This Question Paper contains 7 Printed Pages]

051(G)

(MARCH, 2003)

સમય : ૩ કલાક **કુલ ગુણ : ૭૫**

સૂચના :

(૧) આ પ્રશ્નપત્રમાં મુખ્ય **પાંચ** પ્રશ્નો છે. બધા ફરજિયાત છે. દરેક પ્રશ્નના ૧૫ ગુણ છે.

(૨) જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નના પૂરા ગુણ દર્શાવે છે.

પ્ર.૧. (અ) (1) જો વાસ્તવિક વિધેય f એ a ના કોઈક છિદ્રિત સામીપ્યમાં સર્વત્ર વ્યાખ્યાયિત હોય તથા $\lim_{x\to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોય તો તે લક્ષ અનન્ય હોય તેમ સાબિત કરો. 2

(2) વ્યાખ્યા આપો. શ્રેણી લક્ષ, એક સૂત્રી શ્રેણી 2

(બ) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) $\lim_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{\pi - 4\sec^{-1} x}{x-\sqrt{2}}$

(2) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$, $n \in \mathrm{N}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots+(2n-1)^2}{[1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)].n}$

(ક) (1) $\lim_{x \to -2} \frac{3x^2+5x-2}{3\sin(x+2)+2x+x^2}$ મેળવો. 2

(2) **ગમે તે બે** ગણો. 2

(a) $\lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}-1\right)$ મેળવો.

(b) $\left\{x / \frac{1}{|3x+2|} \leq \frac{1}{5}, x \in R-\left\{-\frac{2}{3}\right\}\right\}$ ને અંતરાલના પૂરક ગણ તરીકે દર્શાવો.

(c) સાબિત કરો કે $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

(ડ) (1) જો $e^{x-y} = \log x - \log y$ તો સાબિત કરો કે 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log\frac{x}{y} - \frac{1}{x}}{\log\frac{x}{y} - \frac{1}{y}}$$

(2) $\frac{d}{dx}\left(x^x\right)$ મેળવો. 1

પ્ર.૨. (અ) (1) જો $f, g : (a, b) \to R$ એ $x \in (a, b)$ આગળ વિકલનીય હોય તથા $g(x) \neq 0$ તો $\frac{f}{g}$ એ x આગળ વિકલનીય છે તથા 2

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}(f(x)) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{[g(x)]^2}$$

(2) *(a)* સંયોજીત વિધેયના વિકલનની વ્યાખ્યા આપો. 1

(b) સ્થાનીય મહત્તમ કે ન્યૂનત્તમ મૂલ્ય માટેની પ્રથમ વિકલિત કસોટી જણાવો. 1

(બ) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) $y = 2^{\sqrt{x+2}} \cdot x^{x^x}$, માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

(2) $y = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ $(x \neq 0)$, માટે $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

(3) જો $2x = y^{1/m} + y^{-1/m}, x \geq 1$ તો સાબિત કરો કે $(x^2-1)y_2 + xy_1 = m^2y$.

(ક) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) ΔABC ના ખૂણા B ના માપની ગણતરી cos સૂત્ર દ્વારા કરવામાં આવી. જો a, c અચળ હોય તથા b ના માપમાં 2% ની ભૂલ થાય તો B નાં માપમાં કેટલી ભૂલ થાય?

(2) કાટકોણ ત્રિકોણનાં કર્ણની લંબાઈ આપેલ હોય તો સાબિત કરો કે તે સમદ્વિબાજુ કાટકોણ ત્રિકોણ હોય ત્યારે તેનું ક્ષેત્રફળ મહત્તમ હોય.

(3) $f(x) = x^{3/2} - x^{1/2}$, $x \in [0, 1]$ ને રોલનું પ્રમેય લગાડી શકાય કે નહિ તે ચકાસી શકય હોય તો $c \in [0, 1]$ શોધો જેથી $f'(c) = 0$ થાય.

(4) રેખા $y = 4x + 1$ એ $y^2 = ax^3 + b$ ને (2, 3) આગળ સ્પર્શે છે તો a, b શોધો.

(ડ) નીચેનાં પ્રશ્નોના જવાબ આપો. 3

(1) સાબિત કરો કે $y = e^{x/c}$ ના અવસ્પર્શકની લંબાઈ કોઈપણ બિંદુ આગળ અચળ છે.

(2) આસન્ન મૂલ્ય મેળવો $\sin^{-1}(0.51)$.

(3) સાબિત કરો $e^x > 1 + x$, $x \in R - \{0\}$.

પ્ર.૩. (અ) (1) અનિયત સંકલનનો ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ લખી સાબિત કરો. 2

અથવા

સાબિત કરો કે $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$

$= \log\left|\tan \frac{x}{2}\right| + c, \quad x \neq n\pi, \ n \in Z$.

(2) જો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત હોય તો 2

સાબિત કરો કે $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx$.

(બ) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) $\int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}\, dx$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}\, dx$

(3) $\int x^2 \tan x \sec^2 x\, dx$

(ક) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) $\int_0^{\pi/2} \frac{5^{\sin\theta}}{5^{\cos\theta}+5^{\sin\theta}}\, d\theta$

(2) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\ dx$

(3) $\int_0^1 \left(3x^2+2x-1\right) dx$ સરવાળાના લક્ષ તરીકે મેળવો.

(ડ) (1) $\int \frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)^2}\, dx$ મેળવો. 2

(2) સાબિત કરો કે 1

$\int e^x \{f(x)+f'(x)\}dx = e^x f(x)+c$

પ્ર.૪. (અ) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) જેનાં કેન્દ્ર Y - અક્ષ ઉપર હોય અને જે X - અક્ષને સ્પર્શતા હોય તેવા વર્તુળોના સમુદાયનું વિકલ સમીકરણ $\left(x^2-y^2\right)\frac{dy}{dx} = 2xy$ છે તેમ સાબિત કરો.

(2) ઉકેલ મેળવો; $x\frac{dy}{dx} = y(\log y - \log x + 1)$

(3) ઉકેલ મેળવો; $(1+2y)\,dx - (4-x)\,dy = 0$

(4) ચંપલ બનાવતી એક કંપનીમાં x જોડ ચંપલ બનાવવાનો સીમાંત ખર્ચ, $6 + 10x - 6x^2$ છે. એક જોડ ચંપલ બનાવવાનો કુલ ખર્ચ રૂ. 12 છે. તો કુલ ખર્ચ C નું વિધેય મેળવો.

(બ) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) રેખા $x = c$ એ વક્ર $y = 4x - x^2$, X- અક્ષ અને રેખાઓ $x = 1$, $x = 3$ વચ્ચેના પ્રદેશનું બે સમક્ષેત્રી વિભાગમાં વિભાજન કરે છે. c શોધો.

(2) પરવલય $y = x^2 - x - 2$ અને X- અક્ષ વચ્ચેના પ્રદેશનું X-અક્ષ ની આસપાસ પરિભ્રમણ કરાવતાં રચાતા પરિક્રમજ ઘનપદાર્થનું ઘનફળ શોધો.

(3) $5x^2 = y$ અને $2x^2 - y + 9 = 0$ વક્રો વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

(ક) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) એક પેટીમાં 2 કાળા અને 2 સફેદ દડા છે. બે દડા યાદચ્છિક રીતે પુરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે. જો X પસંદ થયેલ દડા પૈકી કાળા દડાની સંખ્યા દર્શાવે તો યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના વિતરણ મેળવો.

(2) એક યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 10 અને 5 છે. તો $E(X^2)$ અને $E\left(\frac{X-10}{5}\right)^2$ શોધો.

(3) છોકરાઓના એક છાત્રાલયમાં 100 વિદ્યાર્થીઓ છે. તે પૈકીનાં 20 ધૂમ્રપાન કરે છે. જો 100 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 5 વિદ્યાર્થીઓની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે તો તે પૈકીના 2 થી વધુ અને 5 થી ઓછા વિદ્યાર્થીઓ ધૂમ્રપાન કરે તેની સંભાવના શોધો.

