy}{dx} + (2x\tan^{-1}y - x^3)(1+y^2) = 0$

dividing by $(1+y^2)$

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} + 2x\tan^{-1}y - x^3 = 0$$

$$\frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx} + 2x\tan^{-1}y = x^3$$

let $\tan^{-1}y = V$

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{dV}{dx}$$

$$\frac{dV}{dx} + 2Vx = x^3$$

Pe comparing with

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

$P = 2x$

$Q = x^3$

$I.F = e^{\int 2x\,dx}$

$= e^{x^2}$

$y \cdot e^{x^2} = \int e^{x^2} \cdot x^3\,dx$

$= \int e^{x^2} \cdot x^2 \cdot x\,dx$

Let $x^2 = t$

$x\,dx = dt/2$

$= \frac{1}{2}\int e^t \cdot t\,dt$

$y \cdot e^{x^2} = \frac{1}{2}[te^t - e^t] + c$

$\tan^{-1}y \cdot e^{x^2} = \frac{1}{2}\left[x^2 \cdot e^{x^2} - e^{x^2}\right] + c$

$\tan^{-1}y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$

$\tan^{-1}y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$

23. $(1+y^2) + (x - e^{\tan^{-1}y})\frac{dx}{dy} = 0$

multiply by dx/dy

$(1+y^2)\frac{dx}{dy} + x - e^{\tan^{-1}y} = 0$

$(1+y^2)\frac{dx}{dy} - e^{\tan^{-1}y} = -x$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

~~Let $\tan^{-1}y = t$~~

$$(1+y^2)\frac{dx}{dy} + x = e^{\tan^{-1}y}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}$$

$P = 1/1+y^2$

$Q = \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}$

$$I.F = e^{\int P\,dy}$$

$$= e^{\int \frac{1}{1+y^2}\,dy}$$

$$= e^{\tan^{-1}y}$$

$$x \cdot e^{\tan^{-1}y} = \int e^{\tan^{-1}y} \cdot \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}\,dy$$

Let $e^{\tan^{-1}y} = t$

$$\frac{1}{1+y^2}\,dy = dt$$

$$x \cdot e^{\tan^{-1}y} = \int t^2\,dt$$

$$= t^3/3 + c$$

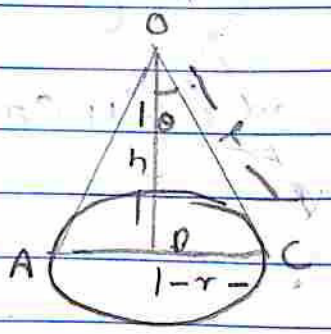
$$x e^{\tan^{-1}y} = (e^{\tan^{-1}y})^3 + c$$

$$x = \frac{(e^{\tan^{-1}y})^3}{3} + ce^{-\tan^{-1}y}$$

ISER-167/2020

क द्वारा अंक	प्रश्न संख्या	परीक्षार्थी उत्तर

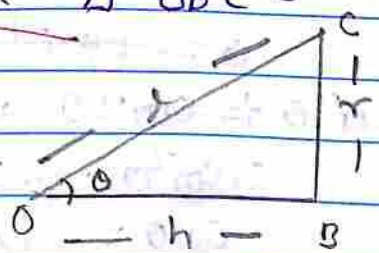
2.4



Let θ be the semi vertical angle.
We know that volume of cone -

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

In ΔOBC -



$$\frac{l}{h} = \sec\theta$$

$$h \sec\theta = l$$

$$h = l\cos\theta$$

$$\frac{r}{l} = \sin\theta$$

$$r = l\sin\theta$$

$$V = \frac{1}{3}\pi l^2 \sin^2\theta \, l\cos\theta$$

$$V = \frac{\pi}{3} l^3 \sin^2\theta \cos\theta$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\pi l^3}{3}\left[2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\right]$$

$$\frac{d^2V}{d\theta} = \frac{\pi l^3}{3}\left[-4\cos\theta\sin^2\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos^3\theta\right]$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0$$

$$2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta = 0$$

$$2\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

~~$\tan^2\theta = 2$~~ ~~$\cos^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$~~

~~$\tan\theta = t$~~

~~$\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$~~

~~$\cos^2\theta + \cos 2\theta = 1$~~

$$3\cos^2\theta - 1 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\pi l^3}{3}\left[-4\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{3} - \frac{3\times 2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\times 1}{3\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{\pi l^3}{3}\left[\frac{-8-6+1}{3\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{\pi l^3}{3}\left(\frac{-12}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{-4\pi l^3}{\sqrt{3}\times 3} < 0$$

So V is maximum.

