This Question Paper consists of 33 questions [Section–A (10) + Section–B (6) + Section–C (12) + Section–D (5)] and 12 printed pages, and a graph sheet.

इस प्रश्न-पत्र में 33 प्रश्न [खण्ड–अ (10) + खण्ड–ब (6) + खण्ड–स (12) + खण्ड–द (5)] तथा 12 मुद्रित पृष्ठ हैं और एक ग्राफ शीट है।

Roll No.
अनुक्रमांक | | | | | | | | | | | |

Code No.
कोड नं० **56 / HIS / 2**

MATHEMATICS
गणित
(311)

Set/सेट **A**

Day and Date of Examination .....
(परीक्षा का दिन व दिनांक)

Signature of Invigilators 1. .....
(निरीक्षकों के हस्ताक्षर)

2. .....

General Instructions :

1. Candidate must write his/her Roll Number on the first page of the Question Paper.
2. Please check the Question Paper to verify that the total pages and total number of questions contained in the Question Paper are the same as those printed on the top of the first page. Also check to see that the questions are in sequential order.
3. Making any identification mark in the Answer-Book or writing Roll Number anywhere other than the specified places will lead to disqualification of the candidate.
4. Write your Question Paper Code No. 56/HIS/2, Set [A] on the Answer-Book.
5. (a) The Question Paper is in English/Hindi medium only. However, if you wish, you can answer in any one of the languages listed below :

   English, Hindi, Urdu, Punjabi, Bengali, Tamil, Malayalam, Kannada, Telugu, Marathi, Odia, Gujarati, Konkani, Manipuri, Assamese, Nepali, Kashmiri, Sanskrit and Sindhi.

   You are required to indicate the language you have chosen to answer in the box provided in the Answer-Book.

   (b) If you choose to write the answer in the language other than Hindi and English, the responsibility for any errors/mistakes in understanding the questions will be yours only.

सामान्य अनुदेश :

1. परीक्षार्थी प्रश्न-पत्र के पहले पृष्ठ पर अपना अनुक्रमांक अवश्य लिखें।

2. कृपया प्रश्न-पत्र को जाँच लें कि प्रश्न-पत्र के कुल पृष्ठों तथा प्रश्नों की उतनी ही संख्या है जितनी प्रथम पृष्ठ के सबसे ऊपर छपी है। इस बात की जाँच भी कर लें कि प्रश्न क्रमिक रूप में हैं।

3. उत्तर-पुस्तिका में पहचान-चिह्न बनाने अथवा निर्दिष्ट स्थानों के अतिरिक्त कहीं भी अनुक्रमांक लिखने पर परीक्षार्थी को अयोग्य ठहराया जायेगा।

4. अपनी उत्तर-पुस्तिका पर प्रश्न-पत्र की कोड नं० 56/HIS/2, सेट [A] लिखें।

5. (क) प्रश्न-पत्र केवल हिन्दी/अंग्रेजी में है। फिर भी, यदि आप चाहें तो नीचे दी गई किसी एक भाषा में उत्तर दे सकते हैं :

   अंग्रेजी, हिन्दी, उर्दू, पंजाबी, बंगला, तमिल, मलयालम, कन्नड़, तेलुगू, मराठी, उड़िया, गुजराती, कोंकणी, मणिपुरी, असमिया, नेपाली, कश्मीरी, संस्कृत और सिन्धी।

   कृपया उत्तर-पुस्तिका में दिए गए बॉक्स में लिखें कि आप किस भाषा में उत्तर लिख रहे हैं।

   (ख) यदि आप हिन्दी एवं अंग्रेजी के अतिरिक्त किसी अन्य भाषा में उत्तर लिखते हैं, तो प्रश्नों को समझने में होने वाली त्रुटियों/गलतियों की जिम्मेदारी केवल आपकी होगी।

MATHEMATICS

गणित

(311)

Time : 3 Hours] [Maximum Marks : 100

समय : 3 घण्टे] [पूर्णांक : 100

Note : (i) This Question Paper consists of *four* Sections, viz., 'A', 'B', 'C' and 'D' containing 33 questions.

(ii) Question Nos. **1** to **10** in Section 'A' are multiple-choice questions. Each question carries *1* mark. In each question, there are four choices (A), (B), (C) and (D) of which only one is correct. You have to select the correct choice and indicate it in your Answer-Book by writing (A), (B), (C) or (D) as the case may be. No extra time is allotted for attempting these questions.

(iii) Question Nos. **11** to **16** in Section 'B' are very short-answer questions and carry *2* marks each.