(૬) (1) $\int \frac{1}{x+5x\log x}\,dx$ મેળવો. 1

(2) *(a)* વિકલ સમીકરણની વ્યાખ્યા આપો. 1

(b) વિયોજનીય ચલ સ્વરૂપનાં વિકલ સમીકરણનું સ્વરૂપ લખો. તેનો વ્યાપક ઉકેલ મેળવવાની રીત જણાવો. 1

પ્ર.૫. (અ) (1) સંભાવનાની પૂર્વધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા આપો. પ્રચલિત સંકેતમાં 2

$P(A)=\frac{r}{n}$ સાબિત કરો. $(A \neq \phi)$

અથવા

(a) અશક્ય ઘટના માટે સાબિત કરો કે $P(\phi)=0$. 1

(b) ઘટના A માટે સાબિત કરો કે $0 \leq P(A) \leq 1$. 1

(2) જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય તો ઘટનાઓ A અને B', A' અને B તથા A' અને B' પણ નિરપેક્ષ છે તેમ સાબિત કરો. 2

(બ) ગમે તે બે ગણો. 4

(1) ચાર પત્રોની ચાર કવરમાં (દરેકમાં એક) યાદૃચ્છિક ગોઠવણી કરવામાં આવે છે. એક કરતાં વધુ પત્ર સાચા કવરમાં ન હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(2) એક પેટીમાં 6 કાળા અને 3 લાલ દડા છે. જો 5 દડા પુરવણી સિવાય પસંદ કરવામાં આવે તો *(a)* બરાબર બે દડા લાલ હોય અને *(b)* ઓછામાં ઓછા બે દડા લાલ હોય તેની સંભાવના મેળવો.

(3) બે ઈનામ 10 છોકરાઓ અને 5 છોકરીઓમાં વહેંચવાના છે. *(a)* બંને ઈનામ છોકરીઓને મળે અને *(b)* એક ઈનામ છોકરાને અને એક ઈનામ છોકરીને મળે તેની સંભાવના કેટલી?

(ક) (1) સાબિત કરો કે $P\left(\frac{A' \cup B'}{C}\right) = 1 - P\left(\frac{A \cap B}{C}\right)$ 2

(2) *(a)* ઘટનાઓ A અને B માટે સાબિત કરો કે 1
$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$

(b) જો $P(B) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.7$ અને $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.2$ 1
તો P(A) શોધો.

(ડ) (1) કમ્પ્યુટરમાં વપરાતી મુખ્ય ભાષાઓનાં નામ જણાવો. 1

(2) $(185.3125)_{10}$ ને અષ્ટાંકી સ્વરૂપમાં તેમજ દ્વિઅંકી સ્વરૂપમાં ફેરવો. 2

051(G)

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

પ્રશ્ન 1

(અ)

(1) ધારો કે,

$\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ તથા $\lim_{x \to a} f(x) = l_2$

જ્યાં, $l_1 \neq l_2$ તથા $l_1, l_2 \in R$

હવે, વ્યાખ્યાનુસાર પ્રત્યેક $\varepsilon > 0$ ને અનુરૂપ $\delta_1 > 0$ તથા $\delta_2 > 0$ મળે કે જેથી,

$\forall x, 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$

$\forall x, 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon$

હવે, ધારો કે, $\delta =$ ન્યૂનતમ $\{\delta_1, \delta_2\}$

$\therefore \delta \leq \delta_1$ તથા $\delta \leq \delta_2$

$\therefore 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$

$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon$

	+		+		+		=	

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

હવે, $0 < |x - a| < \delta$ હોય તેવા પ્રત્યેક x માટે,

$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2|$

$\Rightarrow |l_1 - l_2| \le |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2|$

$\Rightarrow |l_1 - l_2| \le |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2|$

$\Rightarrow |l_1 - l_2| < \epsilon + \epsilon$

$\Rightarrow |l_1 - l_2| < 2\epsilon$

હવે, આ અસમતા પ્રત્યેક $\epsilon > 0$ ને અનુરૂપ $\delta > 0$ મેળવી ને સત્ય બને છે.

$\therefore \epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$ માટે પણ તે યોગ્ય $\delta > 0$ માટે સત્ય છે.

અહીં, $l_1 \ne l_2$ હોવાથી $|l_1 - l_2| > 0$ માટે ϵ ની આવી કિંમત લઈ શકાય.

$\therefore |l_1 - l_2| < 2\epsilon = |l_1 - l_2|$

જે શક્ય નથી.

$\therefore$ આપણી ધારણા કે વિધેય f ને એકથી વધુ લક્ષ હોઈ શકે તે ખોટી છે.

$\therefore$ વિધેયનું લક્ષ અનન્ય છે.

જે સાબિત થાય છે.

+ + + =

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(2) વ્યાખ્યા :

★ શ્રેણીનું લક્ષ :

આપેલી શ્રેણી $\{a_n\}$ માટે આપણે વાસ્તવિક સંખ્યા l માટે એ પ્રમાણે $\varepsilon > 0$ ને અનુરૂપ $m \in N$ એવો મળે કે બધા,

$n \geq m,\ n \in N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$ તો શ્રેણી $\{a_n\}$ નું લક્ષ l છે તેમ કહેવાય.

તેને સંકેત $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ થી દર્શાવાય છે.

★ અવકૃષ્ટ શ્રેણી :

→ જો શ્રેણી $\{a_n\}$ માટે $\forall\, n_1, n_2 \in N$

$n_1 \geq n_2 \Rightarrow a_{n_1} \geq a_{n_2}$ તો શ્રેણી $\{a_n\}$ ને વર્ધી શ્રેણી કહે છે.

→ જો શ્રેણી $\{a_n\}$ માટે $\forall\, n_1, n_2 \in N$

$n_1 \leq n_2 \Rightarrow a_{n_1} \geq a_{n_2}$ તો શ્રેણી $\{a_n\}$ ને ઘટતી શ્રેણી કહે છે.

→ આમ, વર્ધી અથવા ઘટતી શ્રેણીને અવકૃષ્ટ શ્રેણી કહે છે.

+ + + =

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(B)

(2) $L = \lim_{x \to 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}$, $n \in N$

ધારો કે, $(x-1) = t$ તેથી,

$\Rightarrow x = (1+t)$

તથા $x \to 1 \Rightarrow t \to 0$ થાય.

$\therefore L = \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^{n+1} - (n+1)(1+t) + n}{t^2}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{1 + {}^{(n+1)}C_1 t + {}^{(n+1)}C_2 t^2 + \ldots + t^n - n - nt}{t^2}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{1 + (n+1)t + {}^{(n+1)}C_2 t^2 + {}^{(n+1)}C_3 t^3 + \ldots + t^n - n - nt}{t^2}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{{}^{(n+1)}C_2 t^2 + {}^{(n+1)}C_3 t^3 + \ldots + t^n}{t^2}$

$= \lim_{t \to 0} {}^{(n+1)}C_2 + {}^{(n+1)}C_3 \cdot t + \ldots + t^{n-2}$

$(\because t \to 0 \Rightarrow t \neq 0)$

□ + □ + □ + □ = □

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$\therefore L = (n+1)\,(2 + 0 + \ldots + 0$

$\Rightarrow L = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$

$\Rightarrow \boxed{L = \frac{n}{2}(n+1)}$

(3)

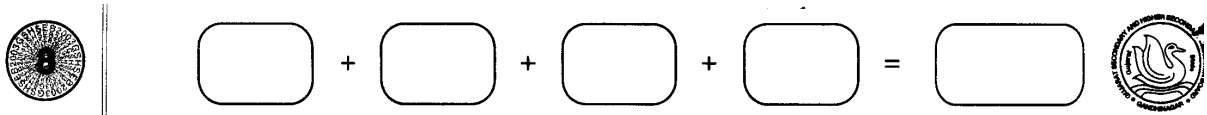
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2}{[1 + 2 + 5 + \ldots + (2n-1)]\,n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\Sigma (4n^2 - 4n + 1)}{n\,\Sigma (2n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\Sigma n^2 - 4\Sigma n + \Sigma 1}{n[2\Sigma n - \Sigma 1]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1) - 4\cdot\frac{n}{2}(n+1) + n}{n - \left[2\times\frac{n}{2}(n+1) - n\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left\{\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}\right\}}{n^3\left\{\left[2\times\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]\right\}}$$



પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}}{1}$$

$$= \frac{2}{3}(1+0)(2+0) - 2(0+0) + 0$$

$$\left(\because \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0\right)$$

$$\therefore \boxed{L = \frac{4}{3}}$$

□ + □ + □ + □ = □

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(3)

