
MATHEMATICS

गणित

(311)

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 100

समय : 3 घण्टे]

[पूर्णांक : 100

- Note :*
- (i) This Question Paper consists of *two* Sections, viz., 'A' and 'B'.
 - (ii) *All* questions from Section 'A' are to be attempted. However, in some questions, internal choice is given.
 - (iii) Section 'B' has *two* options. Candidates are required to attempt questions from *one option* only.

- निर्देश :**
- (i) इस प्रश्न-पत्र में दो खण्ड हैं—खण्ड 'अ' तथा खण्ड 'ब'।
 - (ii) खण्ड 'अ' के सभी प्रश्नों को हल करना है। कुछ प्रश्नों के अन्तर्गत विकल्प दिए गए हैं।
 - (iii) खण्ड 'ब' में दो विकल्प हैं। परीक्षार्थियों को केवल एक विकल्प के ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

SECTION-A

खण्ड-अ

1. If $1, \omega, \omega^2$ are the cube roots of unity, then prove the following :

2

यदि $1, \omega, \omega^2$ इकाई के घनमूल हैं, तो निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^7)(1 + \omega^8) = 1$$

2. If ${}^nC_3 = \frac{5}{18} \cdot {}^nC_5$, find the value of n .

2

यदि ${}^nC_3 = \frac{5}{18} \cdot {}^nC_5$ है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

3. A committee of 5 is to be formed from 6 gents and 4 ladies. In how many ways this can be done if at most 2 ladies are included? 2

6 पुरुषों तथा 4 स्त्रियों में से 5 लोगों की एक कमेटी बनाई जानी है। यदि कमेटी में अधिक-से-अधिक 2 स्त्रियाँ हों, तो यह कितने तरीकों से किया जा सकता है?

4. Find the equation of the circle concentric with the circle $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 11 = 0$ and passing through the centre of the circle $x^2 + y^2 = 16$. 2

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 11 = 0$ का संकेन्द्री है तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ के केन्द्र से होकर जाता है।

5. The 6th term of an AP is 20 and its 11th term is 35. Find the 25th term of the AP. 2

एक समांतर श्रेढ़ी का 6ठा पद 20 है तथा 11वाँ पद 35 है। उस समांतर श्रेढ़ी का 25वाँ पद ज्ञात कीजिए।

6. If $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ and $C = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$, then verify that

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (B \cap C)$$

2

यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ तथा $C = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$ है, तो सत्यापित कीजिए कि

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (B \cap C)$$

7. If $f(x) = x^2 - 4$ and $g(x) = 2x + 5$, find $f \circ g$ and $g \circ f$. 2

यदि $f(x) = x^2 - 4$ और $g(x) = 2x + 5$ है, तो $f \circ g$ तथा $g \circ f$ ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Prove that $f : R \rightarrow R$, defined by $f(x) = 4x^3 - 5$, is a one-one and onto function.

सिद्ध कीजिए कि $f : R \rightarrow R$, जो $f(x) = 4x^3 - 5$ द्वारा परिभाषित है, एक एकैकी तथा आच्छादक फलन है।

8. Prove that

सिद्ध कीजिए कि

$$\cos^{-1} \frac{4}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} = \sin^{-1} \frac{56}{65} \quad 2$$

9. If α and β are the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$, then form an equation whose roots are $\alpha + \frac{1}{\beta}$ and $\beta + \frac{1}{\alpha}$. 3

यदि α , और β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha + \frac{1}{\beta}$ तथा $\beta + \frac{1}{\alpha}$ हैं।

Or / अथवा

If the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ are in the ratio of 2 : 3, then prove that $6b^2 = 25ac$.

यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों में 2 : 3 का अनुपात है, तो सिद्ध कीजिए कि $6b^2 = 25ac$.

10. Using properties of determinants, prove the following : 3

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$

Or / अथवा

Express the matrix $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix.

आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम-सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए।

11. Evaluate :

3

मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4\theta}{1 - \cos 6\theta}$$

Or / अथवा

If $\sin y = x \sin (a + y)$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 (a + y)}{\sin a}$.

