कुल पृष्ठ संख्या 24 (कवर पेज सहित) क्रम संख्या....

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान, अजमेर

उच्च माध्यमिक परीक्षा

(परीक्षार्थी द्वारा स्वयं भरा जाना चाहिये)

Candidate's Roll No. In English

(In Figures) [| | | | | | |]

(In Words)

परीक्षार्थी का नामांक हिन्दी म

शब्दों में

नोट :– परीक्षार्थी उपरोक्त के अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका के अन्य किसी भी भाग में अपना नामांक नहीं लिखें।

माध्यम – हिन्दी [✓] अंग्रेजी [ ]

विषय गणित

परीक्षा का दिन गुरुवार

दिनांक 18-06-20

नोट :– परीक्षार्थी के लिए आवश्यक निर्देश इस पृष्ठ के पिछले भाग पर उल्लेखित हैं। जिन्हें सावधानी पूर्वक पढ़ लें व पालना अवश्य करें।

परीक्षक हेतु निर्देश :– (1) परीक्षक को उपरोक्त सारणी अनुसार प्राप्तांक भरना अनिवार्य हैं, अन्यथा नियमानुसार दंडित किया जायेगा।

(2) परीक्षक उत्तर पुस्तिका के अन्दर के पृष्ठों के बायीं ओर निर्धारित कॉलम में लाल इंक से अंक प्रदत्त करें।

(3) कुल योग भिन्न में प्राप्त होने पर उसे पूर्णांक में ही परिवर्तित कर अंकित करें (उदारणार्थ : 15 ¼ को 16, 17 ½ को 18, 19 ¾ को 20)

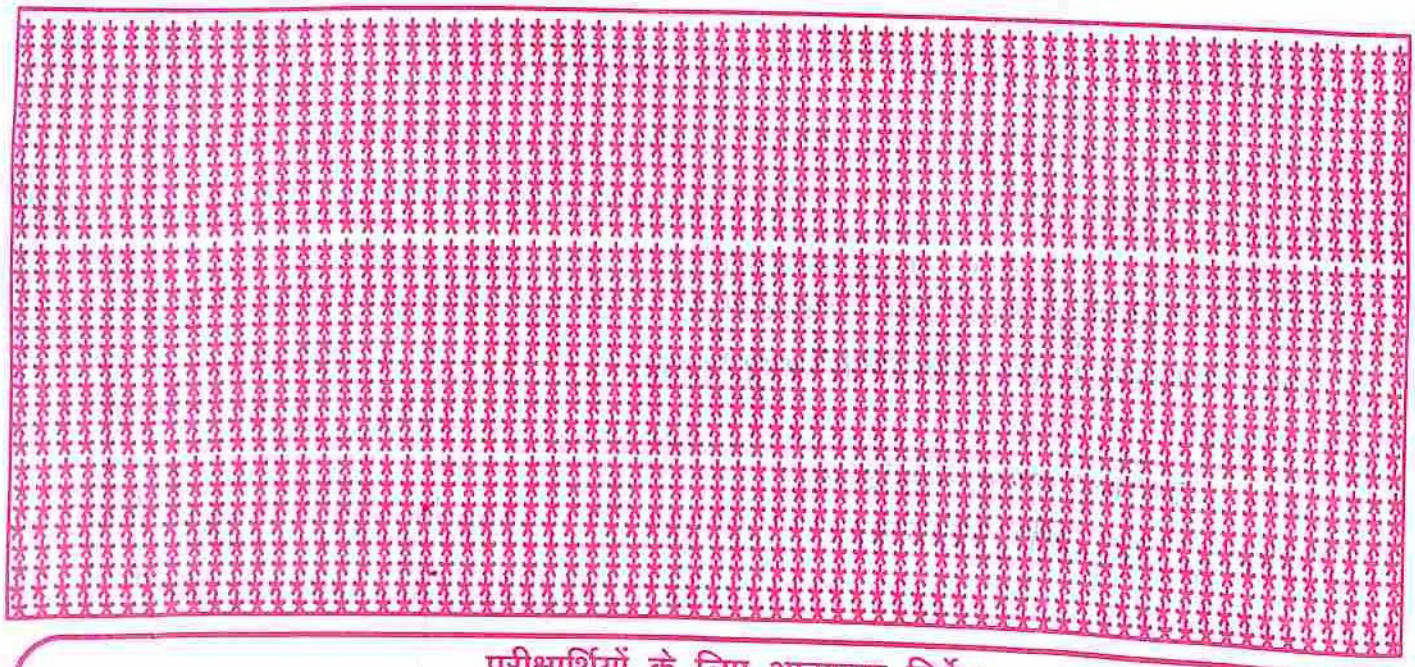
प्रश्नवार प्राप्तांकों की सारणी (परीक्षक के उपयोग हेतु)

प्रश्नों की क्रम संख्या	प्राप्तांक	प्रश्नों की क्रम संख्या	प्राप्तांक
1		19	
2		20	
3		21	
4		22	
5		23	
6		24	
7		25	
8		26	
9		27	
10		28	
11		29	
12		30	
13		31	
14		योग	
15		प्राप्त अंको का कुल योग (Round off)	
16		अंकों में	शब्दों में
17			
18			

परीक्षक के हस्ताक्षर

अंकेक्षांक [| | | |]

प्रमाणित किया जाता है कि इस उत्तर पुस्तिका के निर्माण में 58 जी.एस.एम. क्रीमवोव कागज ही उपयोग में लिया गया है। 167/2020