क द्वारा अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2/3}}{\sqrt{1/3}}$$

$$\tan\theta = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$$

So semivertex angle of a cone of given slant height and maximum volume is $\tan^{-1}(\sqrt{2})$.

BSER-16/7/2020

25. Maximize $Z = 2x + 3y$

Subject to constraint -

$$4x + 6y \leq 60$$

$$2x + y \leq 20$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

On converting into equalities -

$$4x + 6y = 60 \quad \text{---} (1)$$

$x = 0, \quad y = 10 \rightarrow (0, 10)$

$y = 0, \quad x = 15 \rightarrow (15, 0)$

$$2x + y = 20 \quad \text{---} (2)$$

$x = 0, \quad y = 20 \rightarrow (0, 20)$

$y = 0, \quad x = 10 \rightarrow (10, 0)$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

points	$Z = 2x + 3y$
O (0, 0)	0
A (10, 0)	20
B ($15/2$, 5)	30
C (0, 10)	30

Z is max at line joining ($15/2$, 5) and (0, 10).

Section D

26. $f(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3|$

$$f(x) = \begin{cases} 14 - 6x & , x \leq 1 \\ 12 - 4x & , 1 \leq x \leq 2 \\ 4 & , 2 < x < 3 \\ 6x - 14 & , x \geq 3 \end{cases}$$

continuity at $x = 1$

$LHL = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$= \lim_{h \to 0} f(1-h)$

$= \lim_{h \to 0} [14 - 6(1-h)]$

$= 8$

$RHL = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

क्षक द्वारा दत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$= \lim_{h \to 0} f(1+h)$

$= \lim_{h \to 0} (2 - 4(1+h))$

$= 8$

$f(1) = 14 - 6 = 8$

$\therefore LHL = RHL = f(1)$

So $f(x)$ is continuous at $x=1$

continuity at $x=2$

$LHL = \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$= \lim_{h \to 0} f(2-h)$

$= \lim_{h \to 0} (2 - 4(2-h))$

$= 4$

$RHL = \lim_{x \to 2^+} f(x)$

$= \lim_{h \to 0} f(2+h) = 4$

$LHL = RHL = f(2) = 4$

So $f(x)$ is continuous at $x=2$

continuity at $x=3$

$LHL = \lim_{x \to 3^-} f(x)$

$= \lim_{h \to 0} f(3-h)$

$= 4$

BSER-16/7/2020

$$RHL = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} f(3+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} [6(3+h) - 14]$$

$$= 18 - 14$$

$$= 4$$

$$f(3) = 4$$

$\therefore$ LHL = RHL = $f(3) = 4$

So $f(x)$ is continuous at $x = 3$

Differentiability -

$$LHD = \lim_{h \to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{14 - 6(1-h) - 8}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 + 6h - 8}{-h}$$

$$= -6$$

$$RHD = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12 - 4(1+h) - 8}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 - 4h - 8}{h}$$

$$= -4$$

$\therefore$ LHD $\neq$ RHD

So $f(x)$ is not differentiable at $x=1$

Differentiability at $x=2$

$$LHD = \lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{12-4(2-h)-4}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} +\frac{4h}{h} = 4$$

$$RHD = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4-24}{h} = 0$$

$\therefore LHD \neq RHD$

So $f(x)$ is not differentiable at $x=2$

at $x=3$ –

$$LHD = \lim_{h\to 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4-4}{-h} = 0$$

$$RHD = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6(3+h)-14-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6h}{h} = 6$$

