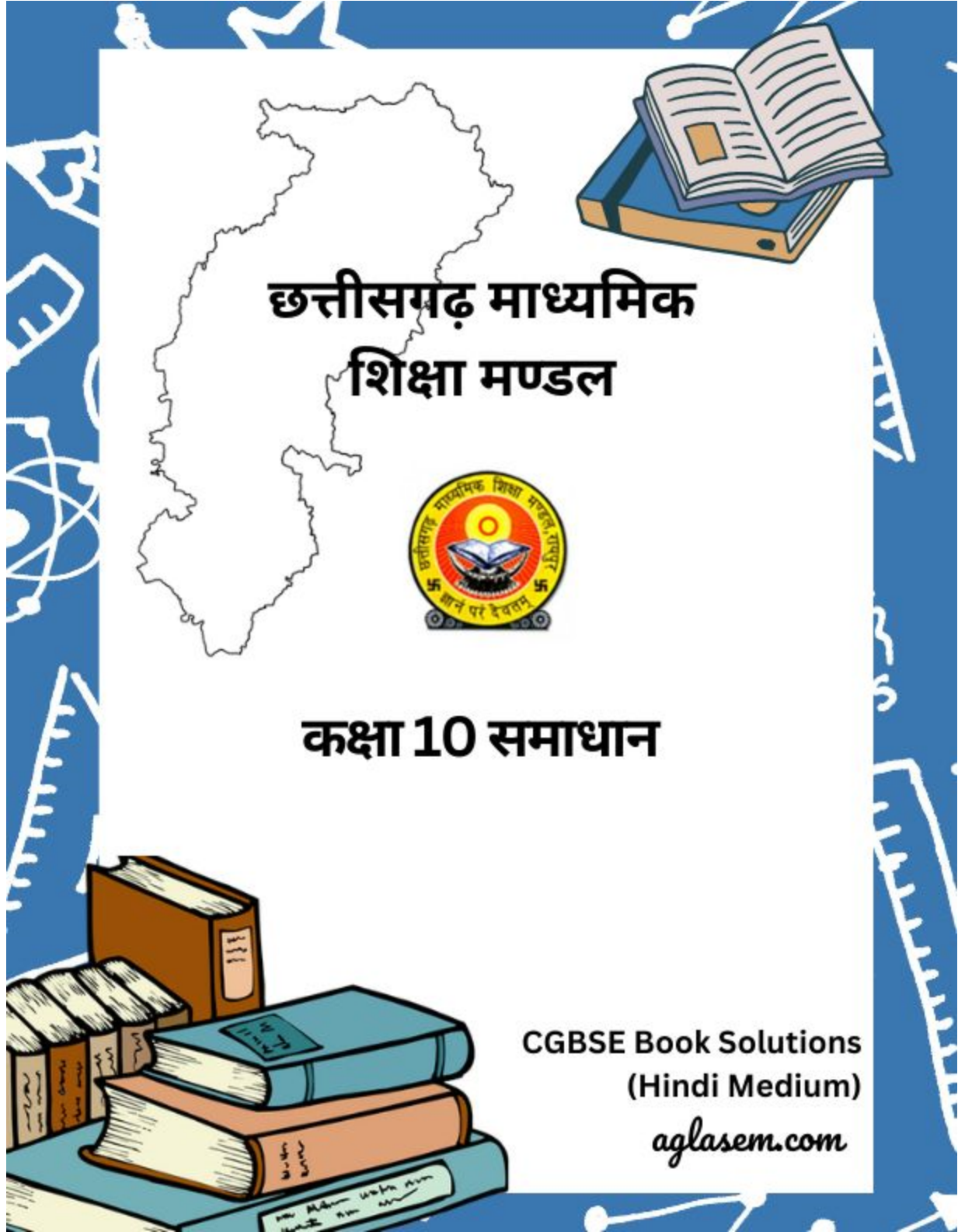


CG Board Class 10 Maths Book Solutions



CG Board Class 10 Math : Part 2 Solutions

Chapter 12

वृत्त एवं स्पर्श रेखाएँ

करके देखें:-

Page No.:270

प्रश्न. सत्य या असत्य लिखिए। कारण व उदाहरण से समझाइए।

1. वृत्त की अनेक त्रिज्याएँ होती हैं।

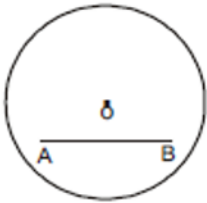
2. वृत्त की सभी त्रिज्याएँ समान नहीं होती हैं।

उत्तर - 1. सत्य। वृत्त की परिधि पर स्थित किसी बिंदु से केंद्र की दूरी त्रिज्या कहलाती है। चूँकि परिधि पर अनंत बिंदु होते हैं, अतः त्रिज्याएँ भी अनेक होती हैं।

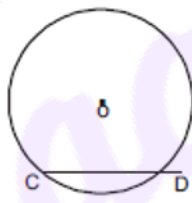
2. असत्य। त्रिज्याएँ समान न होने पर केंद्र से वृत्त की परिधि पर स्थित बिन्दुओं की दूरियाँ समान नहीं होंगी, जो कि असंभव है।

Page No.:270

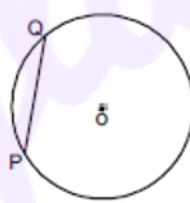
(i) नीचे दी गई आकृतियों में जीवा की पहचान करें।



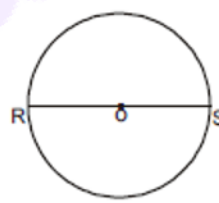
आकृति 1



आकृति 2



आकृति 3



आकृति 4

उत्तर - आकृति 3 - PQ

आकृति 4 - RS

(ii) क्या जीवाएँ एक ही लंबाई की हैं ?

उत्तर - नहीं।

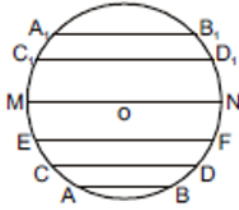
(iii) सबसे लम्बी जीवा कौन - सी हैं ?

उत्तर - RS (व्यास)।

सोचें एवं चर्चा करें-

Page No.:271

प्रश्न. क्या आकृति में MN के अतिरिक्त और भी व्यास खींचे जा सकते हैं? यदि हाँ, तो ऐसे कितने व्यास खींचे जा सकते हैं?



उत्तर - हाँ, अनंत।

करके देखें -

Page No.:272

प्रश्न. कागज पर एक वृत्त खींचिए तथा अलग - अलग माप की जीवा खींचकर जीवा की लम्बाई तथा संगत लघु वृत्तखंड में संबंध ढूँढ़िये।

हल: यहाँ हम देखते हैं कि जीवा AB छोटी है, अतः संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल भी कम है। दूसरी ओर, जीवा PQ बड़ी है, अतः संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल भी अधिक है।

सोचें एवं चर्चा करें -

Page No.:272

(1) एक वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी. है। वृत्त की जीवाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः 4 सेमी., 6 सेमी, 10 सेमी व 8 सेमी हैं। इन जीवाओं के संगत दीर्घ वृत्तखण्ड को छोटे से बड़े के क्रम में लिखिए।

उत्तर - 10 सेमी का दीर्घ वृत्तखण्ड, 8 सेमी का दीर्घ वृत्तखण्ड, 6 सेमी का दीर्घ वृत्तखण्ड, 4 सेमी का दीर्घ वृत्तखण्ड।

Page No.:272

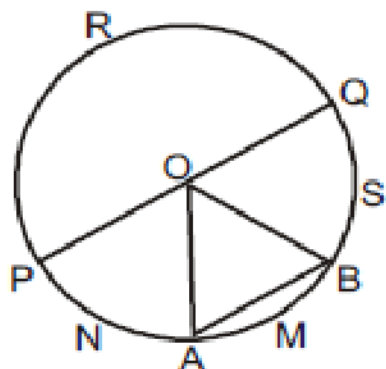
(2) उपरोक्त 6 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त में जब जीवा 12 सेमी की हो, तो दीर्घ वृत्त खंड और लघु वृत्त खंड में क्या संबंध देखते हैं?

उत्तर- चूँकि वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है, अतः उसका व्यास 12 सेमी होगा। परिणामस्वरूप 12 सेमी की जीवा अर्थात् व्यास का दीर्घ वृत्तखण्ड और लघु वृत्तखण्ड दोनों एक समान होंगे।

करके देखें-

Page No.:272

प्रश्न. दी गई आकृति में त्रिज्या, जीवा, व्यास, चाप, त्रिज्यखण्ड, वृत्तखण्ड की पहचान कर दी गई तालिका में लिखें।



त्रिज्या	जीवा	व्यास	चाप	त्रिज्यखण्ड	वृत्तखण्ड
OP	AB	PQ	$\widehat{PRQ}$	$OARB$	PRQ
OQ	PQ		$\widehat{PMQ}$	$OAMB$	PMQ
OA			$\widehat{ARB}$	$OPRQ$	ARB
OB			$\widehat{AMB}$	$OPMQ$	AMB
				$OBRQ$	
				$OQSB$	
				$OQRP$	

करके देखें -

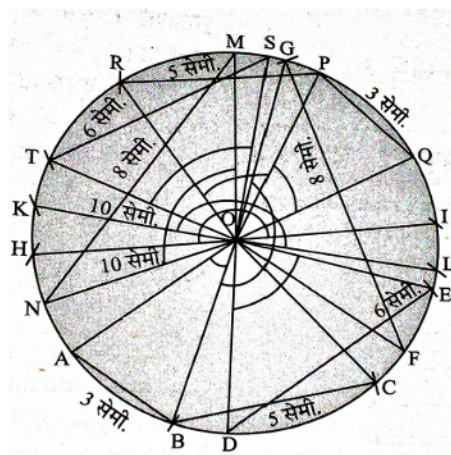
Page No.:273

प्रश्न. 5 सेमी. त्रिज्या का एक वृत्त खींचें। वृत्त में 3, 5, 6, 8, 10 सेमी लम्बाई की दो - दो जीवाएँ खींचें। चाँदे की सहायता से इन जीवाओं द्वारा केंद्र पर बने कोणों की माप करें और दी गई तालिका में लिखें।

जीवा की लंबाई	3 सेमी.	5 सेमी.	6 सेमी.	8 सेमी.	10 सेमी.
कोण					

उपरोक्त तालिका को पूर्ण करने पर आप पाएंगे कि एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

हल :



जीवा की लम्बाई	3 सेमी AB; PQ		5 सेमी BC; PR		6 सेमी DE ; ST		8 सेमी FG; MN		10 सेमी HI; KL	
कोण	35°	35°	60°	60°	85°	85°	110°	110°	180°	180°

इस प्रकार, वृत्त की बराबर जीवाएँ केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।

करके देखें -

Page No.:275

1. एक वृत्त के अंतर्गत समबहुभुज की प्रत्येक भुजा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है तो समबहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना समबहुभुज की n भुजाएँ हैं।

प्रश्नानुसार, प्रत्येक भुजा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। अतः

$$n \times 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow n = \frac{360}{60} = 6$$

अतः समबहुभुज की भुजाओं की संख्या 6 होगी। उत्तर

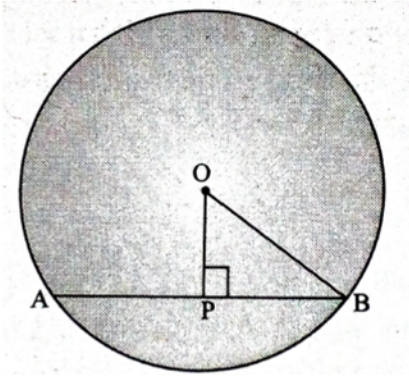
करके देखें -

Page No.:278

5x त्रिज्या वाले वृत्त के केंद्र से 6x लम्बाई की जीवा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना जीव AB = 6x, त्रिज्या OB = 5x, लम्ब OP = ?