यदि $\sin y = x \sin (a + y)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 (a + y)}{\sin a}$.

12. Evaluate :

3

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$$

Or / अथवा

Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta} d\theta$$

13. A and B appear for an interview for two vacancies. The probability for A's selection is $\frac{1}{3}$ and that of B's selection is $\frac{1}{5}$. Find the probability that at least one of them is selected.

3

A तथा B दो खाली पदों के लिए साक्षात्कार के लिए गए। A के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है तथा B के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों में से कम-से-कम एक चुना जाए।

14. Find the term independent of x in the expansion of $\left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right)^4$. 4

$\left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right)^4$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

15. Find the equation of the line passing through the point (3, 2) and the portion of the line intercepted between the axes is divided by the point in the ratio of 1 : 2. 4

उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, 2) से होकर जाती है तथा रेखा का वह भाग, जो अक्षों के बीच अंतःखंडित होता है, इस बिन्दु पर 1 : 2 के अनुपात में विभाजित होता है।

16. Find the equation of the parabola whose focus is (2, 3) and whose directrix is the line $x - 4y + 3 = 0$. 4

उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (2, 3) है तथा जिसकी नियन्ता रेखा $x - 4y + 3 = 0$ है।

17. If $y = \log(x + \sqrt{a^2 + x^2})$, find $\frac{dy}{dx}$. 4

यदि $y = \log(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

If $y = (x^2 + 1)(x - 1)$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

यदि $y = (x^2 + 1)(x - 1)$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

18. Solve the following differential equation : 4

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(x^2 + xy) dy = (x^2 + y^2) dx$$

19. Calculate the variance for the following frequency distribution :

4

निम्न बारंबारता बंटन का प्रसरण ज्ञात कीजिए :

Marks प्राप्तांक	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
Frequency बारंबारता	3	5	9	12	15	4	2

20. Using matrices, solve the following system of equations :

6

आव्यूहों का प्रयोग करके निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$3x - 3y - 4z = 11$$

21. Show that the sum of first n even natural numbers is $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ times the sum of first n odd natural numbers.

6

दर्शाइए कि प्रथम n सम प्राकृत संख्याओं का योग, प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं के योग का $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ गुना है।

22. Find the general solution of the following trigonometric equation :

6

निम्न त्रिकोणमितीय समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

$$\cos 3x = \sin 2x$$

Or / अथवा

Using sine formula, prove the following :

साइन फॉर्मूले के प्रयोग से निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$a(\cos C - \cos B) = 2(b - c) \cos^2 \frac{A}{2}$$

- 23.** Show that the height of a closed right circular cylinder of given volume and least surface is equal to its diameter.

6

दर्शाइए कि दिए गए आयतन वाले बंद लंब वृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम होगा जब उसकी ऊँचाई उसके व्यास के बराबर है।

- 24.** Using integration, find the area of the region enclosed between the curves $y = x^2$ and $y = x + 6$.

6

वक्रों $y = x^2$ तथा $y = x + 6$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल समाकलनों के प्रयोग से ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

SECTION-B

खण्ड-ब

OPTION-I

विकल्प-I

(Vectors and 3-Dimensional Geometry)

(सदिश तथा त्रि-आयाम ज्यामिति)

25. Determine a unit vector parallel to the resultant of the two vectors $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$. 2

दो सदिशों $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के परिणामी के समांतर एकक सदिश ज्ञात कीजिए।

26. If $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 5$ and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 60$, find $|\vec{a} \times \vec{b}|$. 3

यदि $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 5$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{b} = 60$ है, तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

27. Find the equation of the plane passing through the points $(-1, 2, 3)$ and $(2, -3, 4)$, and which is perpendicular to the plane $3x + y - z + 5 = 0$. 4

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-1, 2, 3)$ और $(2, -3, 4)$ से होकर जाता है तथा समतल $3x + y - z + 5 = 0$ पर लंबवत् है।

Or / अथवा

Find the equation of the sphere for which the circle, given by $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$ and $2x + 3y + 4z - 8 = 0$, is a great circle.