परीक्षार्थियों के लिए आवश्यक निर्देश

1. समस्त प्रश्नों का हल निर्धारित शब्द सीमा में इसी उत्तर पुस्तिका में करना है। विशेष परिस्थिति में अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका पृथक से उत्तर पुस्तिका भरी हुई होने पर पर्यवेक्षक एवं वीक्षक की अनुशंषा पर ही उपलब्ध कराई जायेगी।
2. प्रश्न–पत्र पर निर्धारित स्थान पर अपना नामांक लिखें।
3. प्रश्न–पत्र हल करने के पश्चात् जिस पृष्ठ पर हल समाप्त होता है, उस पर अन्त में "समाप्त" लिखकर अन्त के सभी रिक्त पृष्ठों को तिरछी लाईन से काटें।
4. निम्न बातों का विशेष ध्यान रखें अन्यथा अनुचित साधनों की रोकथाम अधिनियम के तहत कार्यवाही की जा सकेगी।
   (i) उत्तर पुस्तिका के ऊपर/अन्दर तथा प्रश्नोत्तर के किसी भी भाग में चाही गई सूचना के अलावा अपना नामांक, नाम, पता, फोन नम्बर अथवा पहचान की कोई अन्य प्रकार की सूचना आदि अंकित नहीं करें अन्यथा "अनुचित साधनों के प्रयोग" के अन्तर्गत कार्यवाही की जावेगी।
   (ii) उत्तर पुस्तिका के पृष्ठों को फाड़ें नहीं। उत्तर–पुस्तिका के मुख पृष्ठ पर अंकित संख्या के अनुसार पृष्ठ पूरे होने चाहिये। परीक्षार्थी उत्तरपुस्तिका प्राप्त करते ही पृष्ठ संख्या की जांच कर लें यदि पृष्ठ कम/अधिक या क्रम में नहीं हैं तो वीक्षक से तुरन्त बदलवा लें।
   (iii) परीक्षा केन्द्रों पर पुस्तक, लेख, कागज, केलक्यूलेटर, मोबाईल, पेजर आदि किसी भी प्रकार का इलेक्ट्रोनिक उपकरण तथा किसी भी प्रकार का हथियार आदि ले जाना निषेध हैं।
   (iv) वस्त्र, स्केल, ज्योमेट्री बॉक्स पर कुछ न लिखकर लावें। टेबुल के आस–पास कोई अवैध सामग्री नहीं होनी चाहिये, इसकी जांच कर लें।
   (v) अपनी उत्तर पुस्तिका/ग्राफ/मानचित्र आदि परीक्षा भवन से बाहर ले जाना दण्डनीय अपराध है, अतः परीक्षा समाप्ति पर उत्तर पुस्तिका वीक्षक को बिना सौंपे परीक्षा कक्ष नहीं छोड़ें।
5. उत्तरों को क्रमानुसार एक ही स्थान पर लिखें। प्रश्न क्रमांक भी सही अंकित करें, अन्यथा दण्ड स्वरूप परीक्षक को 1 अंक कम करने का अधिकार है। बीच में उत्तर पुस्तिका के पृष्ठ रिक्त न छोड़ें। गणित विषय के लिए रफ कार्य उत्तर पुस्तिका के अंतिम पृष्ठों पर करें तथा तिरछी रेखा से काटें।
6. जहाँ तक हो सके प्रश्न के सभी भाग के उत्तर, उत्तर पुस्तिका में एक ही स्थान पर अंकित करें।
7. भाषा विषयों को छोड़कर शेष सभी विषयों के प्रश्न–पत्र हिन्दी–अंग्रेजी दोनों भाषा में मुद्रित है। किसी भी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही माना जाये।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या	परीक्षार्थी उत्तर

(1) दिया है :- $f: R \to R$

$f(x) = x^2 + 5x + 9$

ज्ञात करना है :- $f^{-1}(8) = ?$

व $f^{-1}(9) = ?$

माना $f^{-1}(8) = x \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow f(x) = 8$

$\Rightarrow x^2 + 5x + 9 = 8$

$\Rightarrow x^2 + 5x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(8) = \left\{\frac{1}{2}(-5+\sqrt{21}), \frac{1}{2}(-5-\sqrt{21})\right\}}$ Ans

पुनः माना $f^{-1}(9) = x \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow f(x) = 9$

$\Rightarrow x^2 + 5x + 9 = 9$

$\Rightarrow x(x+5) = 0$

$\Rightarrow x = 0, -5$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(9) = \{0, -5\}}$ Ans.

(2) $2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$

$= 2\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{x+x^3}{1-x \cdot x^3}\right)\right]$ $\left\{\because \tan^{-1}A + \tan^{-1}B = \tan^{-1}\left(\frac{A+B}{1-AB}\right)\right\}$

$= \frac{2x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)}$ $\left\{\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\right\}$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$= \frac{2x}{1-x^2}$

$\Rightarrow \boxed{2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x) = \frac{2x}{1-x^2}}$ Ans

(3) दिया है: $\begin{bmatrix} k+4 & 1 \\ 3 & k-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

ये दोनों आव्यूह समान होंगे, यदि इनके संगत घटक भी समान हों।

अर्थात् $k-6 = -4$

$\Rightarrow k = -4+6 = 2$

$\Rightarrow k = 2$

तथा $k+4 = a$

$\Rightarrow a = 2+4 = 6$

$\Rightarrow \boxed{a=6}$ Ans

(4) व्युत्क्रमणीय आव्यूह :

वह वर्ग आव्यूह, जिसके लिए व्युत्क्रम आव्यूह विद्यमान होता है अर्थात् इस वर्ग आव्यूह को सारणिक में बदलने पर सारणिक का मान शून्येतर प्राप्त होता है, व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाता है।

अव्युत्क्रमणीय आव्यूह :

वह वर्ग आव्यूह, जिसके लिए व्युत्क्रम आव्यूह विद्यमान नहीं होता है अर्थात् इस वर्ग आव्यूह को सारणिक में बदलने पर

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या	परीक्षार्थी उत्तर

सारणिक का मान शून्य प्राप्त होता है, अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाता है।

जैसे :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

यहाँ $|A| = 3 - 4 = -1 \neq 0$

अतः A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तथा $A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|}$

विद्यमान है।

तथा यदि

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

यहाँ $|B| = 2 - 2 = 0$

अतः B एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है तथा B^{-1} विद्यमान नहीं है।

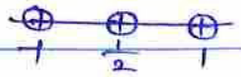
(3) दिया है :-

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

तब $f'(x) = 2x - 1$

अब $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}} \in (-1, 1)$



यहाँ $x = \frac{1}{2}$ चरम मान / क्रांतिक मान है।

अतः दिया गया फलन $f(x)$ वर्धमान होगा, यदि

$f'(x) > 0$

$\Rightarrow 2x - 1 > 0$

$\Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow x \in (\frac{1}{2}, 1)$

BSEB 10/7/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

अतः दिया गया फलन $f(x)$ अंतराल $(\frac{1}{2}, 1)$ में वर्धमान होगा।

⇒ दिया गया फलन ह्रासमान होगा यदि

$f'(x) < 0$

$\Rightarrow 2x - 1 < 0$

$\Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow x \in (-1, \frac{1}{2})$