$LHD \neq RHD$

So $f(x)$ is not differentiable at $x=3$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

27. $I = \int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\,dx$ — (1)

$I = \int_0^{\pi} \log[1+\cos(\pi-x)]\,dx$

(By using $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$)

$= \int_0^{\pi} \log[1-\cos x]\,dx$ — (2)

Adding (1) and (2)

$2I = \int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\,dx + \int_0^{\pi} \log(1-\cos x)\,dx$

$= \int_0^{\pi} \log[(1+\cos x)(1-\cos x)]\,dx$

$= \int_0^{\pi} \log(1-\cos^2 x)\,dx$

$= \int_0^{\pi} \log \sin^2 x\,dx$

$2I = 2\int_0^{\pi} \log \sin x\,dx$

$I = \int_0^{\pi} \log \sin x\,dx$ — (3)

By property $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

$I = \int_0^{\pi} \log \sin(\pi-x)\,dx$

$I = \int_0^{\pi} \log \cos x\,dx$ — (4)

HSFR-167/2020

Adding (3) and (4)

$$2I = \int_0^{\pi} \log \sin x \, dx + \int_0^{\pi} \log \cos x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \log (\sin x \cos x) \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \log \left(\frac{2 \sin x \cos x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \log \sin 2x \, dx - \int_0^{\pi} \log 2 \, dx$$

Let $2x = t$

$dx = dt/2$

$x = 0, \quad t = 0$

$x = \pi, \quad =$

P.T.O.

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

Rough work

$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

$\therefore g[f(x)]^{-1}$

$gof^{-1}(x) = z$

$gof(x) = y$

$g[f(x)] = y$

$f(x) = g^{-1}(y)$

$x = f^{-1}og^{-1}z$

$|x-1| + 2|x-1| + 3|x-3|$

$-(x-1) - 2(x-2) - 3(x-1)$

$x-1 - 2(x-2) - 3(x-3) | 4 - 6x$

$x-1 - 2x+4 - 3x+9$

$x-1 - 2x+2 - 3x+3$

$-4x+4$

$12 - 4x$

$+(x-1) + 2(x-2) - 3(x-1)$

$3x - 5 - 3x + 9$

4

$(q^2b^4)^{1/3}$

b

$(q^2b^{4/3})$

$4 - \frac{2}{3}$

$\frac{3}{3}$

$\left(\frac{qb^2}{b}\right)^{2/3}$

$(qb^2 \cdot b^{-3/2})^{2/3}$

$q\sqrt{b}$

q^2b

BSER-167/2020

कुल पृष्ठ संख्या–32 (कवर पेज सहित)

क्रम संख्या....

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान, अजमेर

उच्च माध्यमिक परीक्षा

(परीक्षार्थी द्वारा स्वयं भरा जाना चाहिये)

Candidate's Roll No. In English

(In Figures) [ ]

(In Words) ----------

परीक्षार्थी का नामांक हिन्दी में

शब्दों में ----------

नोट :– परीक्षार्थी उपरोक्त के अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका के अन्य किसी भी भाग में अपना नामांक नहीं लिखें।

माध्यम – हिन्दी [ ] अंग्रेजी [ ]

विषय .....

परीक्षा का दिन .....

दिनांक .....

नोट :– परीक्षार्थी के लिए आवश्यक निर्देश इस पृष्ठ के पिछले भाग पर उल्लेखित हैं। जिन्हें सावधानी पूर्वक पढ़ लें व पालना अवश्य करें।

परीक्षक हेतु निर्देश :– (1) परीक्षक को उपरोक्त सारणी अनुसार प्राप्तांक भरना अनिवार्य हैं, अन्यथा नियमानुसार दंडित किया जायेगा।

(2) परीक्षक उत्तर पुस्तिका के अन्दर के पृष्ठों के बायीं ओर निर्धारित कॉलम में लाल इंक से अंक प्रदत्त करें।