चूँकि, केंद्र से जीवा पर डाला गया लम्ब, उसे समद्विभाजित करता है।



$$\therefore AP = PB = \frac{AB}{2}$$

$$= \frac{6x}{2} = 3x$$

अब समकोण त्रिभुज OPB में बोधायन - पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OP^2 + PB^2 = OB^2$$

$$\Rightarrow OP^2 + (3x)^2 = (5x)^2$$

$$\Rightarrow OP^2 + 9x^2 = 25x^2$$

$$\Rightarrow OP^2 = 25x^2 - 9x^2$$

$$= 16x^2$$

$\therefore$ जीवा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई,

$$OP = \sqrt{16x^2} = 4x. \quad \text{उत्तर}$$

Page No.:279

प्रश्न 1. वृत्त की जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए-

यदि

(i) त्रिज्या = 13 सेमी तथा जीवा की केन्द्र से दूरी = 12 सेमी।

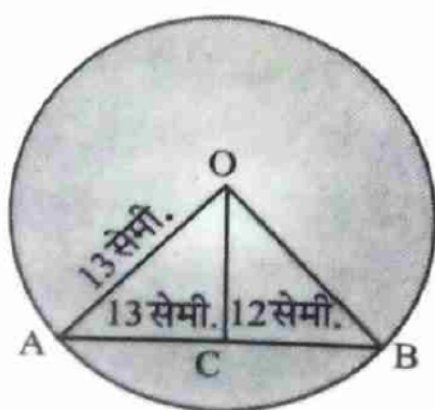
(ii) त्रिज्या = 15 सेमी तथा जीवा की केन्द्र से दूरी = 9 सेमी।

हल : (i) माना वृत्त का केन्द्र बिन्दु O तथा AB एक जीवा है,

तब $OC \perp AB$ से,

$OC = 12$ सेमी

तथा, त्रिज्या = $OA = OB = 13$ सेमी



अब समकोण $\triangle OCA$ में,
पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OA^2 = OC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow 13^2 = 12^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow 169 = 144 + AC^2$$

$$\Rightarrow 169 - 144 = AC^2$$

$$\Rightarrow 25 = AC^2$$

$$\therefore AC = \sqrt{25} = 5 \text{ सेमी}$$

परन्तु जीवा $AB = 2 \times AC$

$$\Rightarrow AB = 2 \times 5 = 10 \text{ सेमी। उत्तर}$$

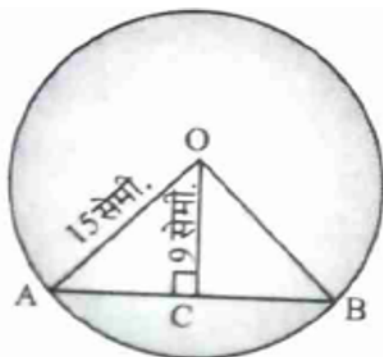
Page No.:279

(ii) माना वृत्त का केन्द्र बिन्दु O तथा AB एक जीवा है,

तब $OC \perp AB$ से,

$$OC = 9 \text{ सेमी}$$

$$\text{त्रिज्या} = OA = OB = 15 \text{ सेमी}$$



अब समकोण $\triangle OCA$ में,
पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OA^2 = OC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow 15^2 = 9^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow 225 = 81 + AC^2$$

$$\Rightarrow 225 - 81 = AC^2$$

$$\Rightarrow 144 = AC^2$$

$$\therefore AC = \sqrt{144} = 12 \text{ सेमी}$$

परन्तु जीवा $AB = 2 \times AC$

$$\Rightarrow AB = 2 \times 12 = 24 \text{ सेमी। उत्तर}$$

Page No.:279

प्रश्न 2. वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए यदि जीवा की लम्बाई तथा केन्द्र से दूरी क्रमशः

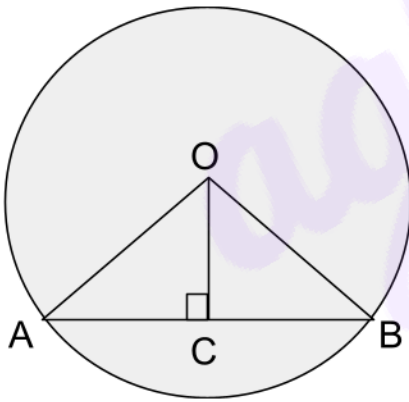
(i) 8 सेमी और 3 सेमी, (ii) 14 सेमी और 24 सेमी।

हल : (i) माना वृत्त का केन्द्र बिन्दु O तथा एक जीवा AB है।

तब $AB = 8$ सेमी

तथा $OC \perp AB$ से,

$OC = 3$ सेमी



$$\therefore AB = 2 \times AC$$

$$\therefore AC = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ सेमी}$$

अब समकोण $\triangle OCA$ में,
पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OA^2 = OC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow OA^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow OA^2 = 9 + 16$$

$$\therefore OA = \sqrt{25} = 5 \text{ सेमी}$$

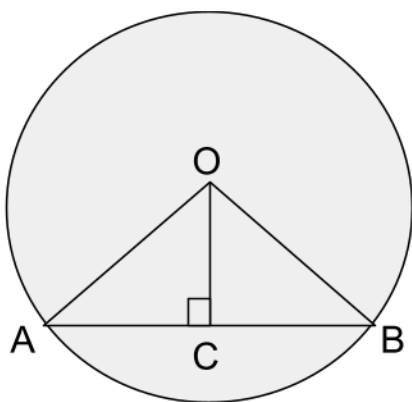
अतः, त्रिज्या $OA = 5$ सेमी। उत्तर

(ii) माना वृत्त का केन्द्र बिन्दु O तथा AB एक जीवा है।

तब $AB = 14$ सेमी

तथा $OC \perp AB$ से,

$OC = 24$ सेमी



$$\therefore AB = 2 \times AC$$

$$\therefore AC = \frac{AB}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ सेमी}$$

अब समकोण $\triangle OCA$ में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OA^2 = OC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow OA^2 = 7^2 + 24^2$$

$$\Rightarrow OA^2 = 49 + 576$$

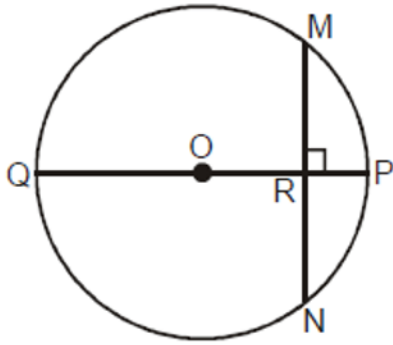
$$\Rightarrow OA^2 = 625$$

$$OA = \sqrt{625} = 25 \text{ सेमी}$$

अतः त्रिज्या $OA = 25$ सेमी। उत्तर

Page No.:279

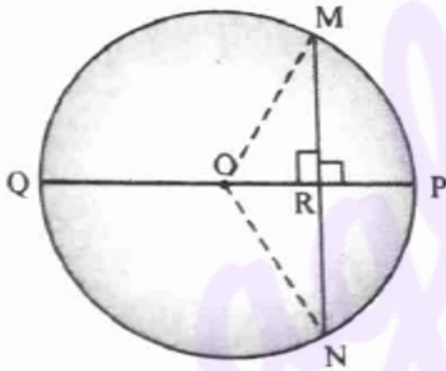
प्रश्न 3. आकृति में, PQ वृत्त का व्यास है। $MN \perp PQ$ तथा $PQ = 10$ सेमी और $PR = 2$ सेमी है, तो MN की लंबाई ज्ञात कीजिए।



हल: दिया है- वृत्त में PQ व्यास है।
 तथा, $MN \perp PQ$, $PQ = 10$ सेमी.
 $PR = 2$ सेमी.

$$\therefore OP = \frac{PQ}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ सेमी.}$$

$$\therefore OR = OP - PR = 5 - 2 = 3 \text{ सेमी.}$$



ON तथा OM को मिलाया।

$$\therefore MN \perp PQ$$

$$\therefore MR \perp OR \text{ तथा } MR = NR$$

अतः समकोण $\triangle ORM$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OM^2 = OR^2 + MR^2$$

$$\Rightarrow OP^2 = OR^2 + MR^2$$

$$\therefore [OM = OP = \text{प्रत्येक त्रिज्या है।}]$$

$$\therefore 5^2 = 3^2 + MR^2$$

$$\Rightarrow 25 - 9 = MR^2$$

$$\Rightarrow MR^2 = 16 = 4^2$$

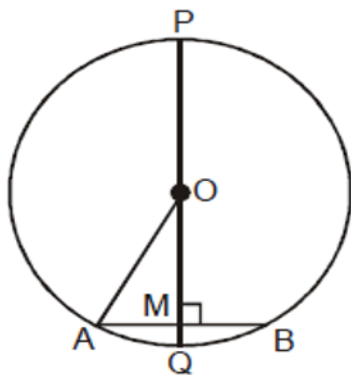
$$\therefore MR = 4 \text{ सेमी.}$$

$$\text{अतः } MN = 2 \times MR$$

$$\Rightarrow MN = 2 \times 4 = 8 \text{ सेमी. उत्तर}$$

Page No.:279

प्रश्न 4. आकृति में जीवा $AB = 18$ सेमी है तथा PQ , जीवा AB की लंब-समद्विभाजक है, जो जीवा को M बिंदु पर मिलती है, यदि $MQ = 3$ सेमी हो तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



हल: दिया है— $AB = 18$ सेमी.,

$$MQ = 3 \text{ सेमी.}$$

$\therefore PQ$, जीवा AB का लंब-समद्विभाजक है।

$\therefore PQ$ केन्द्र O से होकर गुजरेगी तथा $AM = BM$

$$\Rightarrow AM = BM = \frac{AB}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ सेमी.}$$

माना वृत्त की त्रिज्या $OA = x$ सेमी.