(1) $L = \lim_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{3\sin(x+2) + 2x + x^2}$

$= \lim_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + 6x - x - 2}{3\sin(x+2) + x(x+2)}$

$= \lim_{x \to -2} \dfrac{3x(x+2) - 1(3x+2)}{3\sin(x+2) + x(x+2)}$

$= \lim_{x \to -2} \dfrac{(x+2)[3x-1]}{(x+2)\left[\dfrac{3\sin(x+2)}{(x+2)} + x\right]}$

$= \lim_{x \to -2} \dfrac{3x-1}{\dfrac{3\sin(x+2)}{(x+2)} + x}$ $\quad (\because x \to -2 \Rightarrow x \neq -2)$

$= \dfrac{3(-2)-1}{3(1)-2}$ $\quad (\because x \to -2 \Rightarrow (x+2) \to 0)$

$= \dfrac{-6-1}{3-2}$

$\therefore \boxed{L = -7}$

10 ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(2)

(a) $L = \lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt[x]{\frac{\pi}{4}} - 1\right)$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$

$\therefore \boxed{L = \log_e \frac{\pi}{4}}$ $\left(\because x \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0\right)$

(c) અહીંયા,

$\left|x \sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x \sin\frac{1}{x}\right|$

$= |x| \left|\sin\frac{1}{x}\right|$

$\leq |x|$ $\left(\because \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1\right)$

હવે, $\varepsilon > 0$ આપેલ,

$|x| < \varepsilon \Rightarrow \left|x \sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$

$|x - 0| < \varepsilon \Rightarrow \left|x \sin\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$

$\delta > |x - 0| < \varepsilon$

(જ્યાં $\delta = \varepsilon > 0$)

+ + + = 100

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$\therefore \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

જે સાબિત થાય છે.

(5)

(1) ધારો કે,

$$e^{x-y} = \log x - \log y$$

$$\Rightarrow e^{x-y} = \log \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow x - y = \log\left(\log \frac{x}{y}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log \frac{x}{y}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\log \frac{x}{y}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{y}} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log \frac{x}{y}} \cdot \frac{y}{x} \cdot \left(\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right)$$

+ + + =

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$\Rightarrow \log\frac{x}{y} - \log\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{y - x\,dy/dx}{y}\right)$$

$$\Rightarrow xy\log\frac{x}{y} - xy\log\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = y - x\frac{dy}{dx}$$

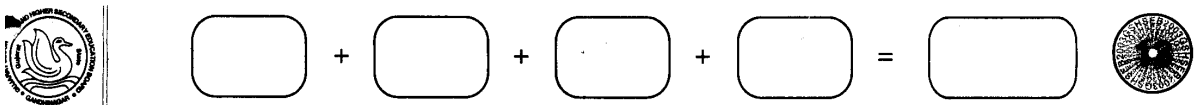
$$\Rightarrow \left(x - xy\log\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = y - xy\log\frac{x}{y}$$

બંને બાજુ $xy \neq 0$ વડે ભાગતાં,

$$\left(\frac{1}{y} - \log\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \log\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\log\frac{x}{y} - \frac{1}{x}}{\log\frac{x}{y} - \frac{1}{y}}}$$

જે આપેલ છે.



પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(2) ઉદા) $y = x^x$ (ધારો),

$\Rightarrow \log y = x \log x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + (\log x)(1)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \cdot (1 + \log x)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1 + \log x)}$

+ + + =

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

પૃષ્ઠ 2

(1) અહીં, g એ વિકલનીય હોવાથી સતત છે અને આથી $\lim_{x \to x} g(x) = g(x) \neq 0$ (∵ પક્ષ) હોવાથી x નું (a, b) માં અપવેષ્ટ એવું સામિપ્ય અળે જ કે જેથી તમામ પ્રત્યેક x માટે $g(x) \neq 0$

હવે, આવા સામિપ્યમાં આપેલા પ્રત્યેક $x \neq x$ માટે,

$$\lim_{x \to x} \frac{f(x)/g(x) - f(x)/g(x)}{(x - x)}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{f(x) \cdot g(x) - g(x) f(x)}{(x - x)\, g(x)\, g(x)}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{f(x) \cdot g - (x) g (x) + (x) g (x) f - (x) f \cdot g(x)}{(x - x)\, g(x)\, g(x)}$$

$$= \lim_{x \to x} \frac{g(x)\{f(x) - f(x)\} - f(x)\{g(x) - g(x)\}}{(x - x)\, g(x)\, g(x)}$$

$$= \lim_{x \to x} g(x)\left\{\frac{f(x) - f(x)}{x - x}\right\} - f(x)\left\{\frac{g(x) - g(x)}{x - x}\right\}$$

$$g(x)\, g(x)$$

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$= g(x)\left\{\lim_{t\to x}\frac{h(t)-h(x)}{t-x}\right\} - h(x)\left\{\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right\}$$

$$g(x)\lim_{t\to x} g(t)$$

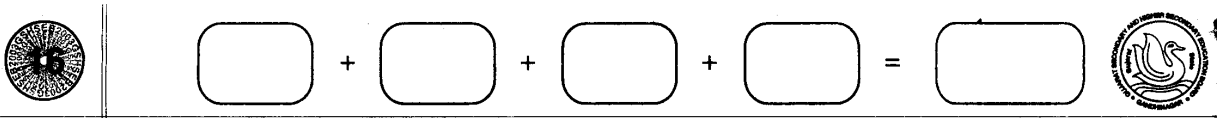
($\because h(x)$ અને $g(x)$ અચળ છે તથા
g વિકલનીય છે અને $\lim_{t\to x} g(t)\neq 0$
હોવાથી આપણા કારકિર્દીમાં રહેલા)

$$= \frac{g(x)\cdot h'(x) - h(x)\,g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$$ ($\because g$ એ વિકલનીય હોવાથી સતત છે. $\therefore \lim_{t\to x} g(t)=g(x)$)

$$= \frac{g(x)\frac{d}{dx}(h(x)) - h(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{[g(x)]^2}$$

વળી, h/g એ x આગળ વિકલનીય છે તથા

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{h(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}(h(x)) - h(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{[g(x)]^2}$$



પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(2) (a)

જો વિધેય $f : (a,b) \to R$ અને $x \in (a,b)$ માં વિકલનીય હોય તથા f નો વિસ્તાર એ g ના પ્રદેશ (c,d) નો ઉપગણ હોય અને $g : (c,d) \to R$ એ $f(x) \in (c,d)$ માં વિકલનીય હોય તો $gof : (a,b) \to R$ વડે x આગળ વિકલનીય થાય તથા $[gof]'(x) = g'[f(x)]\, f'(x)$ થાય.

→ આ નિયમને અયોજિત વિધેયના વિકલનનો નિયમ કહે છે.

(b) પ્રથમ વિકલિત કસોટી :

જો f એ $[a,b]$ પર વ્યાખ્યાયિત વિધેય હોય તથા $c \in (a,b)$ હોય તથા c નું કોઈક સામિપ્ય $(c-\delta, c+\delta) \subset (a,b)$ એવું હોય કે જેથી f એ $(c-\delta, c+\delta)$ માં વિકલનીય છે અને $f'(c) = 0$

અને * જો $c-\delta < x < c \Rightarrow f'(x) > 0$

તથા $c < x < c+\delta \Rightarrow f'(x) < 0$ તો f ને c આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે.