ऐसे गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$ तथा $2x + 3y + 4z - 8 = 0$ वाला वृत्त गोले का बृहत् वृत्त है।

- 28.** Prove that the lines $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$ and $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-6}{7}$ are coplanar. Find the equation of the plane containing these lines. 6

सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7}$ तथा $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-6}{7}$ समतलीय हैं। उस समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए जिसमें ये रेखाएँ स्थित हैं।

OPTION-II

विकल्प-II

(Mathematics for Commerce, Economics and Business)

(वाणिज्य, अर्थशास्त्र तथा व्यापार के लिए गणित)

- 25.** A man bought ₹ 12,000 of 10% stock at 92 and sold it when its price rose to ₹ 98. Find his total gain and gain percent. 2

एक व्यक्ति ने 10% का ₹ 12,000 का स्टॉक 92 के भाव से खरीदा तथा उसका मूल्य ₹ 98 होने पर बेच दिया। उसका कुल लाभ तथा लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

- 26.** A person at the age of 25 years takes an insurance policy of sum assured ₹ 50,000 for 30 years term. Calculate the half-yearly premium assuming the following details : 3

एक व्यक्ति 25 वर्ष की आयु में ₹ 50,000 की एक बीमा पॉलिसी 30 वर्ष के लिए लेता है। निम्न विवरण के अनुसार उसका अर्ध-वार्षिक प्रीमियम ज्ञात कीजिए :

Tabular premium : ₹ 40/1,000

तालिका प्रीमियम

Rebate for large sum assured : ₹ 2/1,000

अधिक बीमा राशि के लिए छूट

Rebate for half-yearly payment : 1.5%

अर्ध-वार्षिक भुगतान के लिए छूट

Or / अथवा

Ganesh & Sons produces 100 kg chocolate biscuits per day at the cost of ₹ 50 per kg. If the excise duty is 5%, then how much duty has to be paid by the company at the end of the month if ₹ 20 per kg is added to the cost?

गणेश ऐन्ड सन्स 100 किलोग्राम चॉकलेट बिस्कुट प्रतिदिन ₹ 50 प्रति किलोग्राम के निवेश मूल्य पर बनाती है। यदि उत्पाद शुल्क 5% है, तो माह के अंत में कम्पनी को कितना उत्पाद शुल्क देना पड़ेगा यदि ₹ 20 प्रति किलोग्राम निवेश मूल्य में जोड़ा जाए?

27. Using simple average of price relative method, find the price index for 2001, taking 1998 as base year from the following data :

4

निम्न आँकड़ों से 1998 को आधार वर्ष मानकर वर्ष 2001 के लिए मूल्यानुपातों के सरल माध्य की रीति से मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिए :

Commodity (वस्तु)	A	B	C	D	E
Price in 1998 (per unit) 1998 में मूल्य (प्रति इकाई)	12	20	12	40	80
Price in 2001 (per unit) 2001 में मूल्य (प्रति इकाई)	16	25	16	60	96

28. The demand function of a product for a manufacturer is $p(x) = ax + b$. He knows that he can sell 1250 units when the price is ₹ 5 per unit and can sell 1500 units at a price of ₹ 4 per unit. Find the total, average and marginal revenue functions. Also find the price per unit when the marginal revenue is zero.

6

एक उत्पादक का एक उत्पाद के लिए माँग फलन $p(x) = ax + b$ है। वह जानता है कि वह ₹ 5 प्रति इकाई के मूल्य पर 1250 इकाइयाँ तथा ₹ 4 प्रति इकाई के मूल्य पर 1500 इकाइयाँ बेच सकता है। कुल, औसत तथा सीमांत आय फलन ज्ञात कीजिए। यदि सीमांत आय शून्य हो, तो प्रति इकाई मूल्य भी ज्ञात कीजिए।

★ ★ ★