तब

$$OA = OQ,$$

[प्रत्येक त्रिज्या है]

$$\Rightarrow OA = OM + MQ$$

$$\Rightarrow x = OM + 3$$

$$\Rightarrow OM = (x - 3) \text{ सेमी.}$$

समकोण $\triangle OMA$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

$$\Rightarrow x^2 = (x-3)^2 + 9^2$$

$$\Rightarrow x^2 = x^2 + 9 - 6x + 81$$

$$\Rightarrow 6x = 90$$

$$\Rightarrow x = 15$$

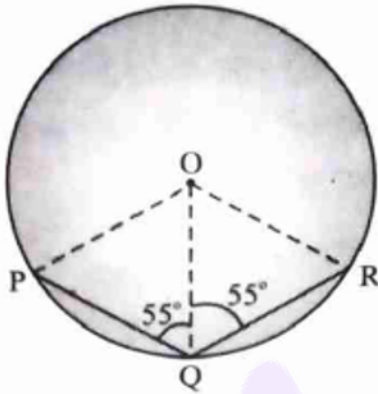
अतः वृत्त की त्रिज्या $OA = 15$ सेमी. उत्तर

Page No.:279

प्रश्न 5. एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, की दो जीवाएँ PQ और QR हैं तथा $\angle PQO = \angle OQR = 55^\circ$ । सिद्ध कीजिए कि $PQ = QR$ ।

हल: दिया है- वृत्त जिसका केन्द्र O है।

तथा PQ तथा QR जीवाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle PQO = \angle OQR = 55^\circ$



ΔOQP में,

$OP = OQ$, [प्रत्येक त्रिज्या है।

(अतः ΔOQP एक समद्विबाहु त्रिभुज है।)

$$\therefore \angle OPQ = \angle OQP = 55^\circ$$

$$\Rightarrow \angle POQ = 180^\circ - (55^\circ + 55^\circ)$$

$$\Rightarrow \angle POQ = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

इसी प्रकार ΔOQR में,

$$\angle QOR = 70^\circ$$

अब ΔPOQ व ΔQOR में,

$OP = OR$ [प्रत्येक त्रिज्या है।

$OQ = OQ$, [उभयनिष्ठ है।

तथा

$$\therefore \angle POQ = \angle QOR \text{ [प्रत्येक } 70^\circ \text{ है]}$$

$$\Delta POQ \cong \Delta QOR,$$

[भु. को भु. सर्वांगसमता से।

$$\Rightarrow PQ = QR \text{ से}$$

[सं. त्रि. के संगत भुजा से]

सिद्ध हुआ।

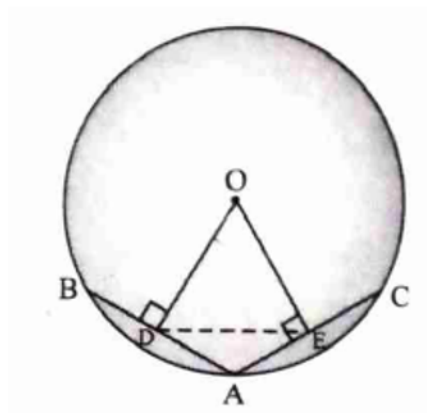
Page No.:279

प्रश्न 6. केन्द्र O वाले एक वृत्त में AB और AC दो समान जीवाएँ हैं। यदि $OD \perp AB$ और $OE \perp AC$ तो सिद्ध कीजिए कि $\triangle ADE$ समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल : दिया है वृत्त में $AB = AC$

$OD \perp AB$ व $OE \perp AC$

सिद्ध करना है - $\triangle ADE$ समद्विबाहु त्रिभुज है।



रचना- D व E को मिलाया।

$\therefore AB = AC$ (दिया है)

$\Rightarrow \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC$ ($\because$ केंद्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को दो बराबर

$\Rightarrow AD = AE$ भागों में विभाजित करता है।)

स्पष्ट है कि $\triangle ADE$ में, $AD = AE$

$\therefore \triangle ADE$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है। सिद्ध हुआ।

करके देखें-

Page No.:281

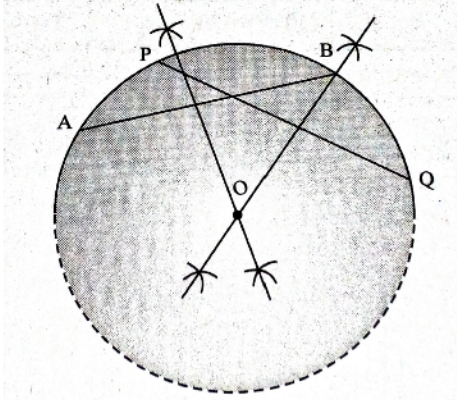
प्रश्न. चाप दिया गया है (देखिए आकृति - 36)।

वृत्त का केंद्र ज्ञात कर वृत्त को पूरा कीजिए।

हल: दिए गए चाप पर चार बिंदु A, B, P तथा Q लिए।



एक वृत्त का



AB और PQ को मिलाया। AB तथा PQ के लम्ब समद्विभाजक खींचे जो परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O को केंद्र मानकर तथा OA को त्रिज्या लेकर वृत्त पूरा किया।

Page No.:281

प्रश्न. क्या तीन संरेख बिन्दुओं से होकर जाने वाला कोई वृत्त खींचा जा सकता है?

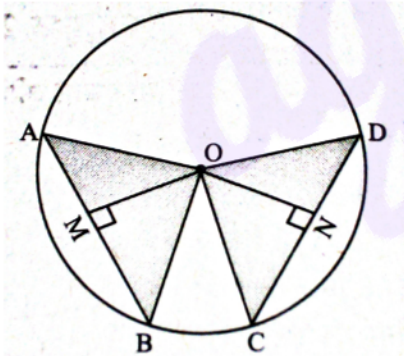
उत्तर- यह कथन असत्य है क्योंकि हम जानते हैं कि दो बिन्दुओं से होकर जाने वाला वृत्त उन दोनों बिन्दुओं के संरेख तीसरे बिन्दु से होकर नहीं जा सकता।

Page No.:282

प्रश्न. एक वृत्त के केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ लंबाई में बराबर होती हैं। उपपत्ति दें।

हल: दिया है: वृत्त $C(O, r)$ में, जीवा AB तथा जीवा CD दी गई हैं।

$$OM = ON$$



हाँ, OM, AB की केंद्र से दूरी तथा ON, CD की केंद्र से दूरी है।

सिद्ध करना है - $AB = CD$.

उपपत्ति - समकोण त्रिभुजों $\triangle OMB$ तथा $\triangle OCN$ में,

$OB = OC$, (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OM = ON$, (दिया है)

$\triangle OMB \cong \triangle OCN$, (समकोण - कर्ण - भुजा प्रमेय)

अतः $MB = NC$

$$\Rightarrow 2MB = 2NC$$

$\Rightarrow AB = CD$, (केंद्र से डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।) सिद्ध हुआ।

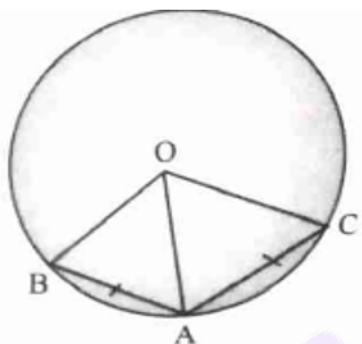
Page No.:284

प्रश्न 1. एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि वृत्त का केन्द्र $\angle BAC$ के समद्विभाजक पर स्थित है।

हल: माना वृत्त का केन्द्र बिन्दु O है तथा जीवाएँ $AB = AC$

OA, OB व OC को मिलाया।

तब सिद्ध करना है : $\angle OAB = \angle OAC$



अब $\triangle OAB$ व $\triangle OAC$ में,

$$OB = OC,$$

(एक ही वृत्त को त्रियाएं है।)

$$OA = OA \text{ (उभयनिष्ठ भुजा है।)}$$

$$AB = AC$$

$$\therefore \triangle OAB \cong \triangle OAC.$$

(भु.- भु. - भु. सर्वांगसमता से)

$$\text{अतः } \angle OAB = \angle OAC$$

(सर्वांगसम त्रिभुज के संगत अवयव है।)

$\therefore$ वृत्त का केन्द्र O, $\angle BAC$ के समद्विभाजक पर स्थित है।

Page No.:284

प्रश्न 2. 10 सेमी और 24 सेमी की दो समान्तर जीवाएं वृत्त के केन्द्र के विपरीत ओर हैं। जीवाओं के बीच की दूरी 17 सेमी है। वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल: माना वृत्त का केन्द्र O है तथा दो जीवाएं $AB \parallel CD$ है।

तब $AB = 10$ सेमी

$$CD = 24 \text{ सेमी}$$

$$OA = OC = \text{त्रिज्या}$$

$OM \perp AB$ तथा $ON \perp CD$ खींचे, तब M, O, N

समरेख होंगे।

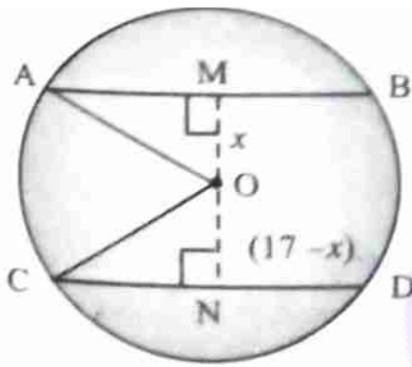
∴ MN = जीवाओं के बीच की दूरी = 17 सेमी होगी।

माना OM = x सेमी तब ON = (17-x) सेमी होगी

∴ केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

$$\begin{aligned}\therefore AM &= \frac{AB}{2} \\ &= \frac{10}{2} = 5 \text{ सेमी}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{तथा } CN &= \frac{CD}{2} \\ &= \frac{24}{2} = 12 \text{ सेमी}\end{aligned}$$



अब समकोण $\triangle OMA$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\begin{aligned}OA^2 &= AM^2 + OM^2 \\ &= 5^2 + x^2 \quad \dots\dots(1)\end{aligned}$$

