This Question Paper consists of 33 questions and 12 printed pages.

इस प्रश्न-पत्र में 33 प्रश्न तथा 12 मुद्रित पृष्ठ हैं।

Roll No. अनुक्रमांक | | | | | | | | | | | | |

18467

MATHEMATICS
(गणित)
(311)

Code No. कोड नं. 57/HIS/1

SET/सेट A

Day and Date of Examination .....

(परीक्षा का दिन व दिनांक)

Signature of Invigilators 1. .....

(निरीक्षकों के हस्ताक्षर)

2. .....

General Instructions :

1. Candidate must write his/her Roll Number on the first page of the Question Paper.
2. Please check the Question Paper to verify that the total pages and total number of questions contained in the Question Paper are the same as those printed on the top of the first page. Also check to see that the questions are in sequential order.
3. Making any identification mark in the Answer-Book or writing Roll Number anywhere other than the specified places will lead to disqualification of the candidate.
4. Write your Question Paper Code No. 57/HIS/1, Set A on the Answer-Book.
5. (a) The Question Paper is in English/Hindi medium only. However, if you wish, you can answer in any one of the languages listed below :

   English, Hindi, Urdu, Punjabi, Bengali, Tamil, Malayalam, Kannada, Telugu, Marathi, Oriya, Gujarati, Konkani, Manipuri, Assamese, Nepali, Kashmiri, Sanskrit and Sindhi.

   You are required to indicate the language you have chosen to answer in the box provided in the answer-book.

   (b) If you choose to write the answer in the language other than Hindi and English, the responsibility for any errors/mistakes in understanding the question will be yours only.

सामान्य अनुदेश :

1. परीक्षार्थी प्रश्न-पत्र के पहले पृष्ठ पर अपना अनुक्रमांक अवश्य लिखें ।
2. कृपया प्रश्न-पत्र को जाँच लें कि प्रश्न-पत्र के कुल पृष्ठों तथा प्रश्नों की उतनी ही संख्या है जितनी प्रथम पृष्ठ के सबसे ऊपर छपी है । इस बात की जाँच भी कर लें कि प्रश्न क्रमिक रूप में हैं ।
3. उत्तर-पुस्तिका में पहचान-चिह्न बनाने अथवा निर्दिष्ट स्थानों के अतिरिक्त कहीं भी अनुक्रमांक लिखने पर परीक्षार्थी को अयोग्य ठहराया जायेगा ।
4. अपनी उत्तर-पुस्तिका पर प्रश्न-पत्र की कोड संख्या **57/HIS/1, सेट** **A** लिखें ।
5. (क) प्रश्न-पत्र केवल हिंदी/अंग्रेजी माध्यम में है । फिर भी, यदि आप चाहें तो नीचे दी गई किसी एक भाषा में उत्तर दे सकते हैं :

   अंग्रेजी, हिंदी, उर्दू, पंजाबी, बंगला, तमिल, मलयालम, कन्नड़, तेलुगु, मराठी, उड़िया, गुजराती, कोंकणी, मणिपुरी, असमिया, नेपाली, कश्मीरी, संस्कृत और सिंधी ।

   कृपया उत्तर-पुस्तिका में दिए गए बॉक्स में लिखें कि आप किस भाषा में उत्तर लिख रहे हैं ।

   (ख) यदि आप हिंदी एवं अंग्रेजी के अतिरिक्त किसी अन्य भाषा में उत्तर लिखते हैं, तो प्रश्न को समझने में होने वाली त्रुटियों / गलतियों की जिम्मेदारी केवल आपकी होगी ।

MATHEMATICS
(गणित)
(311)

Time : **3** Hours] [Maximum Marks : **100**
समय : **3** घण्टे] [पूर्णांक : **100**

Note : (1) This question paper consists of four **Sections** A, B, C and D containing 33 questions.

(2) Question Number **1** to **10** in **Section A** are multiple choice questions (MCQ). Each question carries **one** mark. In each question there are four choices **(A), (B), (C)** and **(D)** of which only one is correct. You have to select the correct choice and indicate it in your answer book by writing **(A), (B), (C)** or **(D)** as the case may be. No separate time is allotted for attempting MCQ.

(3) Question Number **11** to **16** in **Section B** are very short answer questions and carry **2 marks** each.

(4) Question Number **17** to **28** in **Section C** are short answer questions and carry **4 marks** each.

(5) Question Number **29** to **33** in **Section D** are long answer questions and carry **6 marks** each.