अतः दिया गया फलन $f(x)$ अंतराल $(-1, \frac{1}{2})$ में ह्रासमान है।

इस प्रकार स्पष्ट है कि दिया गया फलन $f(x)$ अंतराल $(-1, 1)$ में न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान। M.P.V

(6) $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$

$= \int \left(\frac{1}{1+\sin x} \times \frac{1-\sin x}{1-\sin x} \right) dx$

{∵ परिमेयीकरण करने पर}

$= \int \left(\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} \right) dx$ {∵ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$}

$= \int \left(\frac{1-\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$ {∵ $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$}

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

$= \int \sec^2 x \, dx - \int \tan x \sec x \, dx$

$= \tan x - \sec x + C$

BSER-167/2020

अंक द्वारा दत्त अंक	प्रश्न संख्या	परीक्षार्थी उत्तर

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \tan x - \sec x + c} \quad \text{Ans}$$

(7) $(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times (3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(12-16) - \hat{j}(-8-12) + \hat{k}(8+9)$$

$$= \boxed{-4\hat{i} + 20\hat{j} + 17\hat{k}} \quad \text{Ans}$$

(8) दिये गये बिन्दु $A(2,3,4)$, $B(-1,2,-3)$ तथा $C(-4,1,10)$ हैं

तब रेखा AB के दिक्अनुपात = $-1-2, 2-3, -3-4$

$= -3, -1, -7$

व रेखा BC के दिक्अनुपात = $-4+1, 1-2, 10+3$

$= -3, -1, -7$

∴ रेखा AB व BC के दिक्अनुपात समान हैं

अतः $AB \parallel BC$

∴ इन दोनों रेखाओं में बिन्दु B उभयनिष्ठ है।

अतः यह दूसरी एक रेखा ABC का निर्माण करती है।

अतः दिये गये बिन्दु A, B व C परस्पर संरेख हैं।

H.P.

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या

परीक्षार्थी उत्तर

(10) दिया है: $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$

ज्ञात करना है: $P(A \cap B) = ?$

$\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{6}{11} + \frac{5}{11} - \frac{7}{11} = \frac{11-7}{11} = \frac{4}{11}$

$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{4}{11}}$ Ans.

(9) रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल:

दिये गये व्यवरोधों या असमिकाओं से प्राप्त रैखिक प्रोग्रामन के परिबद्ध या अपरिबद्ध क्षेत्र से प्राप्त वह हल, जो उद्देश्य फलन z के अधिकतम व निम्नतम मान के लिए सुसंगत हल होता है, रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सुसंगत हल कहलाता है।

(11) दिया है: फलन f व g दो एकैकी आच्छादक फलन है। तब इनका सं

(12) दिया है:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

BSER-167/2020

शिक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

तब $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ व $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

तब $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+4+9 & 2-6-3 & -3-2+6 \\ 2-6-3 & 4+9+1 & -6+3-2 \\ -3-2+6 & -6+3-2 & 9+1+4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow AA^T = \begin{bmatrix} 14 & -7 & 1 \\ -7 & 14 & -5 \\ 1 & -5 & 14 \end{bmatrix}$ Ans

(13) माना $I = \int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx$

$\Rightarrow I = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx$

प्रथम पद के लिए माना $x^2+3x+1 = t$

$\Rightarrow (2x+3)\,dx = dt$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+3x+1+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}}}\,dx$$

(द्वितीय पद को पूर्ण वर्ग विधि से हल करने पर)

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow I = 2\sqrt{x} + 2\times \log\left|\left(x+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right| + c$$

$x = x^2+3x+1$ रखने पर

$$\Rightarrow \boxed{I = 2\sqrt{x^2+3x+1} + 2\log\left|\left(x+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{x^2+3x+1}\right| + c}$$

Ans

(14) दिया है: $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \cdots \infty}}}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\log x + y}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$y^2 = \log x + y$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y-1) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}}$$

Ans

RSEK-167/2020

शिक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या
	(15)

परीक्षार्थी उत्तर

दिया है: वक्र $2x^2 - y^2 = 14$

माना इस वक्र पर एक बिंदु (x_1, y_1) स्थित है जहाँ से अभिलम्ब गुजरता है।

तब $2x_1^2 - y_1^2 = 14$ — (1)

$\because$ वक्र $2x^2 - y^2 = 14$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर ⇒

$$4x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4x}{2y} = \frac{2x}{y}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \frac{2x_1}{y_1} \quad \text{— (2)}$$

$\because$ अभिलम्ब की प्रवणता = सरल रेखा $x + 3y = 6$ की प्रवणता

$$\Rightarrow \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\frac{2x_1}{y_1}} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x_1}{y_1} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{2x_1 = 3y_1}$$

तब समी (1) से $2\left(\frac{3y_1}{2}\right)^2 - y_1^2 = 14$

$$\Rightarrow \frac{9y_1^2}{2} - y_1^2 = 14$$

$$\Rightarrow 9y_1^2 - 2y_1^2 = 28$$

$$\Rightarrow 7y_1^2 = 28$$

$$\Rightarrow y_1^2 = 4$$

$$\Rightarrow y_1 = \pm 2 \quad \text{तब} \quad x_1 = \pm 3$$

अतः अभिलम्ब बिंदुओं $(3, 2)$ या $(-3, -2)$ से गुजरता है।

BSER-167/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

एक बिन्दु (3,2) से गुजरने वाले व $\frac{1}{3}$ प्रवणता वाले अभिलम्ब का समीकरण :

$(y-2) = \frac{1}{3}(x-3)$

$\Rightarrow 3y-6 = -x+3$

$\Rightarrow x+3y-9=0$

$\Rightarrow \boxed{x+3y=9}$ Ans

तथा बिन्दु $(-3,-y)$ से गुजरने वाले व $\frac{1}{3}$ प्रवणता वाले अभिलम्ब का समीकरण :

$(y+y) = \frac{1}{3}(x+3)$

$\Rightarrow 3y+6 = -x-3$

$\Rightarrow \boxed{x+3y+9=0}$ Ans

RSLLR-16/7/2020

(16)

$\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}x + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(2x) = \frac{\pi}{3}$

$\{\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2\}$

$\Rightarrow \cos^{-1}x + \cos^{-1}2x = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left(x \cdot 2x - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$\{\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})\}$

$\Rightarrow 2x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2x^2 + \frac{1}{2} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