समकोण $\triangle ONC$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\begin{aligned}OC^2 &= CN^2 + ON^2 \\ &= 12^2 + (17-x)^2\end{aligned}$$

परन्तु $OA = OC$

(एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$$\therefore OA^2 = OC^2$$

$$\Rightarrow 5^2 + x^2 = 12^2 + (17-x)^2$$

[समी. 1 व 2 से]

$$\Rightarrow 25 + x^2 = 144 + 289 + x^2 - 34x$$

$$\Rightarrow 25 = 433 - 34x$$

$$\Rightarrow 34x = 433 - 25 = 408$$

$$\Rightarrow x = \frac{408}{34} = 12$$

समी. (1) से,

$$\begin{aligned}OA^2 &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144\end{aligned}$$

$$[\because (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$$

$$OA^2 = 169$$

$$OA = \sqrt{169}$$

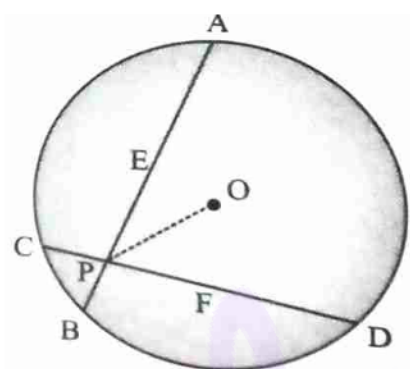
$$OA = 13 \text{ सेमी.}$$

$$\text{अतः वृत्त का व्यास} = 2OA$$

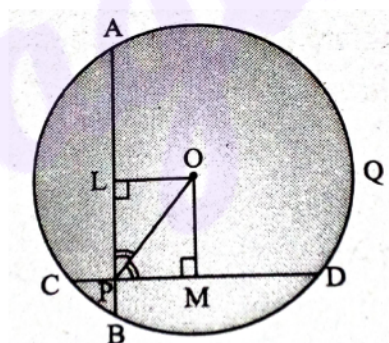
$$= 2 \times 13 = 26 \text{ सेमी। उत्तर}$$

Page No.:284

प्रश्न 3. एक वृत्त का केन्द्र O है तथा $\angle APD$ का कोण समद्विभाजक PO है (देखिए आकृति) सिद्ध कीजिए $AB = CD$.



हल: दिया है- वृत्त का केन्द्र O है तथा $\angle APD$ का कोण समद्विभाजक PO है।



सिद्ध करना है -

$$AB = CD$$

रचना - $OL \perp AB$ तथा $OM \perp CD$ खींचे।

अब $\triangle OLP$ व $\triangle OMP$ में,

$$\angle OLP = \angle OMP,$$

[प्रत्येक 90° है, रचना से]

$$\angle OPL = \angle OPM$$

[OP, $\angle$ APD का कोण समद्विभाजक है, दिया है।]

OP = OP, [उभयनिष्ठ भुजा है]

$\therefore \triangle OLP \cong \triangle OPM$,

[को. को. भु. सर्वांगसमता से]

$\Rightarrow PL = PM$

[स. त्रि. का संगत अवयव है]

तथा OL = OM

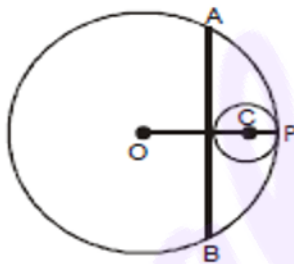
[स. त्रि. का संगत अवयव है]

$\Rightarrow AB = CD$,

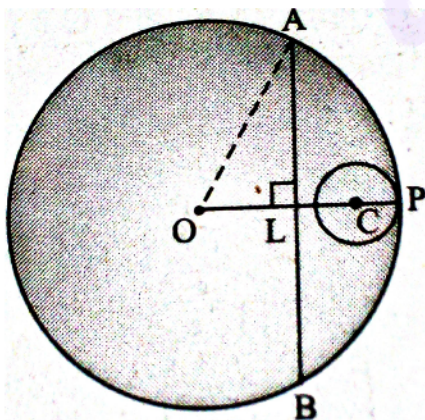
[केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ समान होती है] सिद्ध हुआ।

Page No.:284

प्रश्न 4. दो वृत्त हैं जिनका केंद्र O और C है तथा त्रिज्या क्रमशः 13 सेमी. और 3 सेमी. है (देखिए आकृति)। यदि OC का लम्ब समद्विभाजक, बड़े वृत्त को A और B पर मिलता है, तो AB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल : बड़े वृत्त की त्रिज्या OP = 13 सेमी.
छोटे वृत्त की त्रिज्या CP = 3 सेमी.



OC का समद्विभाजक AB है जो OC को बिन्दु L (माना) पर मिलती है।

∴ AL = LB तथा OL ⊥ AB

माना AL = x सेमी, तब Δ OLA में पाइथागोरस प्रमेय से

$$OA^2 = OL^2 + AL^2$$

$$\Rightarrow OP^2 = LC^2 + AL^2,$$

[∵ OA = OP = त्रिज्या, OL = LC दिया है]

$$\Rightarrow 13^2 = 5^2 + AL^2$$

$$\Rightarrow 169 - 25 = AL^2,$$

$$[\because OP = OL + LC + CP]$$

$$13 = LC + LC + 3$$

$$13 - 3 = 2LC$$

$$LC = \frac{10}{2} = 5]$$

$$\Rightarrow 144 = AL^2$$

$$\Rightarrow (12)^2 = AL^2$$

$$\therefore AL = 12 \text{ सेमी.}$$

परन्तु AB = 2 x AL,

[क्योंकि AB, OC का लम्ब समद्विभाजक है]

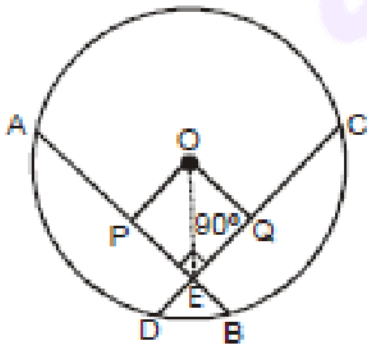
$$AB = 2 \times 12$$

$$AB = 24 \text{ सेमी.}$$

उत्तर

Page No.:284

प्रश्न 5. आकृति में केंद्र O वाले एक वृत्त में AB और CD दो समान जीवाएँ बिंदु E पर समकोण पर मिलती है। यदि P और Q जीवा AB और CD के मध्य बिन्दु हों तो, सिद्ध कीजिए कि OPEQ एक वर्ग है।



हल : दिया है - AB = CD

$$\angle AEC = 90^\circ$$

P व Q जीवा के मध्य बिंदु को मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

∴ केंद्र से जीवा के मध्यबिंदु को मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

$$\therefore \angle OPE = \angle OQE = 90^\circ \dots\dots\dots(1)$$

$$\therefore AB = CD \text{ [दिया है]}$$

क्योंकि समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं।

$$\therefore OP = OQ \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{तथा } \angle AEC = \angle PEQ = 90^\circ \dots\dots\dots(3)$$

समी. (1) व (3) से,

$$\angle OPE = \angle PEQ = \angle OQE = 90^\circ$$

$$\text{तथा } OP = OQ$$

∴ □ OPEQ एक ऐसा समान्तर चतुर्भुज हुआ जिसका प्रत्येक कोण समकोण है एवं आसन्न भुजा का एक युग्म समान है।

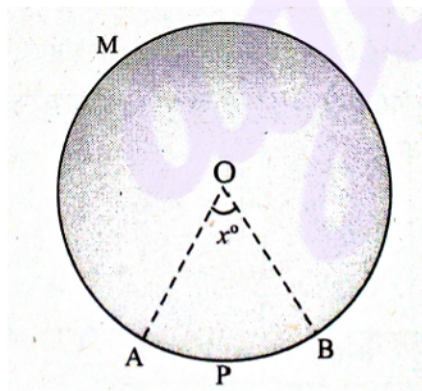
∴ □ OPEQ एक वर्ग होगा। सिद्ध हुआ।

Page No.:285

सोचें एवं चर्चा करें -

प्रश्न. एक वृत्त के लघु चाप APB का अंश माप (आकृति) x° हो, तो दीर्घ चाप AMB का अंश माप $(360^\circ - x^\circ)$ होता है, क्यों ?

हल:



वृत्त के केंद्र पर बना कोण 360° का होता है।

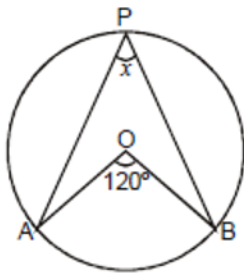
अब, लघुचाप APB का अंशमाप $\angle AOB = x^\circ$

$$\therefore \text{दीर्घ चाप AMB का अंशमाप} = \text{इस चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण} \\ = 360^\circ - x^\circ.$$

करके देखें -

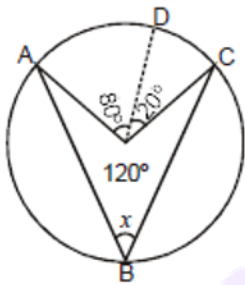
Page No.:287

प्रश्न. दी गई आकृतियों में x का मान ज्ञात कीजिए।
आकृति -1



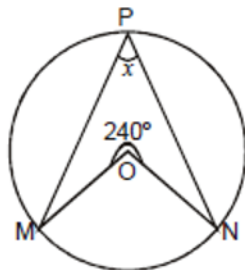
हल: आकृति - 1 में, $2x = 120^\circ$
 $\therefore x = \frac{120}{2} = 60^\circ$

आकृति -2



उत्तर - केंद्र नहीं दिखाया गया है, अतः अस्पष्ट।

आकृति -3

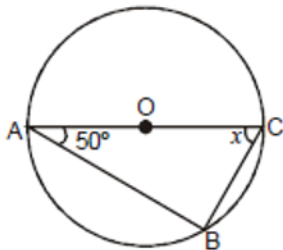


उत्तर - $\angle MON = 360^\circ - 240^\circ$
 $= 120^\circ$

$\therefore 2x = 120^\circ$

$\Rightarrow x = 60^\circ$. उत्तर

आकृति -4



हल : $\angle ABC = 90^\circ$ (वृत्तार्द्ध का कोण)