(6) All questions are **compulsory.** There is no overall choice, however, alternative choices are given in some questions. In such questions, you have to attempt only one choice.

निर्देश : (1) इस प्रश्न-पत्र में कुल **33** प्रश्न हैं, जो चार खण्डों अ, ब, स तथा द में विभाजित है ।

(2) **खण्ड-अ** में प्रश्न संख्या **1** से **10** तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के लिए **1** अंक निर्धारित है । प्रत्येक प्रश्न के उत्तर के रूप में **(A), (B), (C)** तथा **(D)** चार विकल्प दिए गए हैं जिनमें से कोई एक सही है । आपको सही विकल्प चुनना है तथा अपनी पुस्तिका में **(A), (B), (C)** तथा **(D)** में जो सही हो उत्तर के रूप में लिखना है । बहुविकल्पीय प्रश्न हल करने के लिए अलग से समय नहीं दिया गया है ।

(3) **खण्ड-ब** में प्रश्न संख्या **11** से **16** तक अति लघुउत्तरीय प्रश्न है तथा प्रत्येक के **2** अंक निर्धारित हैं ।

(4) **खण्ड-स** में प्रश्न संख्या **17** से **28** तक लघुउत्तरीय प्रश्न है तथा प्रत्येक के **4** अंक निर्धारित हैं ।

(5) **खण्ड-द** में प्रश्न संख्या **29** से **33** तक दीर्घ लघुउत्तरीय प्रश्न है तथा प्रत्येक के **6** अंक निर्धारित हैं ।

(6) सभी प्रश्न **अनिवार्य** हैं । पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं, फिर भी कुछ प्रश्नों में, आंतरिक विकल्प हैं । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना हैं ।

Section – A

खण्ड–अ

1. The order of the matrix $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ is 1

(A) 2×2 (B) 3×1

(C) 1×3 (D) 2×3

आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ की कोटि है :

(A) 2×2 (B) 3×1

(C) 1×3 (D) 2×3

2. The principal value of $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ is 1

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान है :

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

3. The equation of a plane whose intercepts on the co-ordinate axes are 2, 3 and 4 is 1

(A) $6x + 4y + 3z = 12$ (B) $x + y + 2z = 1$

(C) $x + 2y + 3z = 2$ (D) $x + y + z = 12$

उस समतल, जिसके x, y और z अक्षों पर काटे गए अन्तःखण्डों की लम्बाइयाँ क्रमशः 2, 3 और 4 हैं, का समीकरण होगा :

(A) $6x + 4y + 3z = 12$ (B) $x + y + 2z = 1$

(C) $x + 2y + 3z = 2$ (D) $x + y + z = 12$

4. Which of the following sentence are statements ? 1

(A) Every set is a finite set (B) 12 is less than 16

(C) $x + 5 = 11$ (D) Are you going to Agra ?

निम्न वाक्यों में से कौन सा कथन है ?

(A) प्रत्येक समुच्चय परिमित होता है। (B) 12, 16 से कम है।

(C) $x + 5 = 11$ (D) क्या आप आगरा जा रहे हैं ?

5. Let * be the binary operation defined on Q^+ by $a * b = \frac{ab}{3}$ for all $a, b \in Q^+$. Then, identity element on Q^+ is 1

(A) 1 (B) 3

(C) 9 (D) 0

माना Q^+ पर एक द्विआधारी संक्रिया इस प्रकार परिभाषित की जाती है सभी $a, b \in Q^+$ के लिए $a * b = \frac{ab}{3}$ हो, तो Q^+ का तत्समक अवयव है :

(A) 1 (B) 3

(C) 9 (D) 0

6. A function $f : R \to R$ defined by $f(x) = x^2 + 3$ is 1

(A) one-one but not onto (B) onto but not one-one

(C) one-one and onto (D) neither one-one nor onto

एक फलन $f : R \to R$, जो $f(x) = x^2 + 3$ द्वारा परिभाषित है,

(A) एकैकी परन्तु आच्छादक नहीं है। (B) आच्छादक परन्तु एकैकी नहीं है।

(C) एकैकी तथा आच्छादक है। (D) न तो एकैकी और न ही आच्छादक है।

7. If $y = \cos 5x$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to 1

(A) $\sin 5x$ (B) $-5 \sin 5x$

(C) $5 \sin 5x$ (D) $5 \cos 5x$

यदि $y = \cos 5x$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ होगा :