दोनों तरफ वर्ग करने पर ⇒

$$\left(2x^2+\frac{1}{2}\right)^2 = (1-x^2)(1+4x)$$

$$\Rightarrow 4x^4+\frac{1}{4}+2x^2 = 1-4x^2-x^2+4x^3$$

$$\Rightarrow 2x^2+\frac{1}{4} = 1-5x^2$$

$$\Rightarrow 7x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{28}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{28}} = \pm\sqrt{\frac{3}{7\times 4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

परन्तु यहाँ $x \neq -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$

अतः $\boxed{x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}}$ यही समी. का अभीष्ट हल है।

Ans

(17) सिद्ध करना है :-

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

L.H.S. लेने पर =

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

अब क्रिया $R_1 \to \frac{R_1}{a}$, $R_2 \to \frac{R_2}{b}$ व $R_3 \to \frac{R_3}{c}$ से

$$abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right) & \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right) & \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right) \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

RSEB-167/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

{∵ संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से}

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

{∵ संक्रिया $C_1 \to C_1 - C_2$ से}

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+1-\frac{1}{c}\right)$$

{∵ प्रथम स्तम्भ के सापेक्ष प्रसार से}

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = R.H.S$$

"H.P."

(18) दिया है :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ z \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3x+0+3z \\ 2x+y+0 \\ 4x+0+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+2y \\ 1+z \\ 4+3y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+3z = 8+2y \\ 2x+y = 1+z \\ 4x+2z = 4+3y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+3z-2y = 8 \\ 2x+y-z = 1 \\ 4x+2z-3y = 4 \end{cases}$$

BSER-10/2020

परीक्षक द्वारा दत्त अंक	प्रश्न संख्या	परीक्षार्थी उत्तर

आव्यूह सिद्धांत से हल करने के लिए

माना यहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ व $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

अब $AX = B$

$\Rightarrow X = A^{-1}B$ ..... (1)

∴ यहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$|A| = -3 + 16 - 30 = -17$

अब $A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{-17} \begin{bmatrix} -1 & -8 & 10 \\ -5 & -6 & 11 \\ -1 & 9 & 7 \end{bmatrix}^T$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ 10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

अब समी० (1) से →

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{-1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ 10 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{-1}{17} \begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अब तुलना से →

$\boxed{x=1,\ y=2,\ z=3}$ Ans

BSER 16/7/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या	परीक्षार्थी उत्तर

(19) माना $I = \int \cos^{-1}\sqrt{\left(\frac{x}{a+x}\right)}\,dx$

माना $x = a\tan^2\theta$

$\Rightarrow dx = 2a\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$ — (1)

अब $I = \int \cos^{-1}\sqrt{\left(\frac{a\tan^2\theta}{a+a\tan^2\theta}\right)} \times 2a\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

$= 2a\int \cos^{-1}\sqrt{\frac{a\tan^2\theta}{a\sec^2\theta}} \times \tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

$= 2a\int \cos^{-1}(\sin\theta) \times \tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

$= 2a\int \cos^{-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\} \times \tan\theta\sec^2\theta\,d\theta$

$= 2a\int \underset{I}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \times \underset{II}{\tan\theta\sec^2\theta\,d\theta}$

खण्डशः हल करने पर

$I = 2a\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\int \tan\theta\sec^2\theta\,d\theta - \int\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\int \tan\theta\sec^2\theta\,d\theta\right)d\theta\right\}$

$= 2a\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\left(\frac{\tan^2\theta}{2}\right) - \int\left((-1)\cdot\frac{\tan^2\theta}{2}\right)d\theta\right\} + C$

$\left[\because \int \tan\theta\sec^2\theta\,d\theta = \frac{\tan^2\theta}{2} + C\right]$

$= 2a\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\left(\frac{\tan^2\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}\int(\tan^2\theta - 0)\right\} + C$

$\left[\because \int \tan^2\theta\,d\theta = \int(\sec^2\theta - 1)\,d\theta = \tan\theta - \theta + C\right]$

$= \cancel{2}a\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\left(\frac{\tan^2\theta}{2}\right) + \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}}(\tan\theta - \theta) + C$

परीक्षक द्वारा दत्त अंक	प्रश्न संख्या	परीक्षार्थी उत्तर

समी ① से $y^2 = 4ax \tan^2\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$ रखने पर

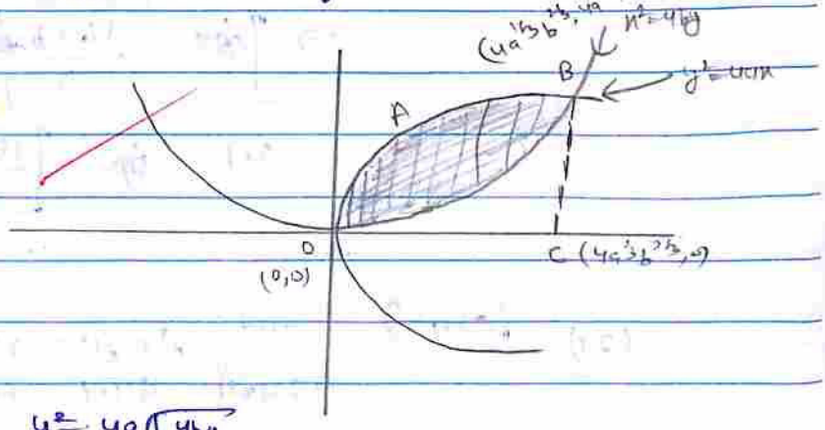
$$I = \int_0^a \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\right) dx + \int_a^{9a} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2}x - x\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{ax} - a\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi x}{2} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}(x+a) + \sqrt{ax} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{2}\cdot x - (x+a)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{ax} + C}$$ Ans

(24) दिया है: परवलयों $y^2 = 4ax$ व $x^2 = 4by$ के मध्यवर्ती क्षेत्र।



∵ परवलय (I) $y^2 = 4ax$ — ①

परवलय (II) $x^2 = 4by$ — ②

तब समी० ① व ② से ⇒

$$y^2 = 4a\sqrt{4by}$$

$$\Rightarrow y^2 = 8a\,b^{1/2}y^{1/2}$$

$$\Rightarrow y^{3/2} = 8ab^{1/2}$$

$$\Rightarrow y = 4a^{2/3}b^{1/3}$$ तब $x^2 = 4b \times 4a^{2/3}b^{1/3}$

$$\Rightarrow x = 4a^{1/3}b^{2/3}$$

अतः बिन्दु $B(4a^{1/3}b^{1/3}, 4a^{2/3}b^{1/3})$ व बिन्दु $C(4a^{1/3}b^{2/3}, 0)$ प्राप्त हुआ।