* જો $c-\delta < x < c \Rightarrow f'(x) < 0$

તથા $c < x < c+\delta \Rightarrow f'(x) > 0$ તો f ને c આગળ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

+ + + =

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(Q)

(2) $y = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

$= \frac{-x^2}{\left(x^2+(1+x^2)-2\sqrt{1+x^2}+1\right)} \cdot \left[\frac{x\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)\right)-(1)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{x^2}\right]$

$= \frac{-1}{\left[2(2+2x^2)-2\sqrt{1+x^2}\right]} \left[\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}-\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\right]$

$(\because x \neq 0)$

$= \frac{-x^2+\left[(1+x^2)-\sqrt{1+x^2}\right]}{\sqrt{1+x^2}\left[2\sqrt{1+x^2}-2\right]\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{-x^2+1+x^2-\sqrt{1+x^2}}{2(1+x^2)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}$

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\sqrt{1+x^2}-1)}{2(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}-1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2(1+x^2)}}$$

(3) ઉકેલ :

$$2x = y^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{-1}{m}}$$

$$\Rightarrow 2(1) = \frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{-1}{m}\right) y^{\frac{-1}{m}-1} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 2m = \left(y^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{y} - y^{\frac{-1}{m}} \cdot \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 2my = \left(y^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{-1}{m}}\right) y_1$$

$$\Rightarrow 4m^2y^2 = \left(y^{\frac{1}{m}} - y^{\frac{-1}{m}}\right)^2 y_1^2$$

+ + + = 19

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$\Rightarrow 4m^2y^2 = \left[\left(y^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{-1}{m}}\right)^2 - 4\right] y_1^2$

$\Rightarrow 4m^2y^2 = \left[4x^2 - 4\right] y_1^2 \quad (\because y = x)$

$\Rightarrow m^2y^2 = (x^2-1)\, y_1^2$

$\Rightarrow m^2(2yy_1) = (x^2-1)\, 2y_1y_2 + y_1^2(2x-0)$

$\Rightarrow 2y_1\left[m^2y\right] = 2y_1\left[(x^2-1)y_2 + xy_1\right]$

$\Rightarrow m^2y = (x^2-1)y_2 + xy_1 \quad (\because y \text{ અચળ નથી} \Rightarrow y_1 \neq 0)$

$\Rightarrow \boxed{(x^2-1)y_2 + xy_1 = m^2y}$

જે સાબિત કરવા હતું.

(1) $y = 2^{\sqrt{x+2}} + x^{x^x}$

$\Rightarrow \log y = \sqrt{x+2}\log 2 + x^x \log x$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}(1+0)\log_e 2 + \frac{du}{dx}\log x + x^x \cdot \frac{1}{x}$

20 ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\log_e 2}{2\sqrt{x+2}} + \frac{du}{dx}\log_e x + x^{x-1}\right] \quad \text{---(1)}$$

જ્યાં, $\frac{du}{dx}$ $u = x^x$

$$\Rightarrow \log u = x\log x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\cdot\frac{1}{x} + \log x \,(1)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u\,(1+\log x)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = x^x\,(1+\log x)$$

(1)-પરથી,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\log_e 2}{2\sqrt{x+2}} + x^x\cdot\log x\,(1+\log x) + x^{x-1}\right]}$$

જ્યાં y ચક્રાનુસાર છે.

+ + + =

પ્રશ્ન/
પેટાપ્રશ્ન
ક્રમાંક

૩

(3) અહીં, $f = x^{3/2} - x^{1/2}$, $x \in [0,1]$

હવે, $f(x)$ એ $\mathbb{R}^+$ માં સતત અને વિકલનીય હોવાથી $[0,1]$ માં સતત અને $(0,1)$ પર વિકલનીય છે.

તથા $f(0) = 0 - 0 = 0$

$f(1) = 1 - 1 = 0$

$\therefore f(0) = f(1)$

$\Rightarrow$ રોલના પ્રમેયની બધીજ શરતોનું પાલન થાય છે.

$\Rightarrow$ રોલનું પ્રમેય લાગુ પાડી શકાય.

હવે, $f(x) = x^{3/2} - x^{1/2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} x^{3/2-1} - \frac{1}{2} x^{1/2-1}$

$= \frac{3}{2} x^{1/2} - \frac{1}{2} (x^{-1/2})$

હવે, $c \in (0,1)$ એવો મળે કે જેથી $f'(c) = 0$

$\Rightarrow \frac{3}{2} c^{1/2} - \frac{1}{2} (c)^{-1/2} = 0$

22 ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$\Rightarrow 3c^{1/2} - c^{-1/2} = 0$

$\Rightarrow 3c - 1 = 0$

$\Rightarrow c = 1/3 \in (0, 1)$

રોલ્સનો પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $c = \frac{1}{3}$

(4) અહીં,

$y^2 = ax^3 + b$

$\Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = 3x^2 a + 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2}{2y}$

હવે, (2, 3) બિંદુ આગળ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,3)} = \frac{3a(4)}{2(3)}$

$= 2a$

વળી: આપેલ $y = 4x + 1$ રેખાનો ઢાળ = 4

$\therefore 2a = 4$

$\Rightarrow \boxed{a = 2}$

□ + □ + □ + □ = □ 23

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

હવે, (2, 3) બિંદુ વક્ર પર હોવાથી,

$\therefore \quad 9 = 8a + b$

$\Rightarrow 9 = 16 + b \quad (\because a = 2)$

$\Rightarrow \boxed{b = -7}$

$\therefore \boxed{a = 2 \text{ અને } b = -7}$

2A

□ + □ + □ + □ = □

પ્રશ્ન/
પેટાપ્રશ્ન
ક્રમાંક

+ + + = 25

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(5)

(1) અહીં, $y = e^{x/c}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x/c} \cdot \frac{1}{c}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y/c$

હવે, વક્રના અપસ્પર્શકની લંબાઈ $= \left| \frac{y}{dy/dx} \right|$

$= \left| \frac{y}{y/c} \right|$

$= |c|$

= અચળ.

$\therefore y = e^{x/c}$ ના અપસ્પર્શકની લંબાઈ કોઈપણ બિંદુ આગળ અચળ છે જે સાબિત થાય છે.

26 ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક (2)

ધારો કે, $f(x) = \sin^{-1} x$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

હવે, $0.51 = 0.5 + 0.01$

અહીં $x = 0.5 = \frac{1}{2}$

તથા $\delta x = 0.01$

હવે, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \pi/6$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-1/4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

* <u>આસન્ન મૂલ્ય :</u>

$f(x+\delta x) \approx f(x) + \delta x \cdot f'(x)$ મુજબ

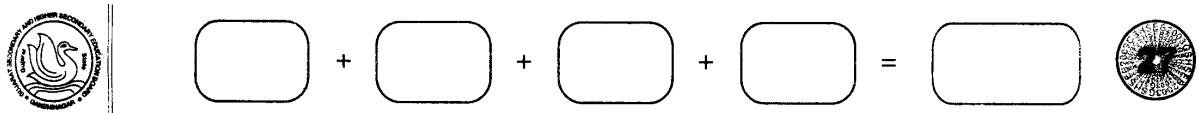
$\therefore \sin^{-1}(0.51) = f(0.5 + 0.01)$

$\approx f\left(\frac{1}{2}\right) + 0.01 \times f'\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{50\sqrt{3}}$

$\therefore \boxed{\sin^{-1}(0.51) \approx \frac{\pi}{6} + \frac{1}{50\sqrt{3}}}$



પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(3)

ધારો કે,

$f(x) = e^x - (1+x)$ લેતાં,

$\Rightarrow f'(x) = e^x - 1$

વિકલ્પ 1 : જો $x > 0$

$\Rightarrow e^x > 1 \quad (\because e > 1)$

$\Rightarrow e^x - 1 > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

$\therefore f$ જો $x > 0$ માટે વધતું વિધેય છે.

$\therefore x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$

$\Rightarrow e^x - (1+x) > e^0 - (1+0)$

$\Rightarrow e^x - (1+x) > 0$

$\Rightarrow e^x > (1+x)$

વિકલ્પ 2 : જો $x < 0$

$\Rightarrow e^x < 1 \quad (\because e > 1)$

$\Rightarrow e^x - 1 < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0$

$\therefore f$ જો $x < 0$ માટે ઘટતું વિધેય છે.

$\therefore x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$

$\Rightarrow e^x - (1+x) > e^0 - (1+0)$



□ + □ + □ + □ = □



પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$\Rightarrow \quad e^x - (1+x) > 0$

$\Rightarrow \quad e^x > 1+x$

આમ, વિકલ્પ (1) આપેલ (2) પરથી,

$e^x > (1+x) \quad \forall\, x \in R - \{0\}$

સાબિત થાય છે.

+ + + =

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

પ્રશ્ન 3

(24)

(1) ★ ખંડશઃ સંકલનનો નિયમ :

જો (1) કોઈ અંતરાલ $I \subset R$ પર વિધેયો f અને g વિકલનીય હોય તથા

(2) તેમના વિકલિતો f' અને g' એ I પર સતત હોય, તો

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

★ સાબિતી : ધારો કે, f અને g એ x ના વિકલનીય વિધેયો છે.