(A) $\sin 5x$ (B) $-5 \sin 5x$

(C) $5 \sin 5x$ (D) $5 \cos 5x$

8. If $\int 4^x dx = K$, then K equal to 1

(A) $\frac{4^x}{\log 4}$ (B) $\frac{4^x}{\log_e 4} + c$

(C) $4^x \log 4$ (D) $4^x \log 4 + c$

यदि $\int 4^x \, dx = K$ है, तो K का मान होगा :

(A) $\frac{4^x}{\log 4}$ (B) $\frac{4^x}{\log_e 4} + c$

(C) $4^x \log 4$ (D) $4^x \log 4 + c$

9. The value of $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ is 1

(A) 0 (B) 1

(C) -1 (D) 1/2

$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ का मान होगा :

(A) 0 (B) 1

(C) -1 (D) $\frac{1}{2}$

10. The degree of the differential equation $\left(\frac{dx}{dt}\right)^4 + 3x\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ is 1

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) 4

निम्न अवकल समीकरण की घात है : $\left(\frac{dx}{dt}\right)^4 + 3x\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) 4

Section – B

खण्ड–ब

11. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ and $A + B = 0$; then find B. 2

OR

If the element in the i^{th} row and j^{th} column of a 2×3 matrix A is given by $\frac{i + 2j}{2}$, write the matrix A.

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ तथा $A + B = 0$ हो, तो आव्यूह B ज्ञात कीजिए।

अथवा

यदि एक 2×3 आव्यूह A की i वी पंक्ति तथा j वे स्तंभ का अवयव $\frac{i + 2j}{2}$ हो, तो आव्यूह A लिखिए।

12. Prove that the function $f : R \to R$ defined by $f(x) = 4 + 3x$ is one-to-one and onto. 2

सिद्ध कीजिए कि फलन $f : R \to R$ जो $f(x) = 4 + 3x$ द्वारा परिभाषित है एक एकैकी व आच्छादक फलन है।

13. Evaluate : 2

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

मान ज्ञात कीजिए : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

14. Find $\frac{dy}{dx}$, if $y = e^{x \cos x}$ 2

यदि $y = e^{x \cos x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

15. Find a unit vector in the direction of $2\vec{a} + 3\vec{b}$ where $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$. 2

$2\vec{a} + 3\vec{b}$ की दिशा में एकक सदिश ज्ञात कीजिए, जबकि $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$.

16. Write the component statements of the following compound statement : 2

"All rational numbers are real and all real numbers are complex."

निम्न मिश्र कथन के घटक कथन लिखिए :

"सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ हैं और सभी वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याएँ हैं।"

Section – C

खण्ड–स

17. Find the value of x for which the matrix A is singular. 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय है :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

18. Find the area of the parallelogram having A(5, –1, 1), B (–1, –3, 4), C(1, –6, 10), D(7, –4, 7) as its vertices. 4

एक ऐसे समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A(5, –1, 1), B (–1, –3, 4), C(1, –6, 10) तथा D(7, – 4, 7) हैं।

19. Using properties of determinant, prove the following : 4

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)$$

OR

Given $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, show that $|A| = |A'|$ where A' denotes the transpose of the matrix A.

सारणिक के गुणों का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)$$

अथवा

दिया है $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, दर्शाइए कि $|A| = |A'|$ जहाँ A' आव्यूह A का परिवर्त प्रदर्शित करता है।

20. Prove that $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ 4

सिद्ध कीजिए कि : $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

21. Let $f : R \to R$ be defined as $f(x) = x^3$, and $g : R - \{0\} \to R - \{0\}$ as $g(x) = \frac{1}{x}$. Then find fog and gof. 4

फलन $f : R \to R$, $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित है तथा $g : R - \{0\} \to R - \{0\}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित है। fog तथा gof ज्ञात कीजिए।

22. If $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ 4

Show that whether $f(x)$ is continuous at $x = 0$ or not.

यदि $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ हो, तो ज्ञात कीजिए कि क्या फलन f, $x = 0$ पर सतत् है या नहीं।

23. Find $\frac{dy}{dx}$, if $y = e^{x^2} + 2\sin x - \frac{5}{3}e^x + 2e$. 4

यदि $y = e^{x^2} + 2\sin x - \frac{5}{3}e^x + 2e$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

24. Find the interval in which $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ is increasing or decreasing. 4

OR

The slope of the curve $6y^3 = px^2 + q$ at $(2, -2)$ is $\frac{1}{6}$. Find the values of p and q.

वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ ह्रासमान या वर्धमान है।

अथवा

वक्र $6y^3 = px^2 + q$ के बिंदु $(2, -2)$ पर स्पर्श-रेखा की प्रवणता $\frac{1}{6}$ है। p तथा q के मान ज्ञात कीजिए।

25. Evaluate : $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx$ 4

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx$

26. Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^{x} + e^{-x}}$. 4

अवकल समीकरण हल कीजिए : $\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x} + 3e^{4x}}{e^{x} + e^{-x}}$

27. Using cross product, find the angle between the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$. 4

सदिश गुणनफल के प्रयोग से, सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

28. Evaluate : $\int \frac{dx}{x(1-2x)}$ 4

OR

Evaluate : $\int \frac{dx}{\sqrt{2^2 + x^2}}$

मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{dx}{x(1-2x)}$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{dx}{\sqrt{2^2 + x^2}}$

Section – D

खण्ड–द

29. Using matrices, solve the following system of equations : 6

$x + 2y + z = 3$

$2x - y + 3z = 5$

$x + y - z = 7$

OR

For matrices A, B and C

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

Verify that $A(B + C) = AB + AC$.

आव्यूह विधि का प्रयोग करके, निम्न समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए :

$x + 2y + z = 3$

$2x - y + 3z = 5$

$x + y - z = 7$

अथवा

आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ के लिए निम्न को सत्यापित कीजिए :

$A(B + C) = AB + AC$

30. Find the local maxima and minima (if any) for the function $f(x) = \cos 4x$, $0 < x < \pi/2$. 6

OR

Find the area of the region enclosed between the curves $y = x^2$ and $y = x + 6$, using integration.

फलन $f(x) = \cos 4x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ तथा स्थानीय निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

अथवा

वक्रों $y = x^2$ तथा $y = x + 6$ के उभयनिष्ठ भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, समाकलन विधि का प्रयोग करके।

31. Find $\int_0^5 (x + 1)\,dx$ as the limit of sum. 6

$\int_0^5 (x + 1)\,dx$ को योग की सीमा के रूप में ज्ञात कीजिए।

32. Prove that the lines $\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{-5}$ and $\frac{x-8}{7}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{3}$ are co-planar. **6**

सिद्ध कीजिए कि निम्न रेखाएँ समतलीय हैं :

$\frac{x-8}{7}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{3}$; $\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{-5}$

33. A soft drink company has two bottling plants, one located at P and other at Q. Each plant produces 3 different soft drinks A, B, C. The capacities of the two plants in terms of number of bottles per day, are as follows : **6**

Plants → / Product↓	P	Q
A	3000	1000
B	1000	1000
C	2000	6000

A market survey indicates that during the month of May, there will be a demand atleast for 24,000 bottles of A, 16000 bottles of B and 48000 bottles of C. The operating cost per day of running plants P and Q are respectively ₹ 6,000 and ₹ 4,000. Form a mathematical model to find how many days should the company run each plant in the month of May so that the production cost is minimised while still meeting the market demand.

ठंडा पेय बनाने वाली एक कम्पनी बोतल भरने के दो यंत्र लगाती है । यह यंत्र स्थान P पर तथा दूसरा स्थान Q पर स्थित है । प्रत्येक यंत्र विभिन्न तीन प्रकार के ठंडे पेय A, B तथा C बनाता है । दोनों यंत्रो की प्रत्येक दिन बोतल भरने की क्षमता निम्न प्रकार है :

उत्पाद	यंत्र	
	P	Q
A	3000	1000
B	1000	1000
C	2000	6000

एक बाजार का निरीक्षण करने पर यह स्पष्ट होता है कि मई महीने के दौरान, A प्रकार की कम से कम 24000 बोतलों, B प्रकार की कम से कम 16000 बोतलों तथा C प्रकार की कम से कम 48000 बोतलों की माँग होगी । P तथा Q यंत्रों को प्रतिदिन चलाने के लिए क्रमशः ₹ 6,000 तथा ₹ 4,000 खर्च आता है । मई के महीने में कम्पनी को प्रत्येक यंत्र कितने दिन चलाना चाहिए, जिससे उत्पादन मूल्य न्यूनतम हो तथा बाजार की माँग पूरी हो जाए । समस्या का गणितीय सूत्रण कीजिए ।