(iv) Question Nos. **17** to **28** in Section 'C' are short-answer questions and carry *4* marks each.

(v) Question Nos. **29** to **33** in Section 'D' are long-answer questions and carry *6* marks each.

(vi) *All* questions are compulsory. There is no overall choice, however, alternative choices are given in some questions. In such questions, you have to attempt only one choice.

निर्देश : (i) इस प्रश्न-पत्र में 33 प्रश्न हैं, जो **चार** खण्डों 'अ', 'ब', 'स' तथा 'द' में विभाजित हैं।

(ii) खण्ड 'अ' में **1** से **10** तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के लिए *1* अंक निर्धारित है। प्रत्येक प्रश्न में (A), (B), (C) तथा (D) चार विकल्प दिए गए हैं, जिनमें कोई एक सही है। आपको सही विकल्प चुनना है तथा अपनी उत्तर-पुस्तिका में (A), (B), (C) अथवा (D) जो सही हो, उत्तर के रूप में लिखना है। इन प्रश्नों के उत्तर देने के लिए कोई अतिरिक्त समय नहीं दिया जाएगा।

(iii) खण्ड 'ब' में प्रश्न संख्या **11** से **16** तक अति लघु-उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के *2* अंक निर्धारित हैं।

(iv) खण्ड 'स' में प्रश्न संख्या **17** से **28** तक लघु-उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के *4* अंक निर्धारित हैं।

(v) खण्ड 'द' में प्रश्न संख्या **29** से **33** तक दीर्घ-उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के *6* अंक निर्धारित हैं।

(vi) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं। पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं है, फिर भी कुछ प्रश्नों में आंतरिक विकल्प हैं। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है।

SECTION–A

खण्ड–अ

1. If $A = 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, then $|A|$ is equal to

यदि $A = 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ हो, तो $|A|$ बराबर होगा

(A) 15 (B) 20

(C) 75 (D) −15

2. The principal value of $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ is equal to

$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}$ का मुख्य मान है

(A) π (B) $\pi / 2$

(C) $\pi / 3$ (D) $\pi / 4$

3. Let A be the set of all lines in a plane. The relation R is defined on A such that aRb holds if line a and line b are perpendicular to each other when $a, b \in A$. Then R is

(A) reflexive but not symmetric

(B) reflexive but not transitive

(C) equivalence relation

(D) symmetric but not transitive

माना A एक समतल में सभी सरल रेखाओं का समुच्चय है। सम्बन्ध R, A पर इस प्रकार परिभाषित है कि aRb है यदि रेखाएँ a और b एक-दूसरे पर लम्बवत् हैं जब $a, b \in A$. R होगा

(A) स्वतुल्य पर सममित नहीं

(B) स्वतुल्य पर संक्रामक नहीं

(C) समतुल्य सम्बन्ध

(D) सममित पर संक्रामक नहीं

4. $\int_{-1}^{1} |x| dx$ is equal to

$\int_{-1}^{1} |x| dx$ बराबर है

(A) 0 (B) 2

(C) 1 (D) 3/2

5. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$ is equal to

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$ बराबर है

(A) $\log|x - \sqrt{a^2 + x^2}| + c$ (B) $\log|x + \sqrt{a^2 - x^2}| + c$

(C) $\log|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + c$ (D) $\tan^{-1} x + c$

6. If $y = e^{2x\cos x}$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to

यदि $y = e^{2x\cos x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है

(A) $2e^{2x\cos x}(\cos x - x\sin x)$ (B) $2e^{2x\cos x}(2\cos x - x\sin x)$

(C) $2e^{2x\cos x}(x\cos x - \sin x)$ (D) $2e^{2x\cos x}(\cos x + \sin x)$

7. The degree of the differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y^5 = \cos x$ is equal to

अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y^5 = \cos x$ का घात है

(A) 3 (B) 2

(C) 5 (D) 1

8. Which of the following compound statements is false?

(A) 10 is a multiple of 2 or 5.

(B) Mumbai is the capital of Karnataka or Maharashtra.

(C) Two lines intersect at a point or they are parallel.

(D) Two lines in a plane either intersect at a point or they are parallel.

निम्नलिखित मिश्र कथनों में से कौन-सा असत्य है?