अब, $\triangle ABC$ में,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 50^\circ + 90^\circ + x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = 180^\circ - 140^\circ$$

$$= 40^\circ.$$

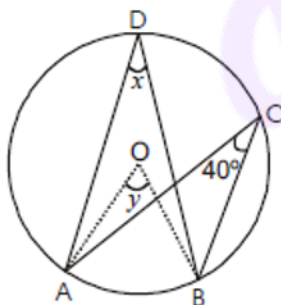
उत्तर

करके देखें -

Page No.:288

प्रश्न. दी गई आकृति में x और y का मान ज्ञात कीजिए।

आकृति - 1



हल : $\angle D = \angle C$, (एक ही वृत्तखण्ड के कोण)

$$\therefore x = 40^\circ.$$

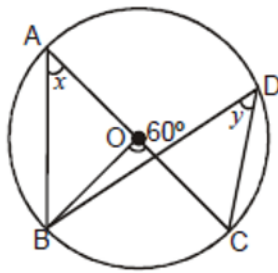
अब : आकृति , $y = 2x$

$$= 2 \times 40^\circ$$

$$= 80^\circ.$$

उत्तर

आकृति - 2



हल : $2x = 60^\circ$

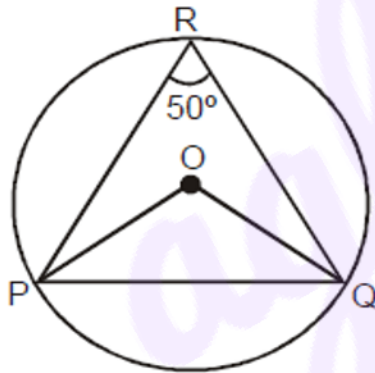
$\therefore x = 30^\circ$

अब, $x = y$

$\therefore y = 30^\circ$. उत्तर

Page No.:289

प्रश्न 1. आकृति में, O वृत्त का केंद्र है, PQ एक जीवा है। यदि $\angle PRQ = 50^\circ$ हो तो $\angle OPQ$ ज्ञात कीजिए।



हल: दिया है: $\angle PRQ = 50^\circ$

ज्ञात करना है: $\angle OPQ = ?$

$\therefore$ चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण शेष खण्ड में बनाये गये कोण का दुगुना होता है।

$\therefore \angle POQ = 2 \times \angle PRQ$

$\Rightarrow \angle POQ = 2 \times 50^\circ$

$\Rightarrow \angle POQ = 100^\circ$

अब $\triangle OPQ$ में,

$OP = OQ$

(एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$\therefore \angle OPQ = \angle OQP = x^\circ$ (माना)

तब $100^\circ + x + x = 180^\circ$

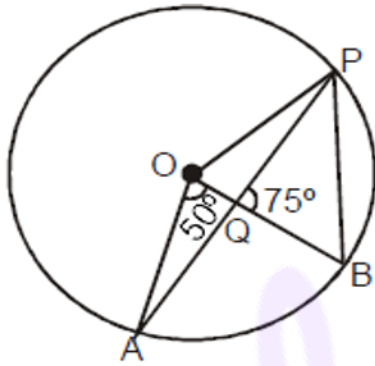
$\Rightarrow 2x = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

$\Rightarrow x = 80^\circ$

अतः $\angle OPQ = x = 80^\circ$ उत्तर

Page No.:289

प्रश्न 2. दी गई आकृति में $\angle PBO$ का मान ज्ञात कीजिए जिसमें $\angle AOB = 50^\circ$ तथा $\angle PQB = 75^\circ$ है।



हल: दिया है- $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle PQB = 75^\circ$

$\therefore$ चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण शेष खण्ड में बनाये गये कोण का दुगुना होता है।

यहाँ पर द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण = $\angle AOB$

तथा $\overset{\frown}{AB}$ द्वारा शेष खण्ड में बना कोण = $\angle APB$

$\therefore \angle AOB = 2 \times \angle APB$

$\Rightarrow 50^\circ = 2 \times \angle APB$

$\Rightarrow \angle APB = \frac{50}{2} = 25^\circ$

$\Rightarrow \angle APB = 25^\circ$

[$\because \angle APB = \angle QPB$]

$\therefore \triangle PQB$ में सभी अन्तः कोणों का योग 180° होगा।

$\therefore \angle QPB + \angle PQB + \angle QBP = 180^\circ$

$\Rightarrow 25^\circ + 75^\circ + \angle QBP = 180^\circ$

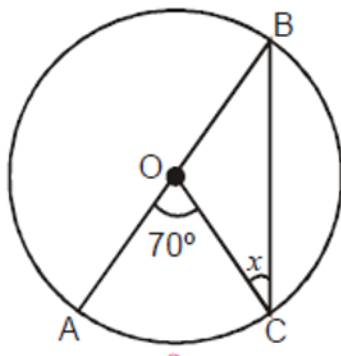
$\Rightarrow 100^\circ + \angle QBP = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle QBP = 180^\circ - 100^\circ$

$$\Rightarrow \angle QBP = 80^\circ, (\angle QPB = \angle PBO) \text{ उत्तर}$$

Page No.:289

प्रश्न 3. आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए। O वृत्त का केन्द्र है।



हल: दिया है- $\angle AOC = 70^\circ$

चित्रानुसार AB वृत्त का व्यास है।

$$\therefore OA = OB = OC,$$

[प्रत्येक त्रिज्या है।]

$\Rightarrow \triangle OBC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = x$$

$$\Rightarrow \angle OCB = \angle ABC = x \quad \dots\dots (1)$$

(त्रिभुज में समान भुजा के सम्मुख कोण समान होते हैं)

$\therefore$ वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण वृत्त के परिधि के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दुगुना होता है।

$$\therefore \angle AOC = 2x \angle ABC$$

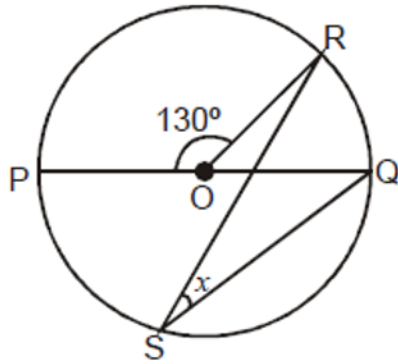
$$\Rightarrow \angle AOC = 2 \times x \quad [\text{सेमी. (1) से}]$$

$$\Rightarrow 70^\circ = 2x$$

$$\Rightarrow x = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ \text{ उत्तर}$$

Page No.:290

प्रश्न 4. यदि O वृत्त का केन्द्र है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



हल: दिया है- $\angle POR = 130^\circ$

$$\angle POR + \angle ROQ = 180^\circ$$

[रेखीययुग्म अभिगृहीत से]

$$\Rightarrow 130^\circ + \angle ROQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ROQ = 180^\circ - 130^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ROQ = 50^\circ \dots\dots(1)$$

$\therefore \angle QOR$ चाप QR का केन्द्रीय कोण है।

तथा $\angle RSQ$, चाप QR द्वारा परिधि के शेष भाग में अंतरित कोण हैं।

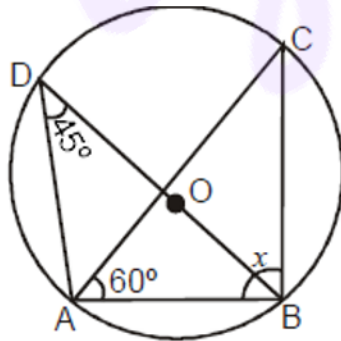
$$\therefore \angle QOR = 2 \times \angle QSR$$

$$\Rightarrow 50^\circ = 2x \text{ [सेमी. (1) से]}$$

$$\Rightarrow x = 25^\circ \text{ उत्तर}$$

Page No.:290

प्रश्न 5. यदि O वृत्त का केन्द्र है, तो दी गई आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए।



हल: चित्रानुसार, $\angle ADB$ व $\angle ACB$ वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोण हैं।

$\therefore \angle ACB = \angle ADB$ ($\because$ एक चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग पर बने कोण समान होंगे।)

$$\Rightarrow \angle ACB = 45^\circ \dots\dots(1)$$

$$[\because \angle ADB = 45^\circ]$$

अब $\triangle ABC$ में,

$$\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180^\circ \quad [\because \text{त्रिभुज के आंतरिक कोणों का योग } 180^\circ \text{ होता है।}]$$

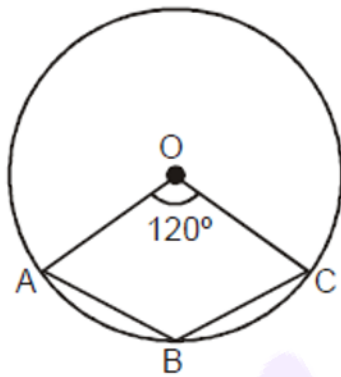
$$\Rightarrow 45^\circ + 60^\circ + x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = 180^\circ - 105^\circ$$

$$\Rightarrow x = 75^\circ \text{ उत्तर}$$

Page No.:290

प्रश्न 6. आकृति में $\angle ABC$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल: चित्रानुसार, $\angle AOC = 120^\circ =$ चाप ABC का केन्द्रीय कोण।

$$\begin{aligned} \therefore \text{चाप CA का केन्द्रीय कोण} &= 360^\circ - \angle AOC \\ &= 360^\circ - 120^\circ \\ &= 240^\circ \end{aligned}$$

अब चूँकि किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा शेष परिधि पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

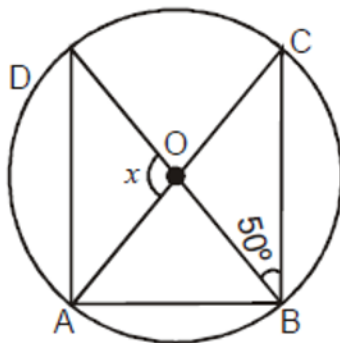
$$\therefore \text{चाप CA का केन्द्रीय कोण} = 2 \times \angle ABC$$

$$\Rightarrow 240^\circ = 2 \times \angle ABC$$

$$\Rightarrow \angle ABC = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ \text{ उत्तर}$$

Page No.:290

प्रश्न 7. आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि $AD \parallel BC$.