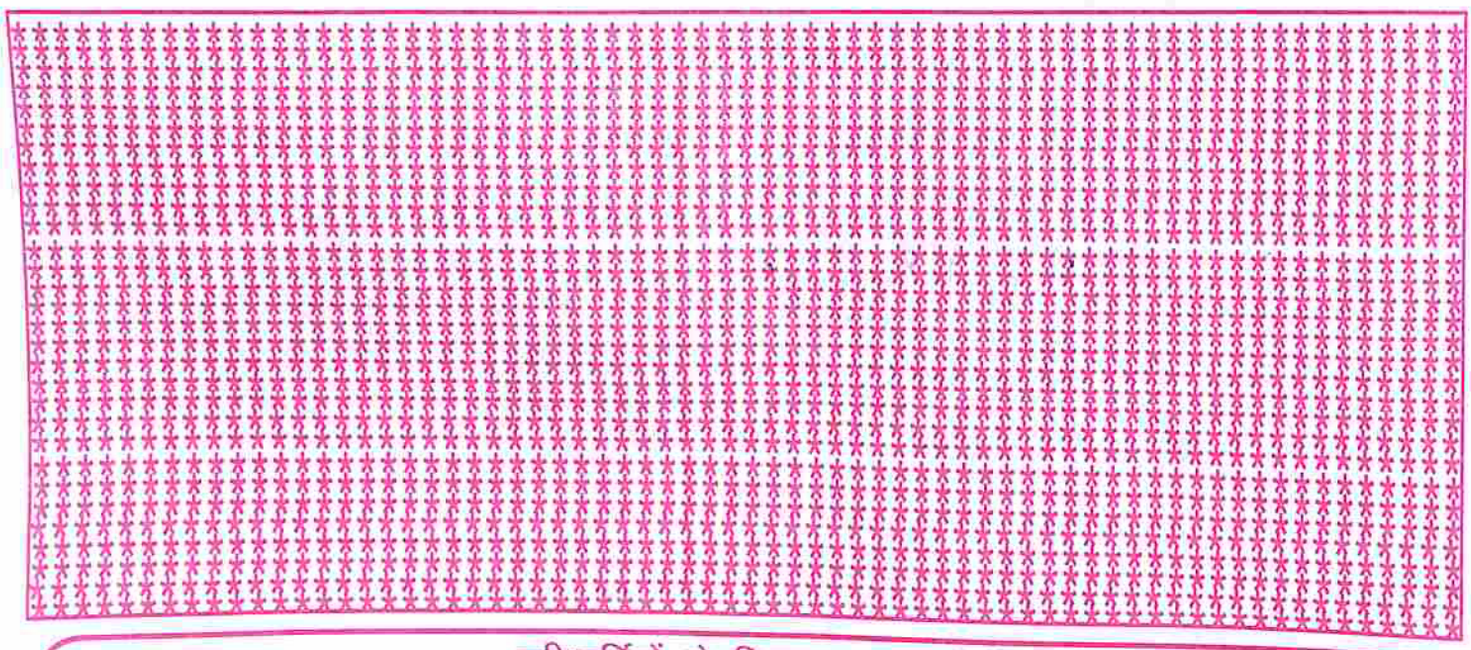
(3) कुल योग भिन्न में प्राप्त होने पर उसे पूर्णांक में ही परिवर्तित कर अंकित करें (उदारणार्थ : 15 ¼ को 16, 17 ½ को 18, 19 ¾ को 20)

प्रश्नवार प्राप्तांकों की सारणी
(परीक्षक के उपयोग हेतु)

प्रश्नों की क्रम संख्या	प्राप्तांक	प्रश्नों की क्रम संख्या	प्राप्तांक
1		19	
2		20	
3		21	
4		22	
5		23	
6		24	
7		25	
8		26	
9		27	
10		28	
11		29	
12		30	
13		31	
14		योग	
15		प्राप्त अंकों का कुल योग (Round off)	
16		अंकों में	शब्दों मे
17			
18			

परीक्षक के हस्ताक्षर ..... संकेतांक [ ][ ][ ][ ][ ]