अतः अभीष्ट क्षेत्रफल = आकृति OABO का क्षे०

$$= \int_0^{4a^{1/3}b^{2/3}} y_I\,dx - \int_0^{4a^{1/3}b^{2/3}} y_{II}\,dx$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$= \sqrt{4a} \int_0^{4a^{1/3}b^{2/3}} x^{1/2}\,dx - \frac{1}{4b}\int_0^{4a^{1/3}b^{2/3}} x^2\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{4a}\times 2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^{4a^{1/3}b^{2/3}} - \frac{1}{4b}\times\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^{4a^{1/3}b^{4/3}}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3}\left[8a^{1/2}b\right] - \frac{1}{12b}\left[64ab^2\right]$$

$$= \frac{32ab}{3} - \frac{64ab^2}{12b}$$

$$= \frac{128ab}{12} - \frac{64ab}{12} = \frac{64ab}{12_3}$$

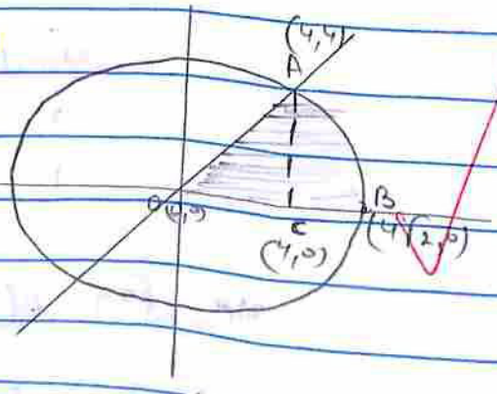
$$\Rightarrow \boxed{\frac{16ab}{3}} \text{ Ans}$$

या क्षे॰ = $\boxed{\frac{16ab}{3} \text{ वर्ग इकाई}}$ Ans

(21) दिया है:- वृत्त $x^2+y^2=32$ व रेखा $y=x$ व x-अक्ष के मध्यवर्ती प्रथम चतुर्थांश में क्षेत्र।

∵ वृत्त $x^2+y^2=(4\sqrt{2})^2$ → (1)

व रेखा $y=x$ → (2)



समी॰ (1) व (2) से →

$x^2+x^2=(4\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow 2x^2=(4\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow x=4$ व $y=4$

अतः बिंदु A(4,4) व बिंदु (4,0) प्राप्त हुआ।

BSER-16/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या	परीक्षार्थी उत्तर

तब अभीष्ट क्षेत्रफल = आकृति OABCO का क्षे०

$$= \int_0^4 y_{y=x}\,dx + \int_4^{4\sqrt{2}} y_{x^2+y^2=(4\sqrt{2})^2}\,dx$$

$$= \int_0^4 x\,dx + \int_4^{4\sqrt{2}} \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^4 + \left[\frac{x}{2}\sqrt{32-x^2} + 16\sin^{-1}\left(\frac{x}{4\sqrt{2}}\right)\right]_4^{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}[16-0] + \left[2\sqrt{2}\times 0 + 16\times\frac{\pi}{2} - 2\times 4 - 16\times\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 8 + [0 + 8\pi - 8 - 4\pi]$$

$$= 8 + 4\pi - 8 = 4\pi \text{ वर्ग इकाई}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = 4\pi \text{ वर्ग इकाई}}$$ Ans

(22) $\frac{dy}{dx} + (2x\tan^{-1}y - x^3)(1+y^2) = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx} + (2x\tan^{-1}y - x^3) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx} + 2x\tan^{-1}y = x^3$$

यहाँ माना $\tan^{-1}y = v$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

तो $\frac{dv}{dx} + 2xv = x^3$

इस रैखिक की तुलना व्यापक रैखिक $\frac{dv}{dx} + Pv = Q$ से करने पर

$P = 2x$, $Q = x^3$

तो समाकलन गुणक $IF = e^{\int P\,dx} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$

$$\Rightarrow \boxed{IF = e^{x^2}}$$

USER-167/2020

अब बरनूली प्रमेय से

$\because$ Sol $= \int Q \cdot P \, dx + C$

$\Rightarrow v \cdot e^{x^2} = \int x^3 \cdot e^{x^2} dx + C$

माना $e^{x^2} = t$

$\Rightarrow x e^{x^2} 2x dx = dt$

$\Rightarrow x e^{x^2} dx = \frac{dt}{2}$

तब $v \cdot t = \frac{1}{2} \int \log t \cdot dt + C$

$\Rightarrow v \cdot t = \frac{1}{2} [t \log t - t] + C$ (खण्डशः समाकलन करने पर)

$\Rightarrow v = \frac{1}{2} [\log t - 1] + \frac{C}{t}$

$\Rightarrow \tan^{-1} y = \frac{1}{2} [\log e^{x^2} - 1] + \frac{C}{e^{x^2}}$ ($\because x = \tan^{-1} y$)

$\Rightarrow \boxed{\tan^{-1} y = \frac{1}{2} [x^2 - 1] + C e^{-x^2}}$ Ans

(23) $(1+y^2) + (x - e^{\tan^{-1} y}) \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow (x - e^{\tan^{-1} y}) \frac{dy}{dx} = -(1+y^2)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(1+y^2)}{x - e^{\tan^{-1} y}}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-(x - e^{\tan^{-1} y})}{1+y^2}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{e^{\tan^{-1} y}}{1+y^2}$

यहाँ बरनूली समी. $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ से तुलना से

$P = \frac{1}{1+y^2}, \quad Q = \frac{e^{\tan^{-1} y}}{1+y^2}$

तब समाकलन गुणक $IF = e^{\int P dy}$

$\Rightarrow IF = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$

$\Rightarrow \boxed{IF = e^{\tan^{-1} y}}$

USER-16/7/2020

द्वारा अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

अब वरतूली प्रमेय से,

$x \cdot IF = \int Q \cdot IF \, dy + c$

$\Rightarrow x \cdot e^{\tan^{-1}y} = \int \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2} \cdot e^{\tan^{-1}y} \, dy + c$

माना $e^{\tan^{-1}y} = t$

$\Rightarrow \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2} dy = dt$

$\Rightarrow x \cdot t = \int t \, dt + c$

$\Rightarrow x t = \frac{t^2}{2} + c$

$\Rightarrow x = \frac{t}{2} + \frac{c}{t}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{e^{\tan^{-1}y}}{2} + ce^{-\tan^{-1}y}}$ Ans