∴ વિકલનના કાર્યનિયમ પરથી,

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) - g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\,g'(x) - g(x)\,f'(x) \quad \text{---(1)}$$

હવે, પક્ષાનુસાર

f, g, f' અને g' એ I પર સતત વિધેયો છે.

⇒ $f'g$ અને fg' પણ સતત થાય અને તેથી તેઓ સંકલનીય થાય.

માટે (1) પરથી,

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

અંકલનની વ્યાખ્યાનુસાર,

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx = f(x)\,g(x)$$

$$\therefore \int f(x)\,g'(x)\,dx + \int g(x)\,f'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)$$

$$\therefore \boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx}$$

આ સાબિત થાય છે.

(૨)

અહીં, $\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ માટે,

$a+b-x = t$ લેતાં,

$\Rightarrow 0+0-1\,dx = dt$

$\Rightarrow dx = -dt$

તથા $x = a \Rightarrow t = b$

$x = b \Rightarrow t = a$

માટે, $\text{જ.બા.} = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

$= \int_b^a f(t)\,(-dt)$



પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$= -\int_b^a f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \quad \left(\because \text{નિશ્ચિત સંકલન ચલ પર આધારિત નથી.}\right)$$

$= \text{જ.ઉ.}$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

જે સાબિત થાય છે.

(બ)

(1) $$I = \int \frac{\tan x}{1+\tan x+\tan^2 x}\,dx$$

ધારો કે, $\tan x = t$ લેતાં,

$\Rightarrow \sec^2 x\,dx = dt$

$\Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+\tan^2 x}$

$\Rightarrow dx = \dfrac{dt}{(1+t^2)}$



પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$\therefore I = \int \frac{t\,dt}{(1+t^2)(t^2+t+1)}$$

$$= \int \frac{(t^2+t+1) - (t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+t+1)}\,dt$$

$$= \int \left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+t+1}\right] dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \int \frac{1}{\left(t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}\,dt$$

$$= \tan^{-1} t + c_1 - \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

$$= \tan^{-1} t + c_1 - \frac{1}{\sqrt{3}/2} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + c_2$$

$$= \tan^{-1} t - \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$(\text{જ્યાં } c = c_1 + c_2)$$

$$\therefore I = \tan^{-1}(\tan x) - \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2\tan x + 1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

[ ] + [ ] + [ ] + [ ] = [ ] 33

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(2)

$$I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}\, dx$$

ધારો કે, $x = t^{12}$

$\Rightarrow dx = 12t^{11}\, dt$

$$\therefore I = \int \frac{1}{(t^{12})^{1/3} + (t^{12})^{1/4}} \cdot 12t^{11}\, dt$$

$$= 12\int \frac{t^{11}\, dt}{t^4 + t^3}$$

(1)

$$= 12\int \frac{t^8\, dt}{(t+1)}$$

$$= 12\int \frac{t^8 - 1 + 1}{(t+1)}\, dt$$

$$= 12\int t$$

34 ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(3) અહીં,

$$\int \tan x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \tan x \frac{d}{dx}(\tan x) \, dx$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} + c \qquad \text{---------- (1)}$$

હવે,

$$I = \int x^2 (\tan x \cdot \sec^2 x) \, dx$$

$$= x^2 \int \tan x \cdot \sec^2 x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx} x^2 \int \tan x \cdot \sec^2 x \, dx \right] dx$$

$$= x^2 \cdot \frac{\tan^2 x}{2} - \int \left(2x \cdot \frac{\tan^2 x}{2} \right) dx + c'$$

(∵ (1)પરથી)

$$= \frac{x^2 \tan^2 x}{2} - \left\{ x \int \tan^2 x \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(x) \int \tan^2 x \, dx \right] dx \right\} + c$$

$$= \frac{x^2 \tan^2 x}{2} - \left\{ x \int (\sec^2 x - 1) \, dx - \int \left[1 \int (\sec^2 x - 1) \, dx \right] dx \right\} + c'$$

$$= \frac{x^2 \tan^2 x}{2} - \left\{ x (\tan x - x) - \int (\tan x - x) \, dx \right\} + c$$

□ + □ + □ + □ = □

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$= \frac{x^2 \tan^2 x}{2} - x\tan x + x^2 + \int (\tan x - x)\, dx + C'$$

$$= \frac{x^2 \tan^2 x}{2} - x\tan x + x^2 + \log|\sec x| - \frac{x^2}{2} + C'$$

$$\therefore \quad I = \frac{x^2 \tan^2 x}{2} - x\tan x + \log|\sec x| + \frac{x^2}{2} + C$$

(5)

(1) $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{5^{\sin\theta}}{5^{\cos\theta} + 5^{\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{5^{\sin(\pi/2 - \theta)}}{5^{\cos(\pi/2 - \theta)} + 5^{\sin(\pi/2 - \theta)}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{5^{\cos\theta}}{5^{\sin\theta} + 5^{\cos\theta}}\, d\theta$$

$$\text{હવે, } I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{5^{\sin\theta}}{5^{\cos\theta} + 5^{\sin\theta}}\, d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{5^{\cos\theta}}{5^{\cos\theta} + 5^{\sin\theta}}\, d\theta$$

36 ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$\therefore 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{5^{\sin\theta} + 5^{\cos\theta}}{5^{\sin\theta} + 5^{\cos\theta}} d\theta$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi/2 - 0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

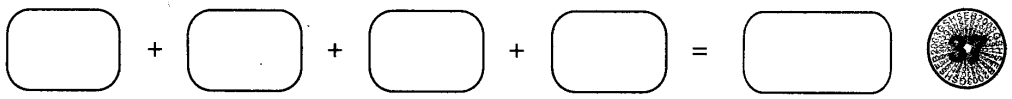
(2) $$I = \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^6\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^6 x \, dx$$

$$\text{હવે, } I + I = \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx + \int_0^{\pi/2} \cos^6 x \, dx$$

$$\therefore 2I = \int_0^{\pi/2} \left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) dx$$



પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$= \int_0^{\pi/2} \left\{ (\sin^2 x + \cos^2 x) - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x \right. \\ \left. (\sin^2 x + \cos^2 x) \right] dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{3}{4} (4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) \right] dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \left[4 - 3 (\sin^2 2x) \right] dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \left[4 - 3 \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \left[8 - 3 + 3\cos 4x \right] dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \left[5 + 3\cos 4x \right] dx$$

$$= \frac{1}{8} \left[5x + 3 \frac{\sin 4x}{4} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{8} \left[\left\{ \frac{5\pi}{2} + \frac{3}{4} \sin 2\pi \right\} - \left\{ 0 + \frac{3}{4} \sin 0 \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{5\pi}{2} + \frac{3}{4}(0) \right]$$

$$\therefore 2I = \frac{5\pi}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{5\pi}{32}}$$



પ્રશ્ન/
પેટાપ્રશ્ન
ક્રમાંક

□ + □ + □ + □ = □

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(5)

(1) $I = \int \frac{1}{x^2(1+x^2)^2}\,dx$

ધારો કે, $x = \tan\theta$

$\Rightarrow dx = \sec^2\theta\, d\theta$

$\therefore I = \int \frac{1}{\tan^2\theta\,(1+\tan^2\theta)^2} \cdot \sec^2\theta \cdot d\theta$

$= \int \frac{1}{\tan^2\theta\,(\sec^2\theta)^2} \cdot \sec^2\theta \cdot d\theta$

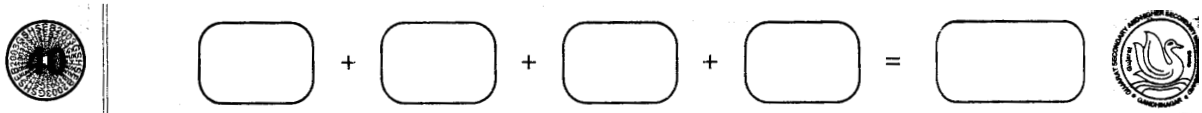
$= \int \frac{1}{\tan^2\theta \cdot \sec^2\theta}\, d\theta$

$= \int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \cdot \cos^2\theta\, d\theta$

$= \int \frac{\cos^4\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta$

$= \int \frac{(1-\sin^2\theta)^2}{\sin^2\theta}\, d\theta$

$= \int \frac{1 - 2\sin^2\theta + \sin^4\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta$



પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$= \int \left[\operatorname{cosec}^2\theta - 2 + \sin^2\theta \right] d\theta$$

$$= \int \left[\operatorname{cosec}^2\theta - 2 + \frac{1-\cos 2\theta}{2} \right] d\theta$$

$$= -\cot\theta - 2\theta + \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C$$

$$= -\cot\theta - 2\theta + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}(2\sin\theta\cdot\cos\theta) + C$$

$$= -\cot\theta - \frac{3}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + C$$

$$= -\frac{1}{\tan\theta} - \frac{3}{2}\theta - \frac{1}{4}\cdot\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} + C$$

$$\therefore \boxed{I = -\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + C}$$

□ + □ + □ + □ = □

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(2) $I = \int e^x \{ f(x) + f'(x) \} dx$

$= \int \{ e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) \} dx$

$= \int e^x \cdot f(x) dx + \int e^x \cdot f'(x) dx$

$= f(x) \int e^x dx - \int \left[\frac{d}{dx} f(x) \int e^x dx \right] dx + \int e^x \cdot f'(x) dx$

$= f(x) \cdot e^x - \int f'(x) \cdot e^x dx + \int e^x \cdot f'(x) dx + C$

$= f(x) \cdot e^x + C$

$= e^x \cdot f(x) + C$

જે પ્રાપ્તિનું પરિણામ છે.