प्रमाणित किया जाता है कि इस उत्तर पुस्तिका के निर्माण में 58 जी.एस.एम. क्रीमवोव कागज ही उपयोग में लिया गया है। 167/2020



परीक्षार्थियों के लिए आवश्यक निर्देश

1. समस्त प्रश्नों का हल निर्धारित शब्द सीमा में इसी उत्तर पुस्तिका में करना है। विशेष परिस्थिति में अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका पृथक से उत्तर पुस्तिका भरी हुई होने पर पर्यवेक्षक एवं वीक्षक की अनुशंषा पर ही उपलब्ध कराई जायेगी।
2. प्रश्न–पत्र पर निर्धारित स्थान पर अपना नामांक लिखें।
3. प्रश्न–पत्र हल करने के पश्चात् जिस पृष्ठ पर हल समाप्त होता है, उस पर अन्त में "समाप्त" लिखकर अन्त के सभी रिक्त पृष्ठों को तिरछी लाईन से काटें।
4. निम्न बातों का विशेष ध्यान रखें अन्यथा अनुचित साधनों की रोकथाम अधिनियम के तहत कार्यवाही की जा सकेगी।
   (i) उत्तर पुस्तिका के ऊपर/अन्दर तथा प्रश्नोत्तर के किसी भी भाग में चाही गई सूचना के अलावा अपना नामांक, नाम, पता, फोन नम्बर अथवा पहचान की कोई अन्य प्रकार की सूचना आदि अंकित नहीं करें अन्यथा "अनुचित साधनों के प्रयोग" के अन्तर्गत कार्यवाही की जावेगी।
   (ii) उत्तर पुस्तिका के पृष्ठों को फाड़ें नहीं। उत्तर–पुस्तिका के मुख पृष्ठ पर अंकित संख्या के अनुसार पृष्ठ पूरे होने चाहिये। परीक्षार्थी उत्तरपुस्तिका प्राप्त करते ही पृष्ठ संख्या की जांच कर लें यदि पृष्ठ कम/अधिक या क्रम में नहीं हैं तो वीक्षक से तुरन्त बदलवा लें।
   (iii) परीक्षा केन्द्रों पर पुस्तक, लेख, कागज, केलक्यूलेटर, मोबाईल, पेजर आदि किसी भी प्रकार का इलेक्ट्रोनिक उपकरण तथा किसी भी प्रकार का हथियार आदि ले जाना निषेध हैं।
   (iv) वस्त्र, स्केल, ज्योमेट्री बॉक्स पर कुछ न लिखकर लावें। टेबुल के आस–पास कोई अवैध सामग्री नहीं होनी चाहिये, इसकी जांच कर लें।
   (v) अपनी उत्तर पुस्तिका/ग्राफ/मानचित्र आदि परीक्षा भवन से बाहर ले जाना दण्डनीय अपराध है, अतः परीक्षा समाप्ति पर उत्तर पुस्तिका वीक्षक को बिना सौंपे परीक्षा कक्ष नहीं छोड़ें।
5. उत्तरों को क्रमानुसार एक ही स्थान पर लिखें। प्रश्न क्रमांक भी सही अंकित करें, अन्यथा दण्ड स्वरूप परीक्षक को 1 अंक कम करने का अधिकार है। बीच में उत्तर पुस्तिका के पृष्ठ रिक्त न छोड़ें। गणित विषय के लिए रफ कार्य उत्तर पुस्तिका के अंतिम पृष्ठों पर करें तथा तिरछी रेखा से काटें।
6. जहाँ तक हो सके प्रश्न के सभी भाग के उत्तर, उत्तर पुस्तिका में एक ही स्थान पर अंकित करें।
7. भाषा विषयों को छोड़कर शेष सभी विषयों के प्रश्न–पत्र हिन्दी–अंग्रेजी दोनों भाषा में मुद्रित है। किसी भी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही माना जाये।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$I = \int_0^{\pi} \log \sin x \, dx$$