(26) दिया है: फलन $f(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3|$

या फलन $f(x) =$

(28) (i) $[\vec{a}+\vec{b} \quad \vec{b}+\vec{c} \quad \vec{c}+\vec{a}]$

$= (\vec{a}+\vec{b}) \cdot \{(\vec{b}+\vec{c}) \times (\vec{c}+\vec{a})\}$ $\quad [\because [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]$

$= (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a})$

$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + 0 + \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \quad \{\because \vec{a} \times \vec{a} = 0\}$
$+ \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + 0 + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

$= [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] + [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{a}] + [\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{a}] + [\vec{b}\,\vec{b}\,\vec{c}]$
$+ [\vec{b}\,\vec{b}\,\vec{a}] + [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}]$

$= [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] + 0 + 0 + 0 + 0 + [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ $\quad [\because (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ यदि सदिश निष्क्रम]

$= [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] + [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

$= 2[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = R.H.S$ Hence Proved

(ii) $[(\vec{a}\times\vec{b})\ (\vec{b}\times\vec{c})\ (\vec{c}\times\vec{a})]$

$= (\vec{a}\times\vec{b}).\{(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})\}$

$= (\vec{a}\times\vec{b}).\{\vec{p}\times(\vec{c}\times\vec{a})\}$ माना $\vec{p}=\vec{b}\times\vec{c}$

$= (\vec{a}\times\vec{b}).\{(\vec{p}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{p}\cdot\vec{c})\vec{a}\}$ {सदिश त्रिक गुणनफल से}

$= (\vec{a}\times\vec{b}).\{[(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}]\vec{c}-[(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}]\vec{a}\}$

$= (\vec{a}\times\vec{b}).\{[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]\vec{c}-[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{c}]\vec{a}\}$

$= (\vec{a}\times\vec{b}).\{[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\vec{c}-0\}$ {$\because [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{c}]=0$}

$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\ [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]^2$ = R.H.S. "सिद्ध"

USER-167/2020

(29) माना रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी d है

तब

$d = \dfrac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}$

$\Rightarrow d = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-3 & 3-4 & 1-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(7)^2+(1)^2+(7)^2}}$

{$\because x_1=3, y_1=4, z_1=1, x_2=1, y_2=3, z_2=1$
$a_1=2, b_1=1, c_1=3, a_2=1, b_2=3, c_2=2$}

$\Rightarrow d = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{49+1+49}}$

$\Rightarrow d = \left| \frac{-22+8+14}{\sqrt{17}} \right| = \left| \frac{-7}{\sqrt{19 \times 9}} \right|$

$\Rightarrow \boxed{d = \frac{7}{3\sqrt{19}} \text{ इकाई}}$

(ii) माना रेखाओं के लघु की न्यूनतम दूरी d है।

तब $d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right|$

$\because \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = (3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k})$

$= 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

व $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$

तब $\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= -9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}$

तब $d = \left| \frac{-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}}{\sqrt{4+9+36}} \right| = \left| \frac{\sqrt{81+196+16}}{\sqrt{49}} \right|$

$= \frac{\sqrt{293}}{7} \Rightarrow \boxed{d = \frac{\sqrt{293}}{7} \text{ इकाई}}$

(20) माना घटना E_1: पासे पर वास्तव में 1 आना

व E_2: पासे पर वास्तव में 1 न आना

तथा घटना E: व्यक्ति द्वारा "पासे पर 1 आना" कहना

तब $P(E_1) = \frac{1}{6}$, $P(E_2) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

व $P\left(\frac{E}{E_1}\right) = P$(पासे पर 1 आता है तो व्यक्ति द्वारा यही बताना)

$= \frac{3}{5}$

व $P\left(\frac{E}{E_2}\right) = P$(पासे पर 1 नहीं आता है तो व्यक्ति द्वारा सही नहीं बताना) $= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

BSER-167/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या	परीक्षार्थी उत्तर

ज्ञात करना है $P\left(\frac{E_1}{E}\right)$ ✓

तब बेज प्रमेय से $P\left(\frac{E_1}{E}\right) = \frac{P(E_1) \cdot P(E|E_1)}{P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_2) \cdot P(E|E_2)}$ ✓

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{5}}{\frac{1}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5}}$$ ✓

$$= \frac{3}{3+10} = \frac{3}{13}$$ ✓

$\Rightarrow$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{3}{13}$ ✓

(27) सिद्ध करना है: $I = \int_0^{\pi} \log_e(1+\cos x)\,dx = \pi \log_e\left(\frac{1}{2}\right)$

L.H.S. से लेने पर $I = \int_0^{\pi} \log_e(1+\cos x)\,dx$ — (1)

गुणधर्म (IV) से $I = \int_0^{\pi} \log_e(1-\cos x)\,dx$ — (2)

अब समी. (1) व (2) से

$2I = \int_0^{\pi} \log_e(1-\cos^2 x)\,dx$ ✓

$\Rightarrow 2I = 2\int_0^{\pi} \log_e \sin x\,dx$ ✓

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \log_e \sin x\,dx$ — (3) ✓

$\Rightarrow I = \phi \int_0^{\pi/2} \log_e \sin x\,dx$ — (4)

BSEK-167/2023

$\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx$ यदि $f(2a-x) = f(x)$

सूत्र प्रयोग (IV) से $\Rightarrow I = 2\int_0^{\pi/2} \log_e \sin x\, dx$ — (5)

समी. (4) व (5) से

$2I = 2\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{2\sin x \cos x}{2}\right) dx$

$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x\, dx - \int_0^{\pi/2} \log 2\, dx$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \times I - \frac{\pi}{2}\log 2$

$\Rightarrow \frac{I}{2} = -\frac{\pi}{2}\log 2$

$\Rightarrow \boxed{I = -\pi \log_e\left(\frac{1}{2}\right) = \text{R.H.S.}}$ Hence Proved

यदि $2t = x$
$\Rightarrow dx = 2dt$
जब $x = 0$ तब $t = 0$
जब $x = \pi$ तब $t = \frac{\pi}{2}$

$\left[\because \text{सूत्र (I) से } \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt\right]$

[∵ समी. (3) से]