(A) 10, 2 या 5 का गुणज है।

(B) मुम्बई, कर्नाटक या महाराष्ट्र की राजधानी है।

(C) दो रेखाएँ या तो एक बिन्दु पर मिलती हैं या वे समान्तर हैं।

(D) एक समतल पर स्थित दो रेखाएँ या तो एक बिन्दु पर मिलती हैं या वे समान्तर होती हैं।

9. The slope of the normal to the curve $yx - x^3 + 2 = 0$ at $x = 1$ is

वक्र $yx - x^3 + 2 = 0$ पर $x = 1$ से बने अभिलंब की प्रवणता है

(A) -4 (B) 4

(C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$

10. If a line makes angles $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ and $\frac{\pi}{3}$ with positive directions of x-axis, y-axis and z-axis respectively, then the direction cosines of the line are

यदि एक रेखा x, y और z अक्षों की धनात्मक दिशाओं से क्रमशः $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{3}$ कोण बनाती हो, तो इस रेखा की दिक्-कोज्याएँ होंगी

(A) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (B) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

SECTION–B

खण्ड–ब

11. If $\begin{vmatrix} x-3 & -x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = 6$, then find the value of x.

यदि $\begin{vmatrix} x-3 & -x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = 6$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

12. Let $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are defined by $f(x) = x^2 - 1$ and $g(x) = 3x$. Find $f \circ g(2)$ and $g \circ f(2)$.

यदि $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ तथा $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ तथा $g(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित हो, तो $f \circ g(2)$ और $g \circ f(2)$ ज्ञात कीजिए।

13. Find $\frac{dy}{dx}$ at $x = 1$, when $y = \tan^{-1}(\log x^2)$.

$x = 1$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जबकि $y = \tan^{-1}(\log x^2)$.

14. Evaluate $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}$.

$\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ ज्ञात कीजिए।

15. Find the angle between the vectors $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$.

सदिशों $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Find the equation of a plane passing through the point (1, –1, 2) and parallel to a plane $2x + 5y + 3z = 6$.

समतल $2x + 5y + 3z = 6$ के समान्तर व बिन्दु (1, –1, 2) से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

16. Write the negation of the following statements :

(a) $a.b = 0$ implies that $a = 0$ or $b = 0$.

(b) The sum of 12 and 13 is 25.

निम्न कथनों के निषेधन लिखिए :

(क) यदि $a.b = 0$ है, तो $a = 0$ या $b = 0$ होगा।

(ख) 12 और 13 का योगफल 25 होता है।

SECTION–C

खण्ड–स

17. If $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{pmatrix}$ and $(A+B)^2 = A^2 + B^2$, then find the values of x and y.

यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{pmatrix}$ तथा $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ हो, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

18. Find the values of k for which the following system of equations has unique solution :

k के मान ज्ञात कीजिए, जिनके लिए निम्न समीकरण-निकाय का अद्वितीय हल हो :

$$kx + y + z = 1$$
$$x + ky + z = 1$$
$$x + y + kz = 1$$

Or / अथवा

Using the properties of determinants, prove the following :

सारणिक गुणधर्मों का प्रयोग करके निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)$$

19. Find x, if $\tan^{-1} 3x - \cot^{-1} 2x = -\frac{\pi}{4}$.

यदि $\tan^{-1} 3x - \cot^{-1} 2x = -\frac{\pi}{4}$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

20. Show that the relation R defined on $\mathbb{Z}$ by 'xRy holds iff $x - y$ is divisible by 5', $x, y \in \mathbb{Z}$ is an equivalence relation.

दिखाइए कि सम्बन्ध R, जो $\mathbb{Z}$ पर इस प्रकार परिभाषित है कि 'xRy है, यदि और केवल यदि $x - y$, 5 से विभाजित है', $x, y \in \mathbb{Z}$, एक समतुल्य सम्बन्ध है।

21. Find the values of k so that $f(x)$ is continuous at $x = 2$:

k के वे मान ज्ञात कीजिए, जिनके लिए $f(x)$, $x = 2$ पर सतत है :

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & , \quad x < 2 \\ k & , \quad x = 2 \\ 19 - 4x & , \quad x > 2 \end{cases}$$

22. If $y = e^{a \sin^{-1} x}$, show that $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$.

यदि $y = e^{a \sin^{-1} x}$ है, तो दर्शाइए कि $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2 y = 0$.

23. Evaluate $\int \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$.

$\int \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$ ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Evaluate $\int \frac{x}{(x-1)^2 (x+2)} dx$.