हल : चित्रानुसार, $\angle DBC = 50^\circ$

$$\Rightarrow \angle OBC = 50^\circ$$

तथा $\angle AOD = x$

परन्तु $\angle AOD = \angle OBC = x$
[शिर्षाभिमुख कोण है]

अब $\because$ DOB व AOC व्यास है।

$$\therefore DB = AC$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} AC$$

$$\Rightarrow OB = OC$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC ,$$

[त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण]

$$\Rightarrow \angle OCB = 50^\circ$$

अब $\triangle OAD$ में ,

$$OA = OD, (\text{वृत्त की त्रिज्याएँ})$$

$$\therefore \angle D = \angle A$$

$$\therefore x + \angle A + \angle D = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 80^\circ + \angle D + \angle D = 180^\circ, (\because \angle A = \angle D)$$

$$\Rightarrow 2\angle D = 180^\circ - 80^\circ$$

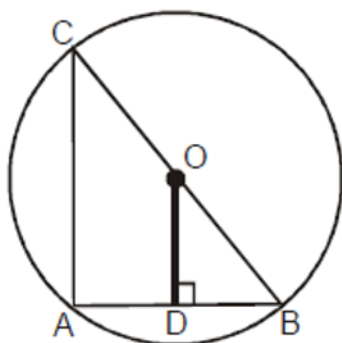
$$\therefore \angle D = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$$

अब, AD और BC दो रेखाओं को तिर्यक् रेखा DB काट रही है, तथा $\angle D = \angle B (50^\circ)$ परन्तु ये एकांतर कोण हैं।

अतः $AD \parallel BC$ सिद्ध हुआ।

Page No.:290

प्रश्न 8. आकृति में, O वृत्त का केंद्र तथा $OD \perp AB$, यदि $OD = 5$ सेमी हो, तो AC का मान ज्ञात कीजिए।



हल : $\because OD \perp AB$

$\therefore AD = DB$

$\because BOC$ व्यास है

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$

[अर्धवृत्त का कोण है]

$\Rightarrow CA \perp AB$

स्पष्ट है कि, $OD \parallel CA$ तथा D , AB का मध्यबिंदु है तथा O , BC का मध्यबिंदु है।

$\therefore OD = \frac{1}{2} \times AC$

$\Rightarrow 5 = \frac{1}{2} \times AC$

$\Rightarrow AC = 5 \times 2 = 10$ सेमी. **उत्तर**

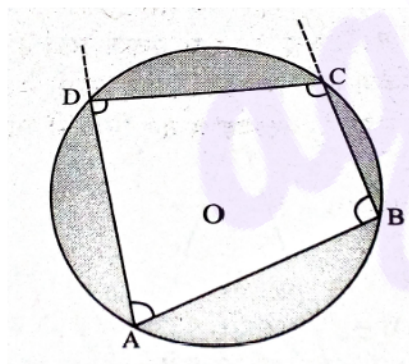
[त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं के मध्यबिंदुओं को मिलाने वाली रेखा, तीसरी भुजा के समान्तर व आधी होती है।] (थेल्स प्रमेय)

करके देखें -

Page No.:292

प्रश्न. किसी भी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त पर कोई चार बिंदु लेकर चतुर्भुज बनाइए। उनके सम्मुख कोणों की माप कर उनका योगफल ज्ञात कीजिए।

हल:



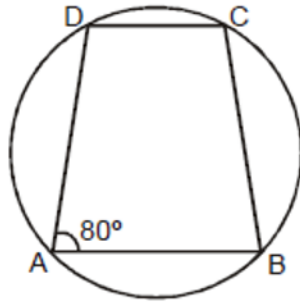
$\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 88^\circ$, $\angle C = 105^\circ$, $\angle D = 92^\circ$

$\angle A + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$

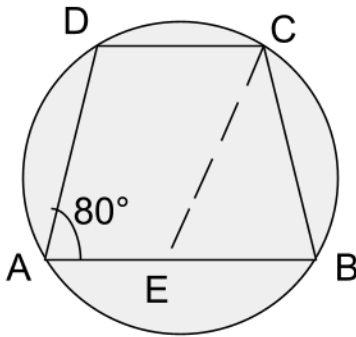
$\angle B + \angle D = 88^\circ + 92^\circ = 180^\circ$. **उत्तर**

Page No.:294

प्रश्न 1. दी गई आकृति में $AB \parallel CD$, यदि $\angle DAB = 80^\circ$ तो चतुर्भुज के शेष अंतःकोणों का मान ज्ञात कीजिए।



हल: दिया है- $AB \parallel CD$ तथा $\angle DAB = 80^\circ$



चित्रानुसार □ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$$\therefore \angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BCD + 80^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BCD = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \dots\dots\dots(1)$$

अब एक रेखा CE खींचा जो AB को E पर मिलती है और $CE \parallel AD$ ।

$$\text{अब } \angle CEB = \angle DAB = 80^\circ$$

[संगत कोण हैं।]

$\therefore$ □ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। [रचना से]

$$\therefore \angle DCE = 80^\circ$$

[समा. □ के सम्मुख कोण है]

$$\therefore \angle BCD = 100^\circ \text{ [समी. 1 से]}$$

$$\Rightarrow \angle BCE + \angle ECD = 100^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BCE + 80^\circ = 100^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BCE = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ \dots\dots\dots(2)$$

अब $\triangle BCE$ में,

$$\angle EBC + \angle BCE + \angle CEB = 180^\circ \text{ [}\therefore \text{ त्रिभुज के आंतरिक कोणों का योग}$$

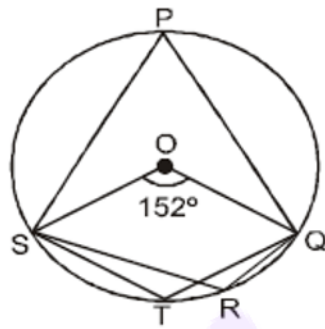
$$\Rightarrow \angle EBC + 20^\circ + 80^\circ = 180^\circ \text{ } 180^\circ \text{ होता है।]}$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

अब $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$
 [चक्रीय चतु. के सम्मुख कोण है]
 $\Rightarrow 80^\circ + \angle ADC = 180^\circ$
 $\Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$
 अतः शेष कोण $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle ADC = 100^\circ$
 तथा $\angle BCD = 100^\circ$ उत्तर

Page No.:294

प्रश्न 2. दी गई आकृति में $\angle QRS$ तथा $\angle QTS$ ज्ञात कीजिए।



हल: $\because$ वृत्त के किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा शेष परिधि के किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

$$\therefore \angle SOQ = 2 \times \angle SPQ$$

$$\Rightarrow 152^\circ = 2 \times \angle SPQ$$

$$\Rightarrow \angle SPQ = \frac{152^\circ}{2} = 76^\circ$$

अब $\because$ $\square PSTQ$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$$\therefore \angle SPQ + \angle STQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 76^\circ + \angle STQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle STQ = 180^\circ - 76^\circ$$

$$\Rightarrow \angle QTS = 104^\circ \text{ उत्तर}$$

परन्तु $\angle STQ$ व $\angle SRQ$ वृत्त के एक ही खण्ड में बने कोण है।

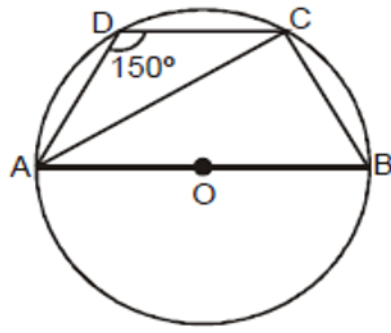
$$\therefore \angle SRQ = \angle STQ$$

$$\Rightarrow \angle SRQ = 104^\circ$$

$$\text{अतः } \angle QRS = \angle QTS = 104^\circ \text{ उत्तर}$$

Page No.:294

प्रश्न 3. दी गई आकृति में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। जिसकी भुजा AB वृत्त का व्यास है। यदि $\angle ADC = 150^\circ$ हो, तो $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।



हल: $\because$ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ,$$

[सम्मुख कोण A है।]

$$\Rightarrow \angle ABC + 150^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \quad \dots\dots(1)$$

$\because$ AOB वृत्त का व्यास है।

$\therefore \angle ACB$ अर्द्धवृत्त का कोण होगा।

$$\text{अतः} \quad \angle ACB = 90^\circ$$

अब $\triangle BAC$ में, [$\because$ त्रिभुज के आंतरिक कोणों का योग 180° होता है]

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$$

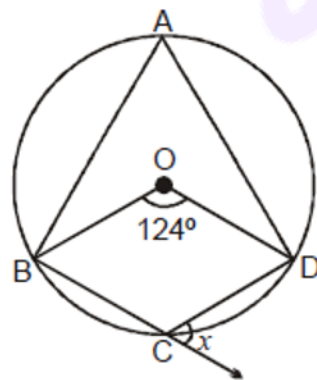
$$\Rightarrow \angle BAC + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAC = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAC = 60^\circ \quad \text{उत्तर}$$

Page No.:294

प्रश्न 4. दी गई आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए।



हल : $\because$ वृत्त के किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, उसके द्वारा परिधि के शेष भाग में अन्तरित कोण का दुगुना होता है।

$$\begin{aligned}\therefore \angle BOD &= 2 \times \angle BAD \\ \Rightarrow 124^\circ &= 2 \times \angle BAD \\ \Rightarrow \angle BAD &= \frac{124^\circ}{2} = 62^\circ \dots\dots(1)\end{aligned}$$

अब $\therefore$ □ ABCD चक्रीय चतुर्भुज है।

$$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

[सम्मुख कोणों का योग]

$$\Rightarrow 62^\circ + \angle BCD = 180^\circ,$$

[समी. (1) से]

$$\Rightarrow \angle BCD = 180^\circ - 62^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BCD = 118^\circ$$

$$\text{अब } \angle BCD + x = 180^\circ$$

[रेखीय युग्म अभिगृहीत से]

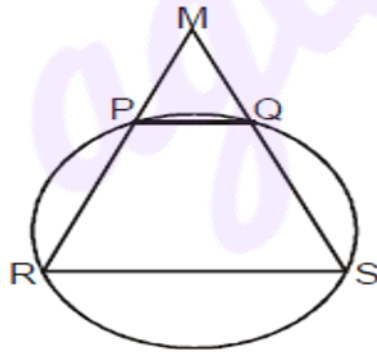
$$\Rightarrow 118 + x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = 180^\circ - 118^\circ$$

$$\Rightarrow x = 62^\circ \text{ उत्तर}$$

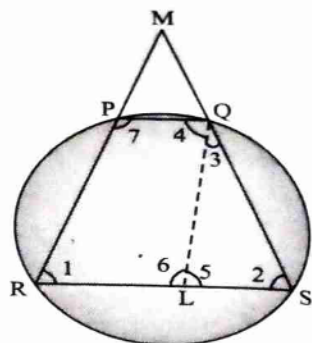
Page No.:295

प्रश्न 5. एक वृत्त की दो समांतर जीवाँ PQ और RS हैं तथा रेखाँ RP और SQ बिंदु M पर प्रतिच्छेद करती हैं (देखिए आकृति) सिद्ध कीजिए कि $MP = MQ$.