(26) दिया है : फलन $f(x) = |x-1| + 2|x-2| + 3|x-3|$

तथा

फलन $f(x) = \begin{cases} 14 - 6x & ; x \le 1 \\ 12 - 4x & ; 1 < x \le 2 \\ 4 & ; 2 < x \le 3 \\ 6x - 14 & ; x > 3 \end{cases}$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या

परीक्षार्थी उत्तर

$x=2$ पर अवकलनीयता :-

$x=2$ पर बायाँ अवकलज $f'(2-0) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\right\}$

$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{3(2-h)+4-6}{-h}\right\}$

$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{6-3h+4-6}{-h}\right\} = 3$

$x=2$ पर दायाँ अवकलज $f'(2+0) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right\}$

$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{4-4}{h}\right) = 0$

$\therefore f'(2-0) \neq f'(2+0)$

अतः $x=2$ पर फलन अवकलनीय ~~है~~ नहीं है।

$x=1$ पर अवकलनीयता :-

$x=1$ पर बायाँ अवकलज $f'(1-0) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$

$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{4-3(1-h)-1}{-h}\right)$

$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{4-3+3h-1}{-h}\right) = -3$

$x=1$ पर दायाँ अवकलज $f'(1+0) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{+h}\right\}$

$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{4-3(1+h)-1}{h}\right\}$

$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{4-3-3h-1}{h}\right\} = -3$

$\therefore f'(1-0) = f'(1+0)$

ISSER-167/2020

अत: $x=1$ पर भी दिया गया फलन अवकलनीय नहीं है

$x=3$ पर अवकलनीयता :

बाँया पक्ष, $f(3-0) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{4-4}{h}\right) = 0$

व $f'(3+0) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{4(3+h)-14-4}{h}\right)$

$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{12+4h-14-4}{h}\right) = 4$

$\therefore f'(3-0) \neq f'(3+0)$

अत: दिया गया फलन $x=3$ पर अवकलनीय नहीं है

$x=1$ पर संतता :

$\therefore f(1) = 14-4(1) = 14-4 = 8$

व $f(1-0) = \lim_{h\to 0} f(1-h) = \lim_{h\to 0} (14-4(1-h)) = 8$

$f(1+0) = \lim_{h\to 0} f(1+h) = \lim_{h\to 0} (12-4+4h) = 8$

अतः $x=1$ पर फलन संतत है

$x=2$ पर संतता :

$\therefore f(2) = 12-4(2) = 4$

$f(2-0) = \lim_{h\to 0} f(2-h) = \lim_{h\to 0} (12-8+4h) = 4$

$f(2+0) = \lim_{h\to 0} f(2+h) = \lim_{h\to 0} (4) = 4$

अत: $x=2$ पर फलन संतत है

BSER 16/1/2020

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या

परीक्षार्थी उत्तर

$x=3$ पर संततता :

$f(3) = 4$

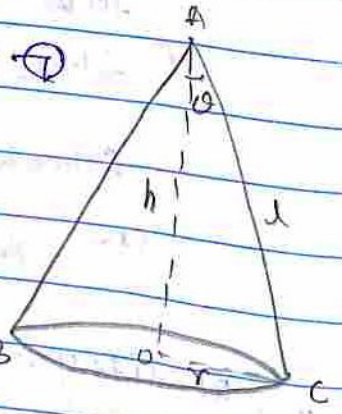
$f(3-0) = \lim_{h \to 0} f(3-h) = 4$

$f(3+0) = \lim_{h \to 0} [18+3h-14] = 4$

अतः $x=3$ पर दिया गया फलन संतत है।

(24) सिद्ध करना है: शीर्ष की तिर्यक ऊँचाई और संलग्न आयतन वाले शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होगा है।

माना इस शंकु की तिर्यक ऊँचाई l, आयतन V, त्रिज्या r, ऊँचाई h, अर्धशीर्ष कोण θ है।



तब शंकु का आयतन $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ — (1)

समकोण $\triangle AOC$ में

$\sin\theta = \frac{r}{l}$

$\Rightarrow r = l\sin\theta$ — (2)

तथा $\cos\theta = \frac{h}{l}$

$\Rightarrow h = l\cos\theta$ — (3)

समी० (1) में समी० (2) व (3) से

$V = \frac{1}{3}\pi (l\sin\theta)^2 (l\cos\theta)$

$\Rightarrow V = \frac{\pi l^3}{3}\sin^2\theta\cos\theta$ — (4)

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\pi l^3}{3}\left[-\sin^3\theta + 2\cos^2\theta\sin\theta\right] \quad \text{---(8)}$$

पुनः θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\pi l^3}{3}\left[-3\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos^3\theta - 4\cos\theta\sin^2\theta\right] \quad \text{---(9)}$$

अब यदि (8) से: $\frac{dV}{d\theta} = 0$

$\Rightarrow \sin\theta\left[2\cos\theta - \sin^2\theta\right] = 0$

$\Rightarrow \sin\theta\left[2 - 2\sin^2\theta - \sin^2\theta\right] = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = 0$ या $\sin^2\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

अब $\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ तब $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

अतः $\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\pi l^3}{3}\left[-3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\times\frac{1}{3\sqrt{3}} - 4\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{3}\right]$

$\Rightarrow \frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\pi l^3}{3}\left[\frac{-6}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}}\right]$

$\Rightarrow \frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\pi l^3}{3}\left(\frac{-12}{3\sqrt{3}}\right) < 0$

अतः इस कोण का आयतन महत्तम होगा।

तथा चूँकि $\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ व $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

तब $\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\sqrt{2})$

अतः इस प्रकार स्पष्ट है कि दीवार तथा कैंची और महत्तम आयतन वाले कोण का अभिलक्षण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ होगा है।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

(11) दिया है: फलन f व g दो एकैकी आच्छादक फलन हैं तब इनके संयुक्त फलन gof व fog भी एकैकी आच्छादक होंगे।

अतः f^{-1}, g^{-1} व $(gof)^{-1}$ विद्यमान होगा।

सिद्ध करना है: $f^{-1}og^{-1} = (gof)^{-1}$

माना फलन $f(x) = 2x$ व फलन $g(x) = x+1$

तब $gof(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x+1$

$f(x) = 2x$ तब $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

व $g(x) = x-1$ तब $g^{-1}(x) = x$

तथा $(gof)(x) = 2x+1$ तब $(gof)^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

$\therefore f^{-1}og^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

$\therefore \boxed{f^{-1}og^{-1}(x) = (gof)^{-1}(x)}$ सि.प्र.