$\int \frac{x}{(x-1)^2 (x+2)} dx$ ज्ञात कीजिए।

24. Evaluate $\int_{-5}^{5} \{|x+2|+|x|\}\, dx$.

$\int_{-5}^{5} \{|x+2|+|x|\}\, dx$ ज्ञात कीजिए।

25. Show that of all rectangles of given area, square has the minimum perimeter.

दिखाइए कि दिए गए क्षेत्रफल के आयतों में से वर्ग का परिमाप न्यूनतम होता है।

26. Show that the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ are coplanar.

दिखाइए कि सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ समतलीय हैं।

27. Find the equation of the normal to the curve $y = x^2 - x$ at the point (3, 6). Show that this normal touches the circle $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 26$.

बिन्दु (3, 6) से वक्र $y = x^2 - x$ पर डाले गए अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए। साथ ही यह भी दिखाइए कि यह अभिलंब, वृत्त $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 26$ को स्पर्श करता है।

Or / अथवा

Find the intervals in which the function $f(x) = (x-1)^2(x-3)^2$ is *(a)* increasing and *(b)* decreasing.

वे अन्तराल ज्ञात कीजिए, जिन पर फलन $f(x) = (x-1)^2(x-3)^2$ (क) वर्धमान है और (ख) ह्रासमान है।

28. Find the equation of a line in symmetrical form which is the intersection of following two planes :

$$x - 2y + 5z = 4$$
$$x + y - 4z = 2$$

दो समतलों $x - 2y + 5z = 4$ तथा $x + y - 4z = 2$ के प्रतिच्छेदन से बनने वाली रेखा का समीकरण, सममित रूप में ज्ञात कीजिए।

SECTION–D

खण्ड–द

29. Using matrices, solve the following system of equations :

आव्यूह विधि से, निम्न समीकरण-निकाय का हल ज्ञात कीजिए :

$$2x - 3y + z = 1$$
$$x + 2y - 3z = 4$$
$$4x - y - 2z = 8$$

Or / अथवा

Find A if $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ and verify that $AA^{-1} = I_3$.

यदि $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ है, तो A ज्ञात कीजिए। साथ में यह भी सत्यापित कीजिए कि $AA^{-1} = I_3$.

30. Find the differential equation of the curve represented by $y^2dx + (x^2 + xy)\,dy = 0$ and passes through the point (1, 1).

वक्र को प्रदर्शित करने वाले समीकरण $y^2dx + (x^2 + xy)\,dy = 0$, जो बिन्दु (1, 1) से गुजरता है, का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Find the solution of the differential equation $(x^2y^2 + xy)\,y\,dx + (x^2y^2 - xy)x\,dy = 0$, given that $y = 1$, when $x = 1$.

अवकल समीकरण $(x^2y^2 + xy)\,y\,dx + (x^2y^2 - xy)x\,dy = 0$ को हल कीजिए, दिया है कि जब $x = 1$, तो $y = 1$.

31. Find the area enclosed by the curves $y^2 = 8x$ and $y = x^2$.

वक्रों $y^2 = 8x$ तथा $y = x^2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

32. Find the equation of a plane passes through the points $(-1, 3, 4)$ and $(2, -3, 1)$, and perpendicular to the plane $x + 3y + 4z = 5$.

समतल $x + 3y + 4z = 5$ के लम्बवत् और बिन्दुओं $(-1, 3, 4)$ तथा $(2, -3, 1)$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

33. Ajay wants to invest at most ₹ 12,000 in Kisan Vikas Patras and National Savings Bonds. According to rules, he has to invest at least ₹ 2,000 in Kisan Vikas Patras and at least ₹ 4,000 in National Savings Bonds. If the rate of interest on Kisan Vikas Patras is 8% per annum and the rate of interest on National Savings Bonds is 10% per annum, how much money should he invest to earn maximum yearly interest/income? Also, find his maximum yearly interest/income. Formulate the above LPP mathematically and then solve it graphically.

अजय किसान विकास पत्रों व राष्ट्रीय बचत बॉन्डों में अधिकतम ₹ 12,000 का निवेश करना चाहता है। नियम के अनुसार, उसे कम-से-कम ₹ 2,000 किसान विकास पत्रों में और कम-से-कम ₹ 4,000 राष्ट्रीय बचत बॉन्डों में निवेश करना अनिवार्य है। किसान विकास पत्रों पर उसे 8% वार्षिक दर से और राष्ट्रीय बचत बॉन्डों पर 10% वार्षिक दर से ब्याज मिलता है। अधिकतम वार्षिक ब्याज/आय अर्जित करने के लिए वह कितना धन का निवेश करे? साथ ही अधिकतम वार्षिक ब्याज/आय भी ज्ञात कीजिए। इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए और उसे आलेख विधि से हल कीजिए।

★ ★ ★