हल : $PQ \parallel RS$ [दिया है]

बिंदु Q से $QL \parallel PR$ खींचे जो RS को बिंदु L पर मिलती है।



∴ □ PRLQ एक समांतर चतुर्भुज है।

$$\therefore \angle 6 = \angle 7 \quad \dots\dots\dots(1)$$

[समा. चतुर्भुज के सम्मुख कोण है]

परन्तु $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ \quad \dots\dots\dots(2)$

[रेखिययुग्म अभि. से]

तथा $\angle 7 + \angle 2 = 180^\circ \quad \dots\dots\dots(3)$

[चक्रीय चतु. के सम्मुख कोण हैं]

समी. (2), (3) व (4) से,

$$\angle 5 = \angle 2 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\therefore QL = QS \quad \dots\dots\dots(5)$$

[त्रिभुज में समान कोण की भुजाएँ हैं]

परन्तु $PR = QL \quad \dots\dots\dots(6)$

[समा. चतु. की सम्मुख भुजाएँ हैं]

∴ समी. (5) व (6) से,

$$PR = QS \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 5 \quad [\text{संगत कोण हैं}] \quad \dots\dots\dots(8)$$

समी. (4) व (8) से,

$$\angle 1 = \angle 2$$

$$\Rightarrow MR = MS \quad \dots\dots\dots(9)$$

[त्रिभुज में समान कोण की सम्मुख भुजाएँ हैं]

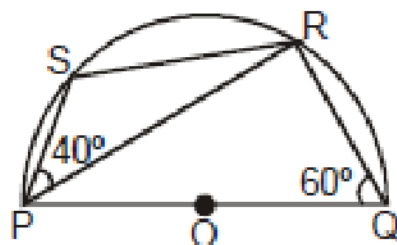
समी. (9) में समी. (7) घटाने पर,

$$MR - PR = MS - QS$$

$$\Rightarrow MP = MQ \quad \text{सिद्ध हुआ।}$$

Page No.:295

प्रश्न 6. दी गई आकृति में PQ अर्द्धवृत्त का व्यास है। यदि $\angle PQR = 60^\circ$ तथा $\angle SPR = 40^\circ$ हो, तो $\angle QPR$ और $\angle PRS$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है - POQ = व्यास
 $\angle PQR = 60^\circ$

∴ POQ व्यास है।

∴ $\angle PRQ$ अर्धवृत्त का कोण होगा।

$$\Rightarrow \angle PRQ = 90^\circ$$

अब $\triangle PRQ$ में,

$$\angle PRQ + \angle RPQ + \angle PQR = 180^\circ \quad [\because \text{त्रिभुज के अंतः कोणों का योग} = 180^\circ]$$

$$\Rightarrow 90^\circ + \angle RPQ + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle RPQ = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\Rightarrow \angle RPQ = 30^\circ$$

या $\angle QPR = 30^\circ$ उत्तर

$$\text{अब } \angle PQR + \angle PSR = 180^\circ$$

[चक्रीय चतु. के सम्मुख कोण हैं]

$$\Rightarrow 60^\circ + \angle PSR = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PSR = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

तथा $\triangle PSR$ में,

$$\angle SPR + \angle PSR + \angle PRS = 180^\circ \quad [\because \text{त्रिभुज के आंतरिक कोणों का योग } 180^\circ \text{ होता है}]$$

$$\Rightarrow 40^\circ + 120^\circ + \angle PRS = 180^\circ$$

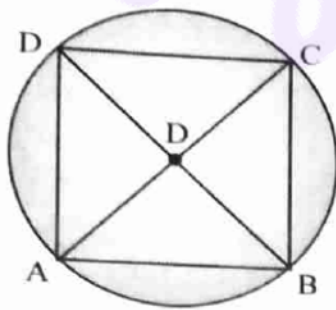
$$\Rightarrow \angle PRS = 180^\circ - 160^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PRS = 20^\circ \text{ उत्तर}$$

Page No.:295

प्रश्न 7. दी गई आकृति में त्रिभुज ABC समबाहु त्रिभुज है। $\angle BDC$ और $\angle BEC$ ज्ञात कीजिए।

हल : माना □ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC व BD हैं जिस पर वृत्त का केंद्र स्थित है।



∴ वृत्त का प्रत्येक व्यास वृत्त को दो बराबर भागों में बांटता है तथा वृत्तार्ध का कोण समकोण होता है।

∴ व्यास AC द्वारा वृत्तार्ध $\widehat{ABC}$ तथा $\widehat{ADC}$ पर बनाया गया कोण

$$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ \dots\dots\dots(1)$$

इसी प्रकार BD द्वारा वृत्तार्ध $\widehat{BAD}$ तथा $\widehat{BCD}$ पर बनाया गया कोण

$$\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ \dots\dots\dots(2)$$

तथा AC व BD दोनों विकर्ण वृत्त के व्यास हैं।

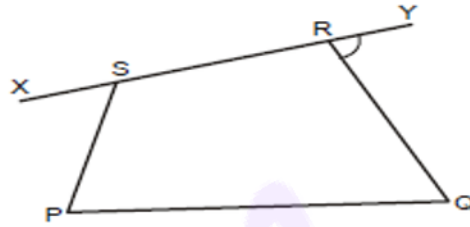
$$AC = BD \dots\dots\dots(3)$$

अतः समी. (1), (2) व (3) से चक्रीय चतुर्भुज ABCD एक आयत है।

सिद्ध हुआ।

Page No.:295

प्रश्न 8. आकृति में PQRS एक चतुर्भुज है। यदि $\angle P = \angle QRY$ है तो सिद्ध कीजिए कि PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज हैं।



हल : दिया है: □ PQRS में,

$$\angle P = \angle QRY \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{परन्तु } \angle QRS + \angle QRY = 180^\circ$$

(रेखीय युग्म अभि. से)

समी. (1) व (2) से,

$$\angle QRS + \angle P = 180^\circ$$

∴ □ PQRS में $\angle QRS$ व $\angle P$ सम्मुख कोणों का एक युग्म हैं।

∴ □ PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज हैं। सिद्ध हुआ।

Page No.:295

प्रश्न 9. यदि एक समलम्ब चतुर्भुज की असमान्तर भुजाएँ बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय चतुर्भुज होगा।

हल: माना कि समलम्ब □ ABCD में $AD \parallel BC$

तथा $AD \parallel BC$

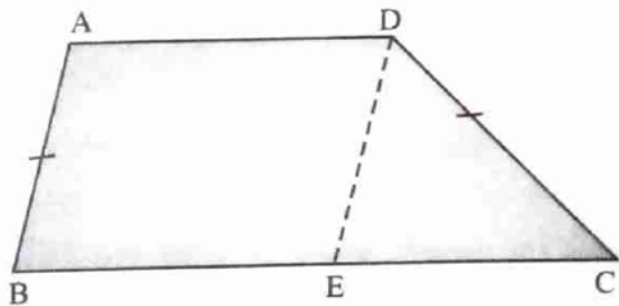
तब $AB = DC$ (दिया है।)

एक रेखा DE खींचा जो कि BC भुजा को E पर मिलती है और $DE \parallel AB$

∴ $AB \parallel DE$ (रचना से)

$$\therefore AB = DE \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{परन्तु } AB = DC \dots\dots\dots(2)$$



समी. (1) व (2) से,

$$DE = DC$$

$$\Rightarrow \angle DEC = \angle DCE \quad \dots\dots(3)$$

$\therefore \square ABED$ समांतर चतुर्भुज है। (रचना से)

$$\therefore \angle A = \angle BED \quad \dots\dots(4)$$

(समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण है)

$$\text{परन्तु } \angle BED + \angle CED = 180^\circ$$

(रेखीय युग्म अभि. से)

$$\Rightarrow \angle A + \angle DCE = 180^\circ$$

[समी. (3) व (4) से]

$$\Rightarrow \angle A + \angle DCB = 180^\circ$$

परन्तु $\angle A$ व $\angle DCB$, $\square ABCD$ के सम्मुख कोण हैं।

$\therefore$ चतुर्भुज ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज हैं। सिद्ध हुआ।

सोचें एवं चर्चा करें -

Page No.:297

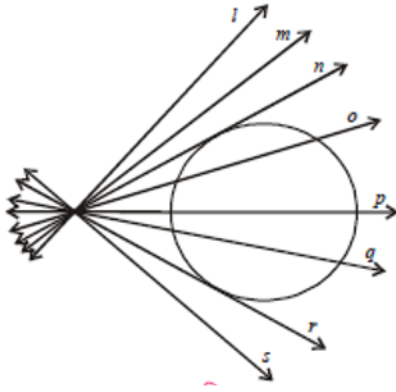
प्रश्न. वृत्त पर स्थित किसी बिंदु पर एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। क्यों ?

हल: अन्य स्पर्श रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा नहीं होगी। वह वृत्त को प्रतिच्छेद करती हुई जाएगी।

करके देखें -

Page No.:297

प्रश्न. नीचे दी गई आकृति में अप्रतिच्छेदी रेखा, छेदक और स्पर्श रेखाओं को पहचान कर अपनी कॉपी में उनके नाम लिखिए।



उत्तर - अप्रतिच्छेदी रेखा - l, m, s

स्पर्श रेखा - n, r

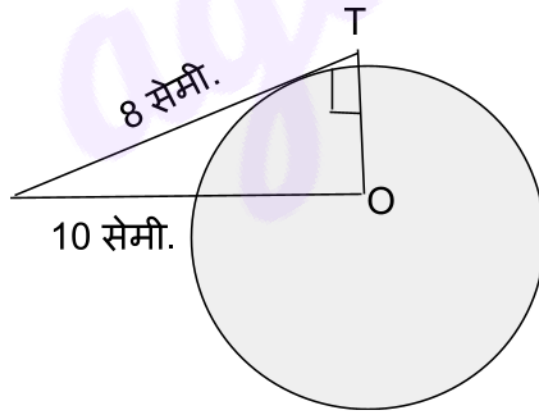
छेदक रेखा - o, p, q

प्रतिच्छेदी रेखा और छेदक रेखा एक ही चीज है। अतः पाठ्यपुस्तक में गलत लिखा है कि प्रतिच्छेदी और छेदक को पहचानों। उसे अप्रतिच्छेदी रेखा लिखना था।

Page No.:305

प्रश्न 1. एक बिन्दु P से जो वृत्त के केन्द्र से 10 सेमी वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 8 सेमी है। वृत्त त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है: वृत्त के केन्द्र O से बाह्य बिन्दु P की दूरी $OP = 10$ सेमी,