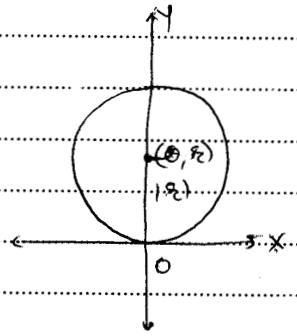
+ + + =

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

પ્રશ્ન 4

(અ)

(1)



અહીં, વર્તુળ નું કેન્દ્ર Y-અક્ષ પર છે તથા તે X-અક્ષને સ્પર્શે છે. ધારો કે વર્તુળનું કેન્દ્ર $(0, r)$

તથા ત્રિજ્યા $= |r|$ છે.

∴ વર્તુળોના સમુદાયનું વિકલ સમી.,

$$(x-0)^2 + (y-r)^2 = |r|^2$$

(r = સ્વાચલ અચળ છે.)

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2yr + r^2 = r^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2yr = 0 \quad \text{જ્યાં } r = \text{સ્વાચલ અચળ}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2yr$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{y} = 2r$$

$$\Rightarrow y \cdot \frac{d}{dx}(x^2+y^2) - (x^2+y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

□ + □ + □ + □ = □

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$\Rightarrow \frac{y\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) - (x^2+y^2)\frac{dy}{dx}}{y^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2xy + 2y^2\frac{dy}{dx} - (x^2+y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \left[(x^2+y) + 2y^2\right]\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \left[-x^2+y^2\right]\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\Rightarrow \boxed{(x^2-y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy}$$

જે, સાબિત થાય છે.

(4) અહીં, કુલ ખર્ચનું વિધેય C છે.

હવે, સીમાંત ખર્ચ $\frac{dc}{dx}$ થાય.

$$\therefore \frac{dc}{dx} = (6 + 10x - 6x^2)$$

$$\Rightarrow dc = (6 + 10x - 6x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow \int 1\,dc = \int (6 + 10x - 6x^2)\,dx$$

□ + □ + □ + □ = □

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$\Rightarrow C = 6x + 16\frac{x^2}{2} - 6\frac{x^3}{3} + a$

(જ્યાં a = અચળ)

$\Rightarrow C = 6x + 5x^2 - 2x^3 + a$ ——— (1)

હવે, પ્રશ્નાનુસાર,

$x = 0 \Rightarrow C = 0$

$x = 1 \Rightarrow C = 12$ લેતાં,

$\therefore 12 = 6(1) + 5(1)^2 - 2(1)^3 + a$

$\Rightarrow 12 = 6 + 5 - 2 + a$

$\Rightarrow a + 9 = 12$

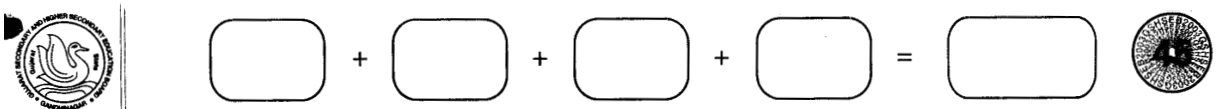
$\Rightarrow a = 3$

આ, (1) પરથી

$\therefore$ કુલ આવક C નું વિધેય,

$C = 6x + 5x^2 - 2x^3 + 3$

$\Rightarrow \boxed{C = 3 + 6x + 5x^2 - 2x^3}$



પ્રશ્ન/
પેટાપ્રશ્ન
ક્રમાંક

46 ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(૫)

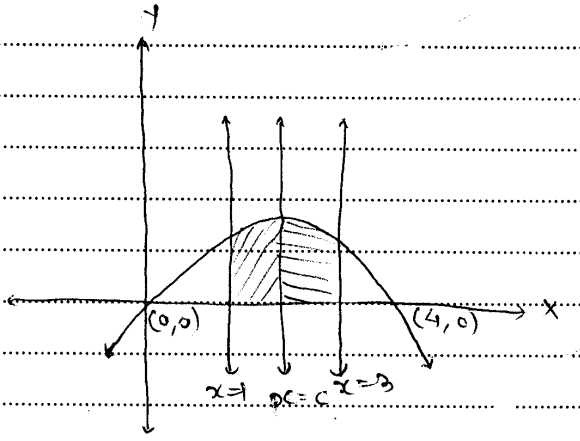
(1) આપેલ વક્ર x-અક્ષને કાપતો હોય ત્યારે $y = 0$

$\therefore \quad y = 4x - x^2$

$\Rightarrow x(x-4) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \quad$ અથવા $\quad x = 4$

$\therefore$ વક્ર x-અક્ષને કાપતા બિંદુઓ $(0,0)$ અને $(4,0)$ છે.

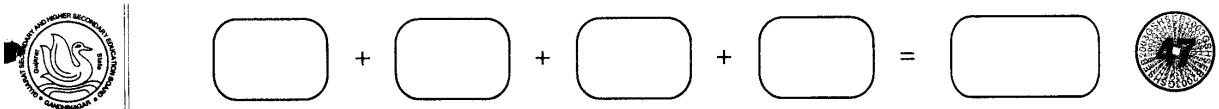


હવે, પ્રશ્ન મુજબ,

$$\int_1^c y\,dx = \int_c^3 y\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^c (4x - x^2)\,dx = \int_c^3 (4x - x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^c = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_c^3$$



પ્રશ્ન/
પેટાપ્રશ્ન
ક્રમાંક

$\Rightarrow \left[2c^2 - \frac{c^3}{9}\right] - \left[2 - \frac{1}{3}\right] = \left[2(4) - \frac{27}{3}\right] - \left[2c^2 - \frac{c^3}{3}\right]$

$\Rightarrow 2\left[2c^2 - \frac{c^3}{3}\right] = 18 - 9 + 2 - \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 4c^2 - \frac{2c^3}{3} = 11 - \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 12c^2 - 2c^3 = 33 - 1$

$\Rightarrow 2c^3 - 12c^2 = -32$

$\Rightarrow c^3 - 6c^2 + 16 = 0$

$\Rightarrow c^3 - 2c^2 - 4c^2 + 8c - 8c + 16 = 0$

$\Rightarrow c^2(c-2) - 4c(c-2) - 8(c-2) = 0$

$\Rightarrow (c-2)(c^2 - 4c - 8) = 0$

$\Rightarrow c - 2 = 0$ OR $c^2 - 4c + 4 = 12$

$\Rightarrow c = 2$ OR $(c-2)^2 = 12$

$\Rightarrow c = 2$ OR $c - 2 = \pm 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow c = 2$ OR $c = 2 \pm 2\sqrt{3}$

પરંતુ, $c = 2 \pm 2\sqrt{3} \in [1,3]$

$\therefore c = 2 \pm 2\sqrt{3}$ શક્ય નથી.



☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐



પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

વળી, $c = 2 \in [1, 3]$

$\therefore \boxed{c = 2}$

(3) ચકી, બંને વક્રોનું છેદબિંદુ મેળવવા,

$\therefore \quad 5x^2 = y$

$\Rightarrow 5x^2 = 2x^2 + 9$

$\Rightarrow 3x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow 3x(x - 3) = 0$

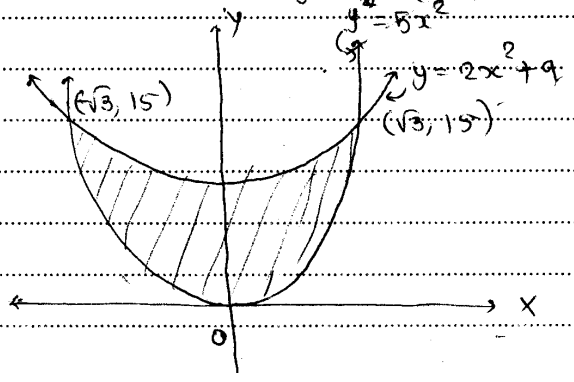
$\Rightarrow x = 0 \quad \underline{\text{or}} \quad x = 3$

$\Rightarrow x^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

હવે, $x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = 5(\pm\sqrt{3})^2 = 15$

$\therefore$ બંનેના પ્રથમ બિંદુઓ $(\sqrt{3}, 15)$ અને $(-\sqrt{3}, 15)$ છે.





પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$$\text{અથવા, } A = \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\,dx$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[25x^4 - (2x^2+9) \right]$$

$$\text{અથવા, } A = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[5x^2 - 2x^2 - 9 \right] dx$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[3x^2 - 9 \right] dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \left[3x^2 - 9 \right] dx \quad (\because \text{યુગ્મ વિધેય})$$

$$= 2\left[x^3 - 9x \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\left\{ \left[3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} \right] - \left[0 - 0 \right] \right\}$$

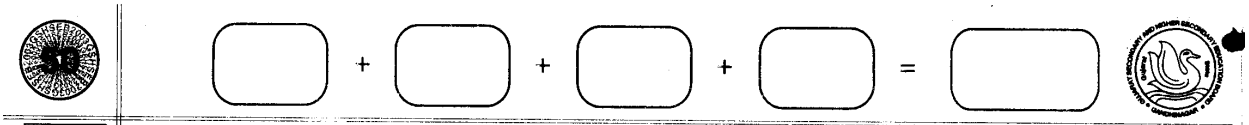
$$= 2\,(-6\sqrt{3})$$

$$= -12\sqrt{3}$$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= |A|$

$= |-12\sqrt{3}|$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 12\sqrt{3}$ ચોરસ.



પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(3)

(1) કાળા = 2 (B_1, B_2)

સફેદ = 2 (W_1, W_2)

કુલ = 4.

હવે, $U = \{B_1W_1, B_1W_2, B_1B_2, B_2B_1, B_2W_1, B_2W_2, W_1B_1, W_2B_2, W_1W_1, W_1W_2, B_1B_1, B_2B_2, W_2B_1, W_2B_2, W_2W_1, W_2W_2\}$

$\therefore n = 16$

હવે, $X : U \to R$

જ્યાં $X(u) = u$ માં કાળા દડાની સંખ્યા

$\therefore X$ નો વિસ્તાર $= \{0, 1, 2\}$ થાય.

હવે, $p(0) = p(\{W_1W_1, W_1W_2, W_2W_1, W_2W_2\}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$p(1) = p(\{B_1W_1, B_1W_2, B_2W_1, B_2W_2, W_1B_1, W_1B_2, W_2B_1, W_2B_2\}) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$p(2) = p(\{B_1B_1, B_1B_2, B_2B_1, B_2B_2\}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$\therefore$

☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

∴ આદર્શ ચલ X નું સંભાવના વિતરણ :

X = x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(2) અહીં,

મધ્યક = 10 અને પ્રમાણિત વિચલન = 5

$\therefore E(x) = 10$ તથા $\sqrt{V(x)} = 5$

$\therefore E(x) = np = 10$ તથા $V(x) = npq = 25$

હવે, $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$\Rightarrow 25 = E(x^2) - (10)^2$

$\Rightarrow 25 = E(x^2) - 100$

$\Rightarrow \boxed{E(x^2) = 125}$

$\star \quad E\left(\frac{x-10}{5}\right)^2 = E\left(\frac{x^2 - 20x + 100}{25}\right)$

$= \frac{1}{25} E(x^2) - \frac{20}{25} E(x) + \frac{100}{25}$

$= \frac{1}{25}(125) - \frac{20(10)}{25} + 4$

$= 5 - 8 + 4$

+ + + =

પ્રશ્ન/
પેટાપ્રશ્ન
ક્રમાંક

$$\therefore \boxed{E\left(\frac{x-10}{5}\right)^2 = 1}$$

☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(S)

(1) $I = \int \frac{1}{x + 5x \log x} dx$

$= \int \frac{1}{x(1 + 5 \log x)} dx$

$= \int \frac{1/x}{(1 + 5 \log x)} dx$

$= \int \frac{\frac{1}{5} \cdot 5/x}{(1 + 5 \log x)} dx$

$= \frac{1}{5} \int \frac{\frac{d}{dx}(1 + 5 \log x)}{(1 + 5 \log x)} dx$

$\therefore \boxed{I = \frac{1}{5} \log |1 + 5 \log x| + C}$

(2) (a) "સ્વતંત્ર ચલ x, અજ્ઞાત વિધેય y અને તેના વિકલિતો $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ ને સાંકળતા વિધેયાત્મક સંબંધને વિકલ સમી. કહે છે."

તેને સંકેતમા $F(x, y, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0$ થી દર્શાવાય છે.

54

[ ] + [ ] + [ ] + [ ] = [ ]

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(b) જો પ્રથમ કક્ષાના અને પ્રથમ ઘાતની વિકલ સમી.,

$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ એ વિયોજનીય

ચલ પ્રકારના સ્વરૂપનું વિકલ સમી. હોય, તો

(*) વિયોજનીય ચલ પ્રકારના વિકલ સમી.નું વ્યાપક સ્વરૂપ:

$$p(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

જ્યાં P એ માત્ર x નું તથા Q એ માત્ર ચલ y નું વિધેય છે.

* ઉકેલ:

લો, $p(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$

આ $p(x, y) = f(x)$ અને $Q(x, y) = g(y)$ લેતાં,

$\therefore f(x)\, dx + g(y)\, dy = 0$

$\Rightarrow f(x)\, dx = -g(y)\, dy$

$\Rightarrow \int f(x)\, dx = -\int g(y)\, dy$

$\Rightarrow F(x) = -G(y) + c$ (જ્યાં c સ્વૈર અચળ તથા $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$, $\frac{d}{dy} G(y) = g(y)$)

$$\Rightarrow \boxed{F(x) + G(y) = c}$$

જે વ્યાપક ઉકેલ મળે છે.

+ + + = 35

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

પ્રશ્ન 5

(અ)

(1) સાબિત કરો।

(a) ★ $P(\phi) = 0$

અહીં, $\phi \cap U = \phi$ તથા $\phi \cup U = U$

$\therefore P(\phi \cup U) = P(U)$

$\Rightarrow P(\phi) + P(U) = P(U)$ ($\because$ પૂ. વિ. 3)

$\Rightarrow P(\phi) + 1 = 1$ ($\because$ પૂ. વિ. 2)

$\Rightarrow$ $\boxed{P(\phi) = 0}$ જે સાબિત કરવું હતું.

(b) ★ $0 \le P(A) \le 1$

અહીં, પૂર્વધારણા 1 પરથી,

$P(A) \ge 0$ ——— (1)

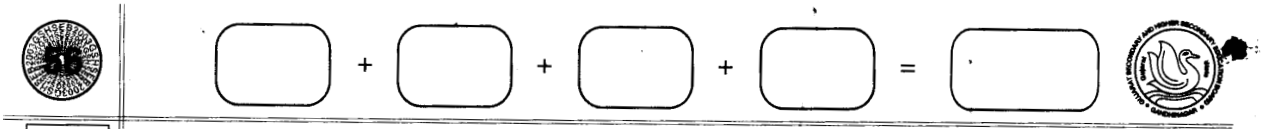
તથા $A \subset U$

$\Rightarrow P(A) \le P(U)$ ($\because$ પ્રમેય 3)

$\Rightarrow P(A) \le 1$ ($\because$ પૂ. વિ. 2) ——— (2)

(1) અને (2) પરથી,

$\boxed{0 \le P(A) \le 1}$ જે સાબિત કરવું હતું.



પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(2) અહીં, A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ —①

★ $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ (∵ ઉપગમ)

$= P(A) - P(A) \cdot P(B)$ (∵ ①પરથી)

$= P(A)(1 - P(B))$

$= P(A) \cdot P(B')$

∴ નિરપેક્ષ ઘટનાની વ્યાખ્યા મુજબ A અને B' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

★ $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ (∵ ઉપગમ)

$= P(B) - P(A) \cdot P(B)$ (∵ ①પરથી)

$= P(B)(1 - P(A))$

$= P(B) \cdot P(A')$

$= P(A') \cdot P(B)$

∴ નિરપેક્ષ ઘટના ની વ્યાખ્યા મુજબ A' અને B પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

★ $P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$ (∵ ①પરથી)

$= (1 - P(A)) - P(B)(1 - P(A))$

$= (1 - P(A))(1 - P(B))$

Supplimentary / પુરવણી - 1

★ અહીંથી જ લખવાનું શરૂ કરવું. ★

□ + □ + □ + □ = □ 1

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$= P(A') - P(B)$

∴ નિરપેક્ષ ઘટનાની વ્યાખ્યાનુસાર A^+ અને B^+ પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

જે સાબિત થાય છે.

(અથવા)

(2) કાળા = 6

લાલ = 3

કુલ = 9.

અહીં, નિદર્શાવકાશના ઘટકો $n = \binom{9}{5}$

$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}$

$\therefore n = 9 \times 4 \times 7 \times 2$

2 ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(અ) ધારો કે, A = બરાબર બે દડા લાલ હોય તે ઘટના

$\therefore n_A$ = A ના ઘટકોની સંખ્યા

$= \binom{3}{2}\binom{6}{3}$

$= \frac{3\times 2}{2\times 1} \times \frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}$

$\therefore n_A = 3\times 5\times 4$

$\therefore P(A) = \frac{n_A}{n}$

$= \frac{3\times 5\times 4^{2}}{9\times 8\times 7\times 2}$

$= \frac{5}{6\times 7} = \frac{10}{21}$

$\therefore$ P(A) = 5/42 $\therefore$ P(A) = 10/21

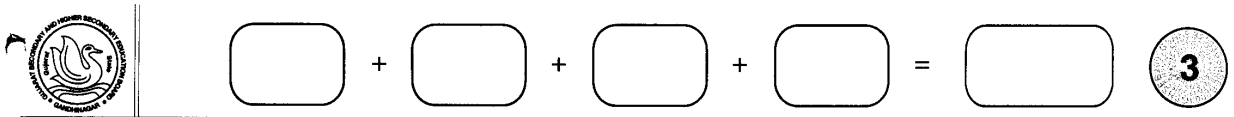
(બ) ધારો કે, B = ઓછામાં ઓછા બે દડા લાલ હોય તે ઘટના

$\therefore n_B$ = B ના ઘટકોની સંખ્યા

$= \binom{3}{2}\binom{6}{3} + \binom{3}{3}\binom{6}{2}$

$= \frac{3\times 2}{2\times 1} \times \frac{6\times 4\times 5}{3\times 2\times 1} + 1 \cdot \frac{6\times 5}{2\times 1}$

$= 60 + 15$



પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$\therefore n_B = 75$

$\therefore P(B) = \frac{n_B}{n}$

$= \frac{75^{25}}{\cancel{9} \times \cancel{8} \times 7 \times 2}$

$= \frac{25}{8 \times 7}$

$P(B) = \frac{25}{168}$ $\Rightarrow$ $P(B) = \frac{25}{42}$

(3) છોકરાઓ = 10

છોકરીઓ = 5

કુલ = 15

અહીં, બે વિદ્યાર્થીઓના જૂથો $n = \binom{15}{2}$

$= \frac{15 \times 14}{2 \times 1}$

$\therefore n = 15 \times 7$

(a) ધારો કે, A = બંને વિજ્ઞાન છોકરીઓમાંથી મળે તે ઘટના

$\therefore n_A = \binom{5}{2}$

$= \frac{5 \times 4}{2}$

$= 10$

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$\therefore P(A) = \frac{r_A}{n}$

$= \frac{\cancel{10}\,2}{\cancel{15}_3 \times 7}$

$\therefore P(A) = \frac{2}{21}$

(b) ધારો કે, B = એક નામ છોકરાનું અને એક નામ છોકરીનું મળે તે ઘટના.

$\therefore r_B = \binom{10}{1}\binom{5}{1}$

$= 10 \times 5$

$\therefore P(B) = \frac{r_B}{n}$

$= \frac{10 \times \cancel{5}}{\cancel{15}_3 \times 7}$

$\therefore P(B) = \frac{10}{21}$

અથવા,

Supplimentary / પુરવણી - 2

★ અહીંથી જ લખવાનું શરૂ કરવું. ★



□ + □ + □ + □ = □ 1

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(ચાલુ)

2 ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

5

(1)

$$* \quad P\left(\frac{A' \cup B'}{C}\right) = \frac{P((A' \cup B') \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{P[(A \cap B)' \cap C]}{P(C)}$$

$$= \frac{P(D' \cap C)}{P(C)} \quad (\because A \cap B = D)$$

$$= \frac{P(C) - P(C \cap D)}{P(C)}$$

$$= \frac{P(C) - P[C \cap (A \cap B)]}{P(C)} \quad (\because B \cap A \cap B = D)$$

$$= \frac{P(C)}{P(C)} - \frac{P[C \cap (A \cap B)]}{P(C)}$$

$$= 1 - \frac{P[(A \cap B) \cap C]}{P(C)}$$

$$\therefore \boxed{P\left(\frac{A' \cup B'}{C}\right) = P\left(\frac{A \cap B}{C}\right)}$$

∴ સાબિત થાય છે.

[ ] + [ ] + [ ] + [ ] = [ ] 3

પ્રશ્ન/ પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

(૨) (a) અહીં, દરમ્યાન A અને B માટે,

$(A \cup B) \subset P \cup$

$\Rightarrow P(A \cup B) \leq P(U)$ (∵ પ્રમેય 3)

$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$ (∵ પ્રમેય 4 પરથી, પૂ. ઉ. 2)

$\Rightarrow P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$

$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1}$

જે સાબિત થાય છે.

(b) $P(B) = 0.3$

$P(A \cup B) = 0.7$

$P(B/A) = 0.2$

અહીં, $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$\Rightarrow 0.2 = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.2\, P(A)$ — (1)

હવે, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow 0.7 = P(A) + 0.3 - 0.2\, P(A)$ (∵ (1) પરથી)

$\Rightarrow 0.4 = 0.8\, P(A)$

4 ☐ + ☐ + ☐ + ☐ = ☐

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

$\therefore$ $P(A) = \frac{1}{2}$ અથવા $P(A) = 0.5$

(5)

(1) કમ્પ્યુટરમાં વપરાતી મુખ્ય ભાષાઓ નીચે મુજબ છે:

(1) BASIC
(2) FORTRAN
(3) COBOL
(4) PASCAL

(2)

★ આપેલું સંખ્યા:

★ દશાંકથી દ્વિઅંક ભાગ માટે:

	ભાગાકાર	શેષ
$185 \div 8$	23	1
$23 \div 8$	2	7 ↑
$2 \div 8$	0	2

$\therefore (185)_{10} = (271)_8$ — (1)

★ અપૂર્ણાંકથી દ્વિઅંક ભાગ માટે:

	અપૂર્ણાંકાર	પૂર્ણાંક
0.3125×8	2.5000	2 ↓
0.5000×8	4.0000	4

$\therefore (0.3125)_{10} = (0.24)_8$ — (2)

(1) અને (2) પરથી,

$\therefore (185.3125)_{10} = (271.24)_8$

Supplimentary / પુરવણી - 3

★ અહીંથી જ લખવાનું શરૂ કરવું. ★

. + + + = 1

પ્રશ્ન/પેટાપ્રશ્ન ક્રમાંક

★ (વિકલ્પ) ઉકેલ :

અહીં, $(2)_8 = (010)_2$

$(7)_8 = (111)_2$

$(1)_8 = (001)_2$

$(4)_8 = (100)_2$

$\therefore (271.24)_8 = (010\,111\,001.\,010\,100)_2$

$= (10111001.0101)_2$

$\therefore (185.3125)_{10} = (10111001.0101)_2$