$\because f(2a-x) = f(x)$

$$I = \int_0^{\pi/2 \times 2} \log \sin x \, dx$$

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx \quad \text{---(4)}$$

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \log [\sin(\pi/2 - x)] \, dx$$

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx \quad \text{---(5)}$$

Adding (4) and (5)

$$2I = 2\int_0^{\pi/2} \log \sin x \cos x \, dx$$

$$2I = 2\int_0^{\pi/2} \log \frac{\sin 2x}{2} \, dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \log \sin 2x \, dx - 2\int_0^{\pi/2} \log 2 \, dx$$

Let $2x = t$

$dx = dt/2$

$x = 0, \; t = 0$

$x = \pi/2, \; t = \pi$

$$2I = \frac{2}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t \, dt - 2 \times \pi/2 \log 2$$

BSER 167/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log\sin t\,dt = \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$\left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt\right]$$

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$2I = \int_0^{\pi} \log\sin x\,dx - \pi\log 2$$

$$2I = I - \pi\log 2$$

$$I = -\pi\log 2$$

$$I = \pi\log\tfrac{1}{2} \quad \left(\because -\log x = \log\tfrac{1}{x}\right)$$

28. (i) $[\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a}]$

$$= (\vec{a}+\vec{b}).[(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})]$$

$$= (\vec{a}+\vec{b}).[\vec{b}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}]$$

$$= (\vec{a}+\vec{b}).[\vec{b}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{a}] \quad \because \vec{a}\times\vec{a} = 0$$

$$= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{a}) + \vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{b}.(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a}) + \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$= [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] + 0 + 0 + 0 + 0 + [\vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{a}]$$

$$\because [\vec{b} \quad \vec{c} \quad \vec{a}] = [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] + [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

$= 2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

(11) $[(\vec{a}\times\vec{b})\ (\vec{b}\times\vec{c})\ (\vec{c}\times\vec{a})]$

let $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{p}$

$[\vec{a}\times\vec{b}\quad \vec{p}\quad (\vec{c}\times\vec{a})]$

$= (\vec{a}\times\vec{b}).[\vec{p}\times(\vec{c}\times\vec{a})]$

$= (\vec{a}\times\vec{b}).[(\vec{p}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{p}\cdot\vec{c})\vec{a}]$

putting value of $\vec{p}$

$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot[\{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}\}\vec{c} - \{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}\}\vec{a}]$

$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot[\{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}\}\vec{c} - 0]$

$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\cdot[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]$

$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\cdot[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]^2$

29: (i) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3} = \lambda$

$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k} + \lambda(2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$ — (1)

$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-1}{2} = \mu$

$\vec{r} = (\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + \mu(-\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ — (2)

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$\vec{a}_1 = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{a}_2 = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b}_1 = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{b}_2 = -\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = -2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(2+9) - \hat{j}(4-3) + \hat{k}(7)$

$= 11\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$

$$d = \left| \frac{(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right|$$

$$= \left| \frac{(-2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) \cdot (11\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k})}{\sqrt{121+1+49}} \right|$$

$$= \left| \frac{-22 + 1 + 14}{\sqrt{171}} \right| = \left| \frac{-7}{\sqrt{171}} \right|$$

$$= \frac{7}{\sqrt{171}}$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

(11) $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$\therefore \vec{b}_1 = \vec{b}_2$

so

$\vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\vec{a}_2 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{a}_2 - \vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$$\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-3-6) - \hat{j}(-2-12) + \hat{k}(2-6)$

$= -9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}$

$|\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)| = \sqrt{81 + 196 + 16}$

$d = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{\sqrt{293}}{7}$

30. E_1 → 6 ↓ comes up

E_2 → 1 does not come up

$P(E_2) = 1/6$

$P(E_2) = 5/6$

E_1 → report ↓

IISER-16/7/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$P(E_1/E_2) = 3/5$

$P(E/E_2) = 2/5$

$$P(E_1/E) = \frac{3/5 \times 1/6}{2/5 \times 1/6 + 2/5 \times 5/6}$$

$$= \frac{3}{3+10} = \frac{3}{13}$$

BSER 16/7202