स्पर्श रेखाखण्ड $PT = 8$ सेमी

वृत्त की त्रिज्या = OT

$\therefore OT \perp PT$

$\Rightarrow \angle OTP = 90^\circ$

अतः समकोण $\triangle OTP$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OP^2 = OT^2 + PT^2$$

$$10^2 = OT^2 + 8^2$$

$$100 = OT^2 + 64$$

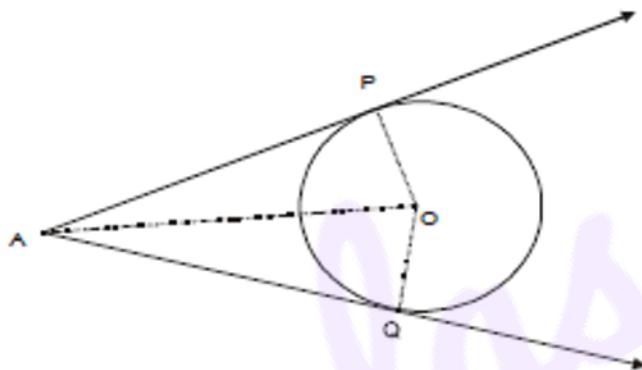
$$OT^2 = 100 - 64 = 36$$

$$= 6^2$$

∴ अतः OT = 6. वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है। उत्तर

Page No.:305

प्रश्न 2. आकृति में $\angle POQ = 100^\circ$, AP तथा AQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। $\angle PAO$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल: दिया है: AP व AQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

तथा $\angle POQ = 100^\circ$

∴ बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाखण्ड बराबर होता है।

∴ PA = PQ

तथा स्पर्श बिन्दु से खींची गई त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्बवत् होती है।

∴ $\angle OPA = \angle OQA = 90^\circ$... (1)

अतः $\triangle OPA \cong \triangle OQA$

(समकोण-कर्ण-भुजा सर्वांगसमता)

⇒ $\angle POA = \angle QOA$

∴ $\angle POA = \frac{\angle POQ}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$ (2)

अब $\triangle PAO$ में,

$\angle PAO + \angle POA + \angle OPA = 180^\circ$ [∵ त्रिभुज के अंतः कोणों का योग = 180°]
(त्रिभुज के अन्तः कोण)

⇒ $\angle PAO + 50^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

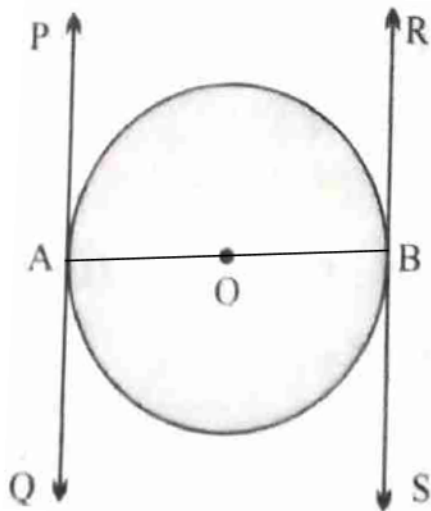
⇒ $\angle PAO + 140^\circ = 180^\circ$

$$\therefore \angle PAO = 180^\circ - 140^\circ \\ = 40^\circ. \text{ उत्तर}$$

Page No.:306

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समान्तर होती हैं।

हल: माना वृत्त का केन्द्र O, व्यास AOB तथा PAQ एवं RBS स्पर्श रेखाएँ हैं।



$\therefore$ स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लम्बवत् होती है।

$$\therefore \angle OAP = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAP = 90^\circ \dots\dots(1)$$

इसी प्रकार,

$$\angle OBS = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ABS = 90^\circ \dots\dots(2)$$

समी. (1) व (2) से,

$$\angle BAP = \angle ABS = 90^\circ$$

परन्तु $\angle BAP$ व $\angle ABS$ एकांतर कोण भी हैं।

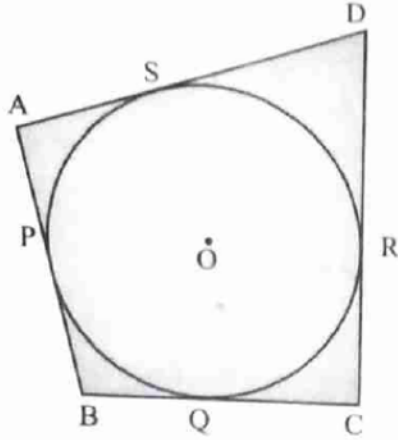
$$\therefore \overleftrightarrow{PAQ} = \overleftrightarrow{RBS}$$

अतः व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं। **सिद्ध हुआ।**

Page No.:306

प्रश्न 4. एक वृत्त, एक चतुर्भुज ABCD के चारों भुजाओं को स्पर्श करती है। सिद्ध कीजिए कि $AB + CD = BC + DA$.

हल: माना वृत्त का केन्द्र O तथा □ ABCD के भुजाओं AB, BC, CD व DA को क्रमशः P, Q, R, S पर स्पर्श करती है।



∴ बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाखण्ड की लम्बाई समान होती हैं।

- ∴ बिन्दु A से $AP = AS$ (1)
 बिन्दु B से $BP = BQ$ (2)
 बिन्दु C से $CR = CQ$ (3)
 बिन्दु D से $DR = DS$ (4)

समीकरण (1), (2), (3) एवं (4) को जोड़ने पर,

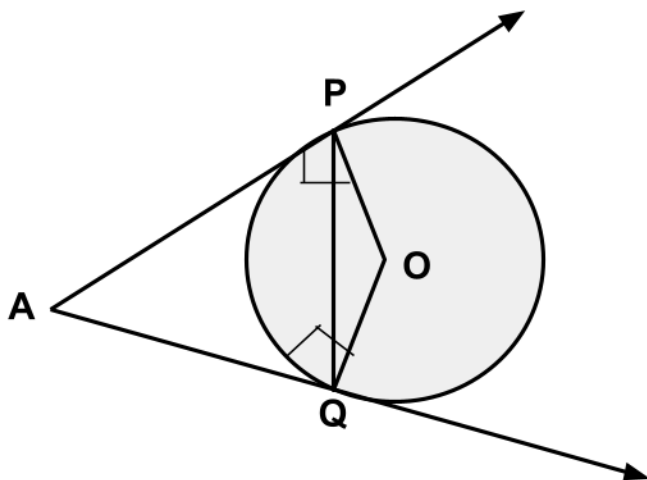
$$\begin{aligned} &\Rightarrow AP + BP + CR + DR \\ &= AS + BQ + CQ + DS \\ &\Rightarrow (AP + BP) + (CR + DR) = (AS + DS) + (BQ + CQ) \\ &\Rightarrow AB + CD = AD + BC \\ &\Rightarrow AB + CD = BC + DA \text{ सिद्ध हुआ।} \end{aligned}$$

Page No.:306

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड द्वारा केंद्र पर अन्तरित कोण का सम्पूर्ण होता है।

हल: माना वृत्त का केन्द्र O तथा बाह्य बिन्दु A से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा AP व AQ है।

सिद्ध करना है: $\angle PAQ + \angle POQ = 180^\circ$



उपपत्ति : $\because$ स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्बवत होती है।

$$\therefore \angle OPA = 90^\circ$$

$$\text{तथा } \angle OQA = 90^\circ$$

अब $\square PAQO$ में सभी अन्तः कोणों का योग 360° होता है।

$$\therefore \angle PAQ + \angle AQO + \angle QOP + \angle OPA = 360^\circ$$

$$\Rightarrow (\angle PAQ + \angle QOP) + (\angle AQO + \angle OPA) = 360^\circ$$

$$\Rightarrow (\angle PAQ + \angle QOP) + (90^\circ + 90^\circ) = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PAQ + \angle QOP = 360^\circ - 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PAQ + \angle QOP = 180^\circ$$

$$\text{या } \angle PAQ + \angle POQ = 180^\circ$$

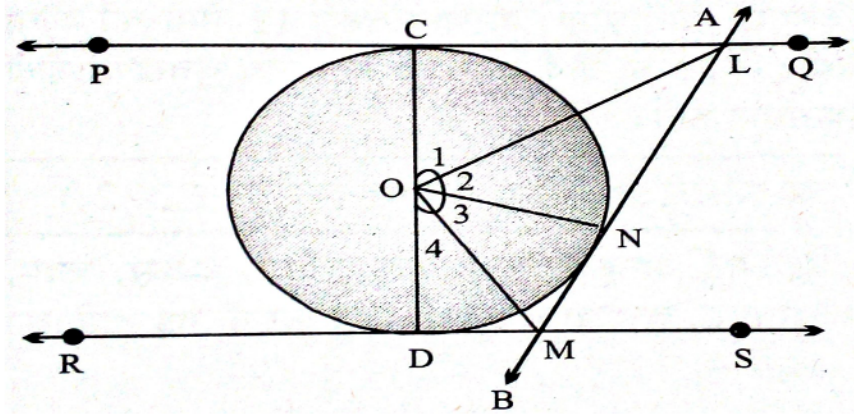
अतः $\angle PAQ$ व $\angle POQ$ संपूरक है। **उत्तर**

Page No.:306

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के दो समान्तर स्पर्श रेखाओं के बीच खींची गई एक अन्य स्पर्श रेखा का अन्तः खण्ड केन्द्र पर समकोण अन्तरित करता है।

हल : दिया है : केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएँ $PQ \parallel RS$ जो वृत्त को क्रमशः C व D पर स्पर्श करते हैं। तथा एक अन्य स्पर्श रेखा AB, PQ व RS को क्रमशः L व M पर काटती है, वृत्त को N पर स्पर्श करती है। O से क्रमशः C, D व N को मिलाया।

सिद्ध करना है: $\angle LOM = 90^\circ$



उपपत्ति : $\because$ OC पर OD, स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्याएँ हैं तथा $PQ \parallel RS$ है।
(दिया है।)

$\therefore$ C.O.D समरेख है।

अतः $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ (1) [$\because$ रेखीय युग्म कोण]

अब $\triangle OCL$ व $\triangle ONL$ में,

$$LC = LN$$

(बाह्य बिन्दु से खींची स्पर्श रेखाएँ)

$$LO = LO \text{ (उभयनिष्ठ भुजा है।)}$$

$$OC = ON$$

(एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$$\therefore \triangle OCL \cong \triangle ONL$$

(भु. - भु. - भु. सर्वांगसमता)

$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$$
(2)

(स. त्रि. के सं. अवयव हैं)

इसी तरह, $\triangle ONM$ और $\triangle ODM$ से $\triangle ONM \cong \triangle ODM$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4$$
(3)

समी. (1), (2) व (3) से,

$$\angle 2 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 3 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\angle 2 + \angle 3) = 180^\circ$$

$$(\because \angle 2 + \angle 3 = \angle LOM)$$

$$\Rightarrow \angle LOM = 90^\circ \text{ सिद्ध हुआ।}$$