(25) अधिकतम $Z = 2x+3y$

प्रतिबन्ध $4x+6y \leq 60$

$2x+y \leq 20$

तथा $x \geq 0, y \geq 0$

अब इनके समी० रूप $\rightarrow$ $4x+6y = 60$ — (1)

व $2x+y = 20$ — (2)

$\therefore$ बहुभुज $4x+6y \leq 60$ के लिए:

समी० रूप $\rightarrow$ $4x+6y = 60$

x	0	15
y	10	0

BSER-167/2020

BSER/16.00.000/2020

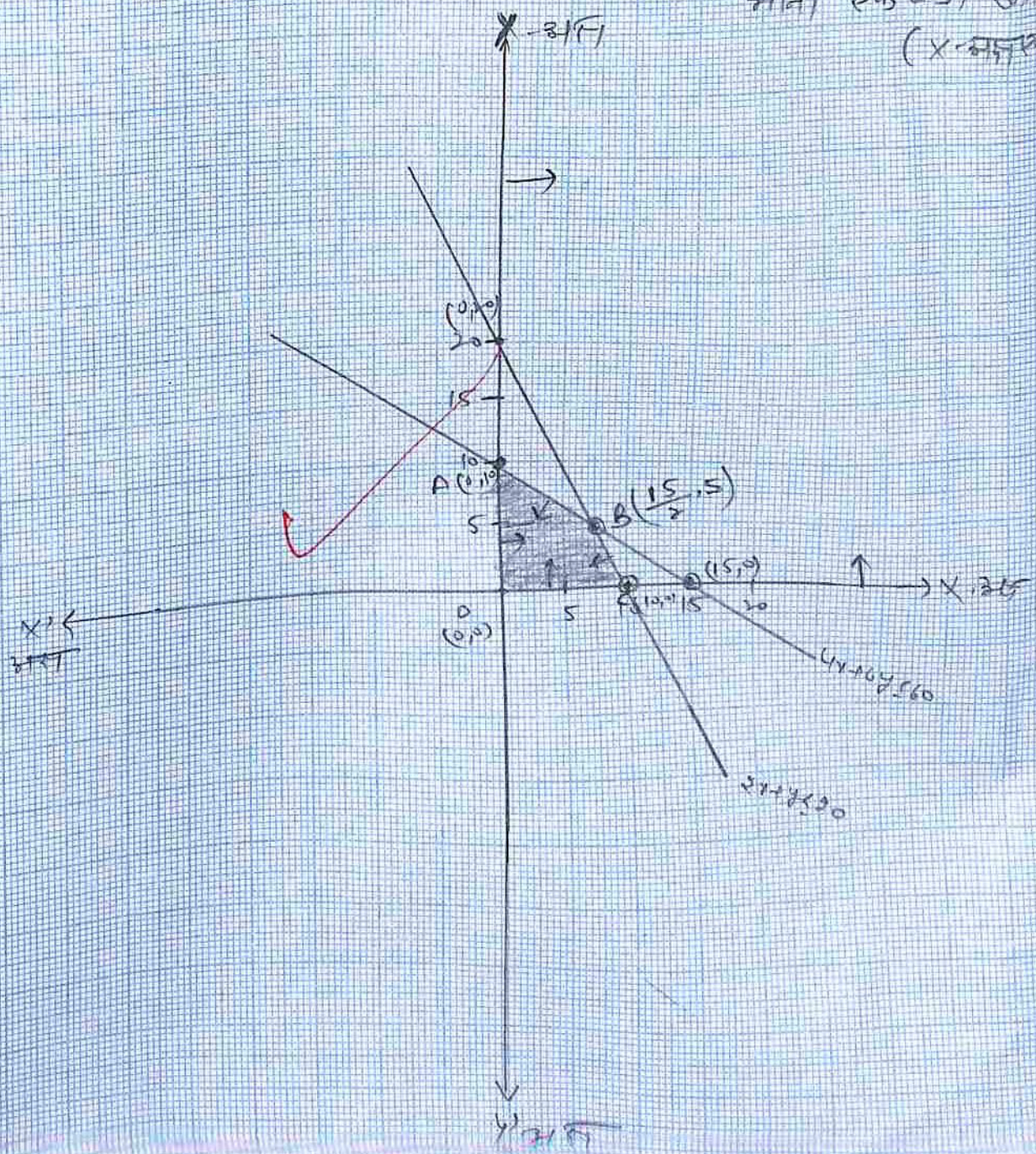
माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान

परीक्षा 2020

नामांक (अंको में) [ ] (शब्दों में) ६

विषय गणित

नोट : परीक्षार्थी अनिवार्य रूप से इस ग्राफ कागज को अपनी उत्तर पुस्तिका [illegible] से बान्धकर [illegible] ग्राफ कागज उत्तर पुस्तिका के साथ नहीं मिलने पर परीक्षार्थी दण्ड का भागी होगा।



प्रश्न संख्या

परीक्षार्थी उत्तर

मूल बिंदु (0,0) प्रतिस्थापित करने पर
$0 \leq 60$, (जो कि सत्य है)
अतः इसका हल क्षेत्र मूल बिंदु की ओर होगा।

* असमिका $2x+y \leq 20$ लेते हैं
समी० रूप में $2x+y=20$

x	0	10
y	20	0

मूल बिंदु (0,0) प्रतिस्थापित करने पर
$0 \leq 20$, (जो कि सत्य है)
अतः इसका हल बिंदु मूल बिंदु की ओर होगा।
तथा $x \geq 0$, $y \geq 0$ का हल क्षेत्र प्रथम पाद में होगा।

समी० ① व ② से $4x+6y=60$
$4x+2y=40$
$4y=20 \Rightarrow y=5$ तब $x=\frac{15}{2}$

अतः अभीष्ट उद्देश्य फलन सारणी है

बिंदु	x निर्देशांक	y निर्देशांक	और फलन $z=3x+y$
O	0	0	$z=0$
A	0	10	$z=30$
B	$\frac{15}{2}$	5	$z=15+15=30$
C	10	0	$z=30$

इस प्रकार प्राप्त उद्देश्य फलन सारणी से स्पष्ट होता है कि जिसमें उद्देश्य फलन z का अधिकतम मान 30, बिंदु (0,10) व $(\frac{15}{2},5)$ को मिलाने वाली रेखा के प्रत्येक बिंदु पर प्राप्त होगा है।